

陈松男 / 著

CHEN SONG NAN ZHU

# 金融工程学

JINRONG GONGCHENG XUE



复旦大学出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

# 金融工程学

## ——金融商品创新选择权理论

陈松男 著

復旦大學出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

金融工程学 / 陈松男著. — 上海: 复旦大学出版社,  
2002. 11

ISBN 7-309-03343-4

I. 金… II. 陈… III. 金融学—高等学校—教材  
IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 065193 号

---

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 200433

86-21-65118853(发行部) 86-21-65642892(编辑部)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

经销 新华书店上海发行所

印刷 江苏句容市排印厂

开本 787×960 1/16

印张 31.25

字数 468 千

版次 2002 年 11 月第一版 2002 年 11 月第一次印刷

印数 1—2 500

定价 49.00 元

---

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

## 陈松男 博士 (Dr. Son-Nan Chen)

现任:中国台湾政治大学金融系教授

上海复旦大学客座教授

政治大学商学院财务工程研究中心主任

中华金融创新与财务工程学会理事长

乾隆 TraderOne 金融工程总顾问

中国台湾合格证券分析师

曾任:美国马里兰大学财务金融博士研究所主任 7 年

# 目 录

<b>第一章 股价变动过程及 Itô 定理</b> .....	1
一、马可夫随机过程 .....	1
二、Generalized Wiener Process .....	3
三、Itô Process .....	4
四、Ito's Lemma(Itô 定理) .....	6
参考文献 .....	12
<b>第二章 Black-Scholes 选择权模型</b> .....	13
一、模型假设 .....	13
二、Black-Scholes 欧式买权的评价 .....	13
三、欧式卖权的评价模型 .....	20
四、避险参数 .....	21
参考文献 .....	24
<b>第三章 Merton 选择权模型(附加考量现金股息)及外汇选     择权</b> .....	26
一、模型推导 .....	26
二、外汇选择权模型 .....	29
三、Merton 模型的另一种推导方法 .....	31
参考文献 .....	32
<b>第四章 Black 模型——期货选择权</b> .....	34
一、简介 .....	34
二、期货买权的评价 .....	34
三、期货卖权的评价 .....	36
<b>第五章 Martingale 评价方法</b> .....	37
一、必要的数学基础 .....	37

二、Girsanov 定理 .....	40
三、Martingale 评价方法的应用 .....	43
参考文献 .....	48
<b>第六章 降低权利金之权证创新及评价 .....</b>	<b>49</b>
一、前言 .....	49
二、新商品创新及评价 .....	51
三、结论 .....	66
参考文献 .....	67
附录 .....	68
<b>第七章 组合型权证的正确评价及避险方法 .....</b>	<b>77</b>
一、前言 .....	77
二、组合型权证的评价 .....	78
三、冲销风险 .....	84
四、实证研究 .....	87
五、结论 .....	93
参考文献 .....	93
附录 .....	94
<b>第八章 欧式及美式数据选择权 (Digital Options) .....</b>	<b>97</b>
一、简介 .....	97
二、欧式数据选择权 .....	97
三、美式数据选择权 .....	99
参考文献 .....	105
<b>第九章 二元素选择权:现金或无偿选择权 .....</b>	<b>106</b>
一、单一标的型的现金或无偿选择权 .....	106
二、两个标的型的现金或无偿选择权:4 种不同类型 .....	108
三、C-Brick 选择权 .....	113
四、资产或无偿选择权 .....	116
五、A-Brick 选择权 .....	119
参考文献 .....	121
附录 .....	121

<b>第十章 互换选择权(Exchange Options)</b> .....	123
一、简介 .....	123
二、互换选择权的特征 .....	123
三、互换选择权的评价 .....	125
四、互换选择权的延伸 .....	127
参考文献 .....	130
<b>第十一章 后定选择权(Chooser Options)</b> .....	131
一、简介 .....	131
二、后定选择权的评价 .....	131
三、多期定点后定选择权 .....	133
四、复杂型后定选择权 .....	134
参考文献 .....	136
<b>第十二章 极大值或极小值选择权</b> .....	137
一、简介 .....	137
二、最大值选择权的评价 .....	137
三、最小值选择权的评价 .....	145
四、特性 .....	148
参考文献 .....	149
<b>第十三章 混合选择权(Compound Options)</b> .....	151
一、定义 .....	151
二、混合选择权的评价 .....	153
参考文献 .....	161
<b>第十四章 外汇选择权——考量两国利率随机变动</b> .....	162
一、简介 .....	162
二、外汇买权及卖权的关系 .....	163
三、欧式外汇买权及卖权的评价 .....	167
四、避险参数 .....	172
五、美式外汇选择权 .....	173
参考文献 .....	174
<b>第十五章 汇率连动远期契约</b> .....	175

一、简介 .....	175
二、风险中立与外汇及外国标的价格变动过程 .....	176
三、汇率连动远期契约的评价 .....	182
参考文献 .....	186
<b>第十六章 汇率连动选择权 (Quanto Options) .....</b>	<b>187</b>
一、4 种不同汇率连动 .....	187
二、浮动汇率选择权: 第一种汇率连动选择权 .....	188
三、第二种汇率连动选择权 .....	190
四、固定汇率选择权: 第三种汇率连动选择权 .....	193
五、第四种汇率连动选择权 .....	197
参考文献 .....	200
附录一 .....	200
附录二 .....	202
<b>第十七章 美式汇率连动选择权 .....</b>	<b>205</b>
一、简介 .....	205
二、提前履约的可能性 .....	205
三、美式第一类型汇率连动买权(或卖权) .....	207
四、美式第二类型汇率连动买权(或卖权) .....	209
五、美式第三类型汇率连动买权(或卖权) .....	212
六、美式第四类型汇率连动买权(或卖权) .....	214
参考文献 .....	215
<b>第十八章 平均汇率选择权 .....</b>	<b>217</b>
一、简介 .....	217
二、算术平均选择权的平价关系(Put-Call Parity) .....	218
三、评价模型 .....	222
参考文献 .....	224
<b>第十九章 亚洲选择权: 倒数 Gamma 概率分布及封闭解模型 ...</b>	<b>226</b>
一、简介 .....	226
二、股价算术平均值的定义及性质 .....	227
三、Gamma 与倒数 Gamma 概率分布的关系 .....	230



---

四、评价模型 .....	233
参考文献 .....	240
<b>第二十章 远期生效亚洲选择权 .....</b>	<b>242</b>
一、简介 .....	242
二、求解评价模型 .....	243
三、远期生效亚洲买卖权的平价关系 .....	249
四、评价模型的准确度 .....	250
参考文献 .....	251
附录一 .....	251
附录二 .....	253
<b>第二十一章 重设型卖权 .....</b>	<b>255</b>
一、简介 .....	255
二、重设型卖权的定义 .....	256
三、欧式重设型卖权的评价: Martingale Pricing .....	257
四、价值变动与风险特征 .....	263
五、美式重设型卖权评价 .....	267
参考文献 .....	269
<b>第二十二章 重设型熊市认售权证的创新 .....</b>	<b>270</b>
一、简介 .....	270
二、重设型熊市认售权证的定义 .....	271
三、Martingale 评价 .....	272
四、风险特征 .....	277
五、美式重设型熊市认售权证 .....	279
参考文献 .....	280
<b>第二十三章 多点重设型选择权 .....</b>	<b>281</b>
一、简介 .....	281
二、重设程序及到期现金流量 .....	282
三、多点重设型买权的评价及避险参数 .....	283
四、多点重设型卖权的评价及避险参数 .....	290
参考文献 .....	294

附录	295
<b>第二十四章 回顾型选择权(Lookback Options)</b>	302
一、简介	302
二、最高及最低标的价格的概率分布	303
三、回顾型买权的评价:浮动履约价	304
四、回顾型卖权:浮动履约价	311
五、固定履约价格的回顾型买权	315
参考文献	318
<b>第二十五章 连续履约价(或限界)选择权</b>	319
一、简介	319
二、连续履约价选择权	319
三、连续履约价限界选择权	325
四、平方选择权(Power Options)	327
五、软著界线选择权(Soft Barrier Options)	328
参考文献	330
<b>第二十六章 美式选择权效率评价法</b>	331
一、简介	331
二、欧式选择权评价模型	331
三、美式选择权评价	334
四、数值分析法:求 $S^*$ 及 $S'$	339
参考文献	341
<b>第二十七章 二元树选择权评价模型:CRR</b>	343
一、简介	343
二、评价选择权的基本概念	343
三、二项式评价模型	345
四、二项式评价模型的极限——Black-Scholes 模型	355
五、二项式模型的其他评价应用	364
参考文献	366
<b>第二十八章 二元树评价模型之应用:美式及新奇选择权评价</b>	367
一、简介	367

---

二、美式选择权的评价:二元树模型 .....	367
三、美式外汇选择权的评价 .....	373
四、美式期货选择权的评价:二项式评价模型 .....	376
五、新奇选择权的评价 .....	379
六、结论 .....	391
参考文献 .....	392
附录 .....	393
<b>第二十九章 三元树选择权评价模型 .....</b>	<b>395</b>
一、简介 .....	395
二、三元树模型:单一情况变量模型 .....	395
三、界限选择权评价 .....	402
四、双情况变量模型 .....	404
参考文献 .....	407
<b>第三十章 利率衍生性商品:单因子模型 .....</b>	<b>409</b>
一、简介 .....	409
二、单因子利率模型 .....	410
三、折价债券评价 .....	412
四、债券选择权的评价 .....	418
五、利用利率期间结构估计参数: $B(0, T)$ 及 $A(0, T)$ .....	420
参考文献 .....	422
<b>第三十一章 双因子利率衍生性商品模型 .....</b>	<b>424</b>
一、简介 .....	424
二、双因子利率模型 .....	424
三、殖利率及远期利率动态过程 .....	427
四、债券选择权的评价 .....	431
参考文献 .....	434
附录 .....	435
<b>第三十二章 付息债券选择权 .....</b>	<b>438</b>
一、简介 .....	438
二、付息债券选择权:单因子利率模型 .....	438

---

三、付息债券选择权:双因子模型 .....	442
参考文献 .....	445
<b>第三十三章 信用风险价差衍生性商品 .....</b>	<b>446</b>
一、简介 .....	446
二、信用等级随机过程 .....	447
三、信用风险债券评价 .....	449
四、风险中立移动概率的求算 .....	451
五、信用风险价差卖权的评价 .....	456
六、KK 的实证结果 .....	458
参考文献 .....	458
附录 .....	459
<b>第三十四章 信用价差模型:动态过程 .....</b>	<b>461</b>
一、简介 .....	461
二、信用价差与转移概率 .....	462
三、两种情况模型(Two-State Model) .....	464
四、信用等级转移模型 .....	465
五、有记忆的信用转移模型 .....	470
六、信用转移模型:随机倒闭概率 .....	470
七、统计相关的信用价差 .....	473
参考文献 .....	474
<b>专有名词中文索引 .....</b>	<b>476</b>

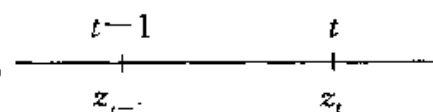
# 第一章 股价变动过程及 Itô 定理

## 一、马可夫随机过程

由实证得知,股价、利率及汇率变动过程呈现随机行为而无法预测。它的变动过程可以某一种随机过程(A Stochastic Process)来形容(或代表)。其中之一是 Wiener Process(或称布朗运动,Brownian Motion),它是马可夫随机过程(Markov Stochastic Process)的一种。一个随机变量  $z$  是 Wiener Process 或布朗运动必须具备下列两个条件:

1. 在某一小时段  $\Delta t$  内,它的变动是与时段  $\Delta t$  及纯随机变动  $\epsilon$ (或称 White Noise)相关,并可用下列公式表示:

$$\Delta z_t = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

此处  $\Delta z_t = z_t - z_{t-1}$ , 

$\epsilon \sim N(0, 1)$ ,  $\epsilon$  是正态分布,零期望值及方差等于 1

2. 在两个不重叠时段  $\Delta t$  及  $\Delta s$ ,  $z$  的增量  $\Delta z_t$  及  $\Delta z_s$  是独立的(即相系数 = 0):(这个条件是 Markov Process 成立的条件)

$$\text{Cov}(\Delta z_t, \Delta z_s) = 0 \quad (2)$$

此处  $\Delta z_t = z_t - z_{t-1}$ ,  $\Delta z_s = z_s - z_{s-1}$ ,  $z_{t-1} < z_t < z_{s-1} < z_s$

根据上述两个条件,随机增量  $\Delta z$  的概率分布性质如下:

1. 它的期望值(或称均值)为零:  $E(\Delta z_t) = 0$

2. 其方差为  $Var(\Delta z_t) = Var(\epsilon \sqrt{\Delta t}) = \Delta t$  (其方差是时段的长度  $\Delta t$ ), 其标准差是:  $\sqrt{Var(\Delta z_t)} = \sqrt{\Delta t}$  (其标准差是时段的平方根)

当时段的长度放大至  $T$  时(即从现在 0 至未来  $T$ ), 随机变量  $\Delta z_T$  的概率分布如下:

1.  $E(\Delta z_T) = 0 (\Delta z_T = z_T - z_0)$

2.  $Var(\Delta z_T) = T$  (其方差是时段的长度  $T$ )

$$\sqrt{Var(\Delta z_T)} = \sqrt{T}$$

证明

可将长时段  $T$ , 分成  $N$  个时段  $\Delta t \left( = \frac{T}{N} \right)$

则

$$\begin{aligned} \Delta z_T = z_T - z_0 &= \sum_{i=1}^N \Delta z_i, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1} = \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N \epsilon_i \end{aligned}$$

对  $\Delta z_T$  取期望值及方差即可容易证明(简单统计演算)

$$E(\Delta z_T) = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N E(\epsilon_i) = 0 \quad [\because E(\epsilon_i) = 0]$$

$$Var(\Delta z_T) = \Delta t Var\left(\sum_{i=1}^N \epsilon_i\right) = \Delta t \cdot N = T$$

$$E(\epsilon_i^2) = 1 = Var(\epsilon_i)$$

在连续时间下(Continuons Time), 瞬间变量  $dz_t$  的性质可由(1)及(2)分别转化成为(3)及(4)如下:

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \quad (3)$$

$$Cov(dz_t, dz_s) = 0 \quad (4)$$

此处: 当时段  $\Delta t$  趋近零时, 其极限为  $dt$  (不是零), 且  $\Delta z_t \rightarrow dz_t$  (箭头表

示趋近)。

其概率分布性质如下：

$dz_t \sim N(0, dt)$ , 是正态分布。

其  $E(dz_t) = 0$ ,  $Var(dz_t) = dt$ 。在连续时间下,  $dz_t$  的瞬间期望值为零, 且其瞬间标准差为  $\sqrt{dt}$ 。

## 二、Generalized Wiener Process

前一节  $dz_t$  的变动呈现零期望值及方差 1 (每单位时间  $dt$ ), 且是常态概率分布。但有些随机变量的增量概率分布并不一定呈现零期望值及方差 1。因此, 我们可修改前一节的随机过程, 使其增量的期望值不是零、且方差不是 1。此种随机过程称为概化 Wiener 随机过程 (Generalized Wiener Process), 其数学程式的定义如下：

$$dX_t = a dt + b dz_t \quad (5)$$

此处:  $dX_t$  代表随机变量  $X$  的瞬间变量；

$a$  代表随机变量  $X$  的瞬间变量期望值 (每单位时间  $dt$ ) (或称 the Drift 漂浮项)；

$b$  代表  $X$  的瞬间 (变量) 标准差 (每单位时间  $dt$ )。

根据 (5), 随机变量  $X$  的瞬间变量  $dX_t$  概率分布性质为

$$1. E(dX_t) = a dt$$

$$2. Var(dX_t) = b^2 dt, \sqrt{Var(dX_t)} = b\sqrt{dt}$$

$$3. dX_t \sim N(a dt, b^2 dt). \text{正态分布}$$

若以间断时间  $\Delta t$  来代表 (5), 则 (5) 及其概率分布性质如下：

$$\Delta X_t = a \Delta t + b \Delta z_t \quad (6)$$

$$E(\Delta X_t) = a \Delta t$$

$$Var(\Delta X_t) = b^2 \Delta t, \sqrt{Var(\Delta X_t)} = b\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta X_t \sim N(a\Delta t, b^2\Delta t)$$

公式(5)所代表的随机过程意义如下:

随机变量  $X$  的变动过程中,除了随机变动( $dz_t$ )外,尚有另一随时间成长的变动成分(Growth with Time),亦即  $dX_t = a dt$  (暂忽略随机项  $dz_t$ )

$$\therefore \int_0^t dX_t = \int_0^t a ds \Rightarrow X_t - X_0 = a(t - 0)$$

$$\therefore X_t = X_0 + at$$

所以,随机变量  $X$  从时间  $t = 0$  开始的值  $X_0$ ,以  $a$  的比率随着时间成长(即  $at$ ),加上另一项无法预测的随机变动  $b dz_t$ 。这也就是(5)(或(6))所代表的意义。

### 三、Itô Process

虽然概化 Wiener 随机过程(Generalized Wiener Process)(5)比(1)及(3)更能完整代表某些随机变量的变动过程,但仍不足以代表其他随机变量的复杂变动过程。比它更完整的随机过程称为 Itô Process,其数学程式如下:

$$dX_t = a(x, t)dt + b(x, t)dz_t \quad (7)$$

此处:  $a(x, t)$  代表随机变量  $X_t$  的瞬间变量期望值,它会随着变量  $X_t$  本身及时间的变动而变动,也就是  $a(x, t)$  不是固定不变;  $b(x, t)$  代表  $X_t$  的瞬间变量的标准差,它也是随着  $X_t$  及时间  $t$  变动,而不是固定不变。因此,

$$E(dX_t) = a(x, t)dt$$

$$Var(dX_t) = b^2(x, t)dt$$

$$\sqrt{Var(dX_t)} = b(x, t)\sqrt{dt}$$



Black-Scholes 选择权评价模型是根据 Itô Process 的一种特别模型来代表股价的变动过程,表示如下:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t \quad (8)$$

此处:  $S_t$  代表在时间  $t$  的某种股票(或指数)的价位,它是一种随机变量(即  $X_t = S_t$ ),

$\mu S_t$  代表股价变量  $dS_t$  的瞬间期望值,  $E(dS_t) = \mu S_t dt$

$\sigma S_t$  代表股价变量的瞬间标准差,  $\sqrt{\text{Var}(dS_t)} = \sigma S_t dt$

公式(8)显然是 Itô Process 的一种变动程式[ $\because a(x, t) = \mu S$ ,  $b(x, t) = \sigma S$  ]。公式(8)的股价变动程式也可以股票报酬率表示如下:(为方便计,我们将  $S_t$  及  $z_t$  的  $t$  符号予以忽略)

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (9)$$

此处:  $\frac{dS}{S}$  代表股票的瞬间报酬率(Instantaneous Rate of Return)

$\mu$  = 股票的期望瞬间报酬率(Expected Instantaneous Rate of Return),  $E\left(\frac{dS}{S}\right) = \mu dt$

$\sigma$  = 股票的报酬率瞬间标准差(Instantaneous Standard Deviation of Return),  $\text{Var}\left(\frac{dS}{S}\right) = \sigma^2 dt$

公式(8)或(9)代表股价(或报酬率)的变动,除了呈现随机变动( $\sigma S dz_t$ )外,仍有一项代表股价以期望值  $\mu$  的比率随时间(Growth),其证明如下:暂时忽略随机项

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \Rightarrow \int_0^t \frac{dS}{S} = \int_0^t \mu dt$$

$$\therefore \ln S_t - \ln S_0 = \mu t \Rightarrow S_t = S_0 e^{\mu t} \quad (10)$$

因此,若现在( $t = 0$ )股价是  $S_0$ ,则它是以  $\mu$  的成长率随时间成长至  $S_0 e^{\mu t} (= S_t)$ 。因此,股价除以指数函数上涨外(即以连续复利成长),仍因总体经济因素及个股本身因素的随机冲击影响,而呈现随机

变动。此随机变动是由(8)的随机项  $S\sigma dz$  所代表。所以,公式(8)或(9)比(5)更能充分代表股价的变动过程。Black-Scholes 模型及其他选择权的标的股价变动过程都是以 Itô Process(8)或(9)作为基础。

在间断时间(the Discrete Time)架构下,(8)及(9)可改写为:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (11)$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta z \quad (12)$$

$$\therefore E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \mu \Delta t$$

$$Var\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2 \Delta t$$

即  $\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ , 股票报酬率  $\frac{\Delta S}{S}$  是正态分布, 期望值为  $\mu$  (每单位时间  $\Delta t$ )、且标准差为  $\sigma$  (每单位时间  $\sqrt{\Delta t}$ )。

#### 四、Ito's Lemma(Itô 定理)

衍生性商品是由标的物(股票、利率、汇率或商品)衍生而出的商品,其价格变动行为当然受到标的物价格的变动影响而产生变动。因标的物价格的变动过程可由 Itô Process 公式(8)或(9)代表,则衍生性商品的价格变动过程应如何表示,可借用 Itô Lemma(是由日本一位术学家 K. Ito(1951)推导而出)来推导。首先我们先证明该定理,而后介绍其应用。

##### Itô 定理 1:

假设某随机变量  $X$  的变动过程可由 Itô Process 表示如下:

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW \quad (13)$$

此处:  $dW$  代表 Brownian Motion 或可以  $dz$  代表。

令  $f(X, t)$  为随机变量  $X$  及时间  $t$  的函数, 亦即  $f(X, t)$  代表标的  $X$  的某一种衍生性商品价格, 诸如买权、卖权、期货价格等等。则该衍生性商品的价格变动过程可表示如下:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot b dW \quad (14)$$

此处:  $f = f(X, t)$ ,  $a = a(X, t)$ ,  $b = b(X, t)$

证明

在间断时间下, (13) 成为

$$\Delta X = a(X, t) \Delta t + b(X, t) \Delta W \quad (15)$$

$$\Delta W = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \text{ (由 (3) 而来)}$$

利用泰勒展开式,  $f(X, t)$  可以展开如下:

$$\begin{aligned} \Delta f = & \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} \Delta X \cdot \Delta t \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

在连续时间下 ( $\Delta t \rightarrow 0$ ),

$$\Delta X \cdot \Delta t \rightarrow 0 \quad (\because dt^{3/2} = 0 = dt^2, \text{ 当 } \Delta t \rightarrow 0)$$

$$\Delta t^2 \rightarrow dt^2 = 0 \quad (\text{当 } \Delta t \rightarrow 0)$$

因此, 泰勒展开式中的  $\Delta X \cdot \Delta t$ ,  $\Delta t^2$  及其他高次项, 在连续时间下皆可视为零。公式 (16) 中, 我们只要计算前 3 项即可。首先

$$\begin{aligned} \Delta X^2 = & b^2 \varepsilon^2 \Delta t + \text{其他比 } \Delta t \text{ 高次的项目} \\ & (\text{即 } \Delta t^{3/2}, \Delta t^2, \Delta t^3, \text{等}) \end{aligned}$$

则  $Var(\Delta X^2) = (b^2 \Delta t)^2 \cdot Var(\varepsilon^2) \rightarrow 0$  当  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\because \Delta t^2 \rightarrow 0$ )

因此, 在连续时间下 ( $\Delta t \rightarrow 0$ ),  $\Delta X^2$  的方差收为零 (即不呈现随机变动)。故  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta X^2 = b^2 dt$  [ 即  $\Delta X^2$  收敛至  $b^2 dt$ , 当  $\Delta t \rightarrow 0$ ; 此外,  $E(\Delta X^2) = b^2 \Delta t E(\varepsilon^2) = b^2 dt$ , 当  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $E(\varepsilon^2) = 1 = Var(\varepsilon)$  ]。所以,

当  $\Delta t \rightarrow 0$ , (16) 变为

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dX^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} (a dt + b dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (a dt + b dW)^2 \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} b dW, \text{ 这就是 (14)。} \end{aligned}$$

例：令股价的变动过程如同(8)所示。设  $f = \ln S$ ，它代表一个对数合约(Log Contract)。该合约的随机变动过程可由 Itô Lemma 求得。首先计算相关微分如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

将上面微分代入 Itô Lemma(14), 即得对数合约  $\ln S$  的随机变动过程如下

$$\begin{aligned} d\ln S &= \left( 0 + \left( \frac{1}{S} \right) \mu S + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2} \right) (\sigma S)^2 \right) dt + \left( \frac{1}{S} \right) (\sigma S) dW \\ &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW \end{aligned} \quad (17)$$

$\ln S$  的随机变动程式(17)代表它的瞬间变量  $d\ln S$  呈现正态分布, 其期望值为  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt$ , 方差与股票报酬率的方差  $\sigma^2 dt$  相同。也就是

$$d\ln S \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right] \quad (18)$$

在间断时间( $\Delta T$ )下,

$$\Delta \ln S_T \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right]$$

此处:时间是从现在  $t$  至未来时间  $T$ 。

因为  $\Delta \ln S_T = \ln S_T - \ln S_t$ , 因此

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma^2\tau\right], \tau = T - t$$

或

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \sigma^2\tau\right] \quad (19)$$

也就是股票的对数价格概率分布是正态分布,其期望值为  $\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$ , 方差为  $\sigma^2\tau$ 。

公式(19)除了代表对数价格变动过程外,它亦隐含股价的动态变动过程(The Dynamics of the Stock Price)。只要将(17)的两边进行积分即可求得:

$$\int_t^T d\ln S = \int_t^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) du + \int_t^T \sigma dW$$

$$\ln S \Big|_t^T = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)$$

$$\ln(S_T/S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\Delta W_T, \Delta W_T = W_T - W_t$$

$$\therefore S_T = S_t \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\Delta W_T\right] \quad (20)$$

公式(20)说明:股价从  $S_t$  开始,将以指数函数的比率成长,其中一部分的成长是随时间而变,但不是随机变动[以  $e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau}$  代表],另一部分的成长是无法预测,且呈现随机变动[由  $e^{\sigma\Delta W_T}$  代表]。

例:令股价变动过程如同(8)所示。股票远期契约的价格可以表示为  $f(S, t) = S - Ke^{-r\tau}$ ,  $\tau$  = 尚存到期日( $T - t$ )。求解该远期契约的价格变动程式(df)。首先求出偏微分如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r\tau}, \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

利用 Itô 定理,

$$df = \left(-rKe^{r(T-t)} + 1 \cdot \mu S + \frac{1}{2}0\right)dt + 1 \cdot \sigma S dW$$

$$= (\mu S - rKe^{-rt})dt + \sigma SdW$$

例：股票的远期价格可表示为  $f(S, t) = Se^{r(T-t)}$ ，求解远期价格的变动程式。先求偏微分如下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}, \frac{\partial f}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

远期价格的随机变动过程为：

$$\begin{aligned} df &= \left( -rSe^{r(T-t)} + e^{r(T-t)} \cdot \mu S + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) dt + e^{r(T-t)} \sigma S dW \\ &= (-rf + \mu f)dt + \sigma f dW, f = Se^{r(T-t)} \\ &= (\mu - r)fdt + \sigma f dW \end{aligned}$$

### Itô 定理 2:

假设  $X_1$  及  $X_2$  的变动过程如下：

$$dX_1 = a_1(X_1, t)dt + b_1(X_1, t)dW_1 \quad (21)$$

$$dX_2 = a_2(X_2, t)dt + b_2(X_2, t)dW_2 \quad (22)$$

令  $f = f(X_1, X_2, t)$  为  $X_1$  及  $X_2$  的函数或两标的物  $X_1$  及  $X_2$  的合约（或衍生性商品）。则该合约的价格变动程式如下：

$$\begin{aligned} df &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} a_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} b_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} b_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} \rho_{12} b_1 b_2 \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} b_1 dW_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} b_2 dW_2 \right) \end{aligned} \quad (23)$$

此处：

$$a_i = a_i(X_i, t), i = 1, 2$$

$$b_i = b_i(X_i, t), i = 1, 2$$

$$\rho_{12} = \text{Corr}(dX_1, dX_2)$$

公式(23)的证明与 Itô Lemma 1 的证明很相似。将  $f(X_1, X_2, t)$  以泰勒展开式表示：

$$\begin{aligned}\Delta f = & \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} (\Delta X_1)^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} (\Delta X_2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} \Delta X_1 \cdot \Delta X_2 + \cdots\end{aligned}\quad (24)$$

再利用在间断时间下的  $\Delta X_1$  及  $\Delta X_2$  定义, 以及  $dt dW_1 = 0$ ,  $dt dW_2 = 0$ ,  $dt^{3/2} = 0$  及其他高次项为零, 则在 Mean-Square Convergence 下, (23) 即可证明成立, 也就是,

$$\Delta X_i = a_i \Delta t + b_i \epsilon \sqrt{\Delta t}, \quad i = 1, 2$$

且  $Var(\Delta X_i^2) = b_i^2 \epsilon_i^2 (\Delta t)^2 \rightarrow 0$ , 当  $\Delta t \rightarrow 0$

故  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta X_i^2 = b_i^2 dt$  (即当  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta X_i^2$  不呈现随机变动, 且等于  $b_i^2 dt$ )。

同样的,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta X_i \Delta X_j = \rho_{ij} b_i b_j dt$

则当  $\Delta t \rightarrow 0$ , (24) 即可化简成为 (23)。

由两个随机变量的 Itô Lemma 可延伸至  $n$  个随机变量的 Itô 定理如下:

令

$$dX_i = a_i(X_i, t)dt + b_i(X_i, t)dW_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

设  $f = f(X_1, X_2, \dots, X_n, t)$ , 则

$$\begin{aligned}df = & \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} a_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \rho_{ij} b_i b_j \right) dt \\ & + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} b_i dW_i \right)\end{aligned}\quad (26)$$

若令  $n = 2$ , 则 (26) 缩减成为 (23)。

例: 外国股票价格的随机过程为

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dz \quad (27)$$

汇率的随机变动过程为

$$\frac{dX}{X} = \mu_X dt + \sigma_X dW \quad (28)$$

令  $f = f(S, X) = SX$  为以台币计价的外国股票, 比如  $S$  是美国 IBM 股价,  $X = X(\text{NT\$}/\$)$  = 以台币计价的每一美元 (即美元的台币价值)。

则外国股票以本地货币计价的价格随机过程  $df$  可由 Itô 定理求解如下:

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu_S S + \frac{\partial f}{\partial X} \mu_X X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma_S^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma_X^2 X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X SX \right] dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma_S S dz + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma_X X dW \quad (29)$$

对  $f(S, X) = SX$  进行偏微分如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \frac{\partial f}{\partial S} = X, \frac{\partial f}{\partial X} = S, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} = 1$$

将以上偏微分式代入(29), 并简化即得

$$\frac{df}{f} = (\mu_S + \mu_X + \sigma_{SX}) dt + \sigma_S dz + \sigma_X dW \quad (30)$$

$$\sigma_{SX} = \rho_{SX} \sigma_X \sigma_S$$

## 参 考 文 献

- L. Arnold, Stochastic Differential Equations, "Theory and Applications, John Wiley & Sons", 1974.
- D. R. Cox, and H. D. Miller, "The Theory of Stochastic Processes", London: Chapman & Hall, 1965.
- M. A. H. Dempster and S. R. Pliska, "Mathematics of Derivative Securities", Cambridge University Press 1997.
- I. Karatzas, and S. E. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", 2nd Ed. . Springer-Verlag 1991.



## 第二章 Black-Scholes 选择权模型

### 一、模型假设

Black-Scholes 模型采用下列假设：

1. 股价变动过程可由 Itô Process 代表：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

2. 股票交易连续进行,且股票具有可分割性(即可交易任何比率的股票)。
3. 交易费用及税不存在。
4. 可无限放空股票及充分利用放空得来的资金。
5. 无风险利率存在。
6. 标的股在衍生性商品的存续时间不分布现金股息。

### 二、Black-Scholes 欧式买权的评价

股价的变动过程为

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw \quad (1)$$

令  $f(S, t)$  代表标的股的衍生性商品价格。则该衍生性商品的价格变动过程,可由 Itô Lemma 表示如下：

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dw \quad (2)$$

在间断时间  $\Delta t$  下, (1) 及 (2) 成为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta w \quad (3)$$

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta w \quad (4)$$

此处:  $\Delta S$  代表在小时段  $\Delta t$  内, 股价的变量。

$\Delta f$  代表在小时段  $\Delta t$  内, 衍生性商品价格的变量。

假设某发行券商发行一单位的衍生性商品(以  $-f$  代表), 其风险应由持有  $\Delta$  股的标的股票来避险。则该避险组合可表示为:

$$H = -f + \Delta S = -f + \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S, \quad \Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad (5)$$

我们将证明该避险组合为无风险如下:

首先在  $\Delta t$  的时段下, 该组合的变量为

$$\begin{aligned} \Delta H &= -\Delta f + \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) \Delta S \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta w \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta w) \quad (\text{将 } \Delta f \text{ 及 } \Delta S \text{ 代入}) \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (\text{化简之}) \end{aligned} \quad (6)$$

公式(6)代表, 当时间移动  $\Delta t$ 、且股价变动  $\Delta S$ , 该组合的变量  $\Delta H$  却不含有随机项  $dW$ 。这意味该组合确是无风险的避险组合。因此在  $\Delta t$  时间下, 其报酬率等于无风险报酬  $H \cdot r \Delta t$ ,  $r$  为无风险利率。故

$$\Delta H = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = H r \Delta t$$

$$= \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) r \Delta t \quad (7)$$

重新整理安排(7)得求解衍生性商品价格的偏微分方程式如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} r S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r f \quad (8)$$

公式(8)就是 Black-Scholes 的偏微分方程式。解出(8)的答案  $f(s, t)$  即是衍生性商品的评价模型。但(8)却有很多答案,而不是只有一个答案。只有在设定某一临界条件(Boundary Conditions)下,(8)才有唯一的解答(即唯一的评价公式)。临界条件代表衍生性商品在到期时的现金流量(the Final Payoff)。就欧式买权而言,其到期现金流量为  $C_T = \max(S_T - K, 0)$ , 此处  $S_T$  = 到期股价,  $K$  = 履约价格。而欧式卖权则是  $P_T = \max(K - S_T, 0)$ 。由不同衍生性商品的到期现金流量作为临界条件,而解出偏微分(8)的答案即是该衍生性商品的评价公式。

在尚未对(8)进行解答欧式买权及卖权的评价模型前,公式(8)表示  $\Pi$  是无风险避险组合,它是在极微小的时段内(Infinitesimally Small Interval,  $dt$ )才是无风险,而不是永远无风险。当时间一移动,股价也变动,原来避险比率  $\Delta = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right)$  已不是适当的避险比率,必须马上修正调整,获得新的避险比率。如此,避险组合才能再度回归无风险部位,并可规避下一小时段股价变动所带来的风险。因此,必须在动态连续修正调整避险比率之下(Dynamic Hedging),避险组合才会是无风险组合。

在下一段,我们将首先对(8)求解欧式买权的评价公式,而后再求解欧式卖权的评价公式。欧式买权的价格公式可由下列偏微分方程式求得:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} r S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r C, C = C(S, t) \quad (9)$$

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \text{ (临界条件)}$$

这个偏微方程式正是 Feynman-Kac 公式的一种形式,其答案正是

$$C = C(S, t) = e^{-rt} E[\max(S_T - K, 0)] \quad (10)$$

这相当于,在风险中立下将买权到期现金流量的期望值,以无风险利率  $r$  折现。因此,求解(10)式右边的期望值,即是欧式买权  $C$  的评价模型:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \quad (11)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \tau = T - t \quad (12)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (13)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(dS/S)} = \text{股票报酬率的瞬间标准差}$$

我们证明(11)如下:

Black-Scholes 的假设:股价呈现对数正态分布。因此,  $d(\ln S)$  与  $dS/S$  同是正态分布。根据统计学,正态分布  $(\ln S_T)$  的均值与方差分别为

$$E(\ln S_T) = \ln S + \mu T \quad (14)$$

$$\text{Var}(\ln S_T) = \sigma^2 T, T = \tau \text{ (令 } t = 0) \quad (15)$$

此外,由统计理论可知,对数正态分布  $S_T$  的均值应是

$$E(S_T) = S \exp(\mu T + \sigma^2 T/2) \quad (16)$$

以上 3 个公式是由数理统计而来。

在风险中立环境下,所有资产的期望报酬应是无风险利率。以  $r$  代表每一极微小时间单位(即瞬间  $dt$ )下的(复利)无风险利率。因此,在买权契约期间内,标的股票的期望报酬率应是

$$E(S_T/S) = e^{rT} \quad (17)$$

比较公式(16)与(17),我们可得:

$$e^{rT} = \exp(\mu T + \sigma^2 T/2)$$

这也就是

$$\mu = r - \sigma^2/2 \quad (18)$$

在风险中立环境下,买权在期初的价值应是到期日价值的现值,折现率是连续无风险折现率  $r$ 。故买权价值可表示为

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} E[\text{Max}(0, S_T - K)] \\ &= \begin{cases} e^{-rT} E(S_T - K), & \text{若 } S_T > K \\ 0, & \text{若 } S_T \leq K \end{cases} \end{aligned}$$

此处:  $\text{Max}(0, S_T - K)$  代表买权在到期时的价值,  $K$  = 履约价格,  $E(\cdot)$  代表期望值。所以,买权的价值可进一步表示为:

$$C = e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K) f(S_T) dS_T \quad (19)$$

此处:

$$\begin{aligned} f(S_T) &= \frac{1}{S_T} \frac{1}{\sigma \sqrt{T} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln S_T - E \ln S_T)^2}{2\sigma^2 T}\right] \\ &= \text{对数正态分布函数} \end{aligned}$$

为简化符号,我们令  $\ln S_T = s$ ,  $E(\ln S_T) = \bar{s}$ ,  $u = \sigma \sqrt{T}$ 。利用公式(19)与对数正态分布函数,公式(19)内的右边积分部分可分解成为两个积分;也就是

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} \int_K^{\infty} \frac{1}{u \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(s - \bar{s})^2}{2u^2}\right] dS_T \\ &\quad - X e^{-rT} \int_K^{\infty} \frac{1}{S_T} \frac{1}{u \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(s - \bar{s})^2}{2u^2}\right] dS_T \quad (20) \end{aligned}$$

公式(20)的第一项其实就是 Black-Scholes 模型内的第一项,而第二项就是 Black-Scholes 模型内的第二项。我们证明如下:

公式(20)的第一项

$$= S \exp(-\ln S) e^{-rT} \int_K^\infty \exp(\ln S_T) \frac{1}{S_T} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(s-\bar{s})^2}{2u^2}\right] dS_T$$

$$\text{注: } S \cdot \exp(-\ln S) = 1, \exp(\ln S_T) = S_T$$

$$= S \int_K^\infty \frac{1}{S_T} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp(\ln S_T - \ln S - rT) \exp\left[-\frac{(s-\bar{s})^2}{2u^2}\right] dS_T \quad (21)$$

公式(21)内第一个指数函数内的项目可重新改写为:

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S - rT &= s - (\bar{s} - \mu T) - rT, \text{ 利用公式(14)} \\ &= s - [\bar{s} - (r - \sigma^2/2)T] - rT, \text{ 利用公式(18)} \\ &= s - (\bar{s} + \sigma^2 T/2) = s - (\bar{s} + u^2/2) \end{aligned}$$

再次,将此项目与公式(21)第二指数函数内的项目合并,并以完全平方法改写成为:

$$\begin{aligned} &s - \left(\bar{s} + \frac{u^2}{2}\right) - \frac{(s-\bar{s})^2}{2u^2} \\ &= \frac{1}{2u^2} \left[ 2su^2 - 2u^2 \left(\bar{s} + \frac{u^2}{2}\right) - (s-\bar{s})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2u^2} [2su^2 - 2u^2\bar{s} - u^4 - s^2 + 2s\bar{s} - \bar{s}^2] \\ &= \frac{1}{2u^2} [- (\bar{s}^2 + 2u^2\bar{s} + u^4) + 2s(u^2 + \bar{s}) - s^2] \\ &= \frac{1}{2u^2} [- (\bar{s} + u^2)^2 + 2s(\bar{s} + u^2) - s^2] \\ &= \frac{-1}{2u^2} [s - (\bar{s} + u^2)]^2 \end{aligned}$$

将之代入公式(21)而得第一项积分:

$$S \int_K^\infty \frac{1}{S_T} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(s - (\bar{s} + u^2))^2}{2u^2}\right] dS_T \quad (22)$$

然后,利用替代变量法(Jacobian Transformation)简化(22)。故我

们令

$$y = \frac{s - (\bar{s} + u^2)}{u}, \quad (s = \ln S_T)$$

$$\text{所以, } dy = \frac{1}{u} ds = \frac{1}{u} d(\ln S_T) = \frac{1}{u S_T} dS_T$$

$$\begin{aligned} y \text{ 的积分下限} &= \frac{\ln K - [E(\ln S_T) + \sigma^2 T]}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln K - [(\ln S + \mu T) + \sigma^2 T]}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln K - \ln S - (r - \sigma^2/2)T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= -\frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= -d_1 \end{aligned}$$

将  $dy$  与  $y$  的积分上限代入(22)即得

$$\begin{aligned} S \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy &= S[1 - N(-d_1)] = SN(d_1) \\ [1 - N(-d_1) &= N(d_1)] \end{aligned} \quad (23)$$

所以,我们已完成证明公式(20)的第一项,也就是 Black-Scholes 模型的第一项。对公式(20)的第二项,我们也可以类似的方法证明。首先,我们令

$$\begin{aligned} w &= (s - \bar{s})/u \\ dw &= \frac{1}{u S_T} dS_T \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} w \text{ 的积分下限} &= \frac{\ln K - E(\ln S_T)}{u} \\ &= \frac{\ln K - (\ln S + \mu T)}{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ln K - \ln S - (r - \sigma^2/2)T}{u} \\
 &= \frac{\ln S - \ln K + (r + \sigma^2/2)T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\
 &= -d_1 + \sigma\sqrt{T} = d_2
 \end{aligned}$$

将  $dw$  与  $w$  的积分下限代入公式(20)的第二项积分即成为:

$$\begin{aligned}
 Ke^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-w^2/2) dw &= Ke^{-rT} [1 - N(-d_2)] \\
 &= Ke^{-rT} N(d_2)
 \end{aligned}$$

注:  $1 - N(-d_2) = N(d_2)$

所以,公式(20)的第二项也就是 Black-Scholes 模型的第二项。我们已完成证明 Black-Scholes 模型的评价公式如下:

$$C = S \cdot N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

### 三、欧式卖权的评价模型

一旦欧式买权的评价模型(11)求解后,欧式卖权的评价模型可以类似方法求解,并将(9)内的到期现金流量改成卖权的到期现金流量  $P_T = \max(K - S_T, 0)$ 。欧式卖权的评价公式与欧式买权公式(10)内的  $S$ ,  $K$ ,  $d_1$  及  $d_2$  分别改成负值  $-S$ ,  $-K$ ,  $-d_1$  及  $-d_2$ , 即是欧式买权的评价模型如下:

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (24)$$

我们可将买权及卖权的评价公式并合成一个综合公式如下:

$$C(\text{or } P) = \phi SN(\phi d_1) - \phi Ke^{-rT} N(\phi d_2) \quad (25)$$

若  $\phi = +1$ , 则是欧式买权的评价公式(11)。



若  $\phi = -1$ , 则是欧式卖权的评价公式(24)。

#### 四、避险参数

观察 Black-Scholes 选择权评价模型可知,买权(及卖权)价值是由 5 种变量所决定,包括标的股价( $S$ ),履约价( $K$ ),无风险利率( $r$ ),到期日( $T$ )及标的股报酬率标准差( $\sigma$ )。这 5 个变量的变动会影响买权(及卖权)价值的变动。利用偏微分,我们可计算,当某一变量变动时,买权(或卖权)价值的变动值。我们介绍如下:

##### 一、Delta ( $\partial C / \partial S$ )

它代表当股价变动一单位(或一元)时,造成买权价值的变量。以公式表示如下:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0 \quad (26)$$

证明

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-rt} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial S} \quad (27)$$

最后两项相等,因此相减变成零:

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} \quad (\text{由(13)的定义})$$

$$\begin{aligned} Ke^{-rt} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} &= Ke^{-rt} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_2^2/2} \right) = \frac{Ke^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2)}] \\ &= Ke^{-rt} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} e^{d_1\sigma\sqrt{t} - d^2/2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \\ &= Ke^{-rt} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} e^{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)t - d^2/2} \end{aligned}$$

$$= Ke^{-rt} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{S}{K} e^{rt} = S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$$

∴ (27) 的最后两项相等, 相加为零。也就是 (26) 成立。

此外,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial S} &= -N(-d_1) < 0 = -(1 - N(d_1)) \\ &= N(d_1) - 1 = \text{call delta} - 1 < 0 \end{aligned} \quad (28)$$

## 二、Gamma ( $\partial^2 C / \partial S^2$ )

Gamma 代表, 当股价等于  $S$  的价位时, 买权价值线 (或函数) 的弧度 (Curvature), 也是 Delta 变动的敏感度。Gamma 愈大, 代表当股价变动时, Delta 的变动愈大, 避险也就愈困难。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} N(d_1) = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \text{ (利用买卖权价平关系)} \end{aligned} \quad (29)$$

此处:  $n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2}$ , 标准正态分布函数。

## 三、Vega ( $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-rt} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= S\sqrt{\tau}n(d_1) > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

当标的股波动度  $\sigma$  增加 (或减少) 时, 买权 (卖权) 的价值也增加 (或减少)。

此外,

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} (C - S + Ke^{-rt}), \text{ 利用买卖权价平关系}$$

$$= \frac{\partial C}{\partial S} = S\sqrt{\tau}n(d_1) > 0 \quad (31)$$

买卖权的 Gamma 相等。

#### 四、Rho ( $\partial C/\partial r$ )

Rho 代表,当利率变动时,对选择权价格的影响。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial r} &= S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial r} + Ke^{-r\tau} N(d_2) - Ke^{-r\tau} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial r} \\ &= \tau Ke^{-r\tau} N(d_2) > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

因此,买权的价值随着利率水准的上升(或下降)而上升(或下降)。  
此外,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(C - S + Ke^{-r\tau}) \\ &= \frac{\partial C}{\partial r} - \tau Ke^{-r\tau} = -\tau Ke^{-r\tau} N(-d_2) < 0 \end{aligned} \quad (33)$$

此处:  $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$

因此,卖权的价值随着利率水准的上升(或下降)而下降(或上升)。

#### 五、Theta ( $\partial C/\partial t$ )

它代表买权价值随着时间消失而消失的价值。

$$\begin{aligned} \theta_c &= \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau} \\ &= -\left[ S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \tau} + Kre^{-r\tau} N(d_2), \tau = T - t - Ke^{-r\tau} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \tau} \right] \\ &= -\left[ S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \frac{\partial d_1}{\partial \tau} + Kre^{-r\tau} N(d_2) - Ke^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_2^2/2} \frac{\partial d_2}{\partial \tau} \right] \\ &= -\left[ \frac{S\sigma n(d_1)}{2\sqrt{\tau}} + Kre^{-r\tau} N(d_2) \right] < 0, \end{aligned} \quad (34)$$

此外,

$$\begin{aligned}
 \theta_p &= \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \tau}(C - S + Ke^{-r\tau}) \\
 &= -\left[\frac{\partial C}{\partial \tau} - rKe^{-r\tau}\right] \\
 &= -\frac{S\sigma n(d_1)}{2\sqrt{\tau}} + Kre^{-r\tau}(1 - N(d_2)) \\
 &= -\frac{S\sigma n(d_1)}{2\sqrt{\tau}} + Kre^{-r\tau}N(-d_2) \leq 0 \quad (35)
 \end{aligned}$$

当标的股价  $S$  下跌, 且很低于  $K$  时 (即深价内时), 即成为正值。但若股价上升, 且很高于  $K$  时 (即深价外时),  $\theta_p$  成为负值。

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (May-June 1973), p. 637—659.
- F. Black, "Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities", *Financial Analysts Journal*, 31 (July-August 1975), p. 36—41, 61—72.
- R. Blattberg, and N. Gonedes, "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, 47 (April 1974), p. 244—280.
- J. C. Cox, and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3(1976), p. 145—166.
- Fama E. F., "The Behavior of Stock Prices", *Journal of Business*, 38 (January 1965), p. 34—105.
- R. Geske, "A Note on an Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 7(1979), p. 357—380.
- R. Geske, "Comments on Whaley's Note", *Journal of Financial Economics*, 9 (June 1981), p. 213—215.
- S. J. Kon, "Models of Stock Returns—A Comparison", *Journal of Finance*, 39

---

(March 1984), p. 147—165.

R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973), p. 141—183.

M. Richardson, and T. Smith, "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns", *Journal of Business*, 66(1993), p. 295—321.

C. W. Smith, "Option Pricing: A Review", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), p. 3—54.

### 第三章 Merton 选择权模型(附加考量 现金股息)及外汇选择权

#### 一、模型推导

Black-Scholes 模型并未考虑标的股支付现金股息。Merton 将之延伸至标的股支付现金股息下的选择权评价模型。除了 Black-Scholes 的假设条件外,另假设标的股在选择权的有效期内连续支付(现金)股息  $q$ ,  $q$  是股价的某一确知百分比( $q$  是连续现金股息, Continuous Dividend)。则在间断时间下,股价的随机过程可表示为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W \quad (1)$$

选择权是标的股价  $S$  及时间  $t$  的函数,以  $f(S, t)$  代表选择权的价格(或价值)。根据 Itô 定理,选择权价格的随机过程为

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW \quad (2)$$

在间断时间下(2)成为

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW \quad (3)$$

选择权发行商构建避险组合  $\Pi$  如下:

$$\Pi = -f + \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S \quad (4)$$

此处:  $\frac{\partial f}{\partial S}$  代表避险所需买进的股数。

正如前一章 Black-Scholes 模型的推导,已证明该组合在极微小时段为(An Infinitesimally Small Interval,  $dt$ )是无风险组合。以公式表示为

$$\Delta H = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (\text{即前一章的公式(6)}) \quad (5)$$

在  $\Delta t$  时段内,该组合价值的变动包括二项:

1. 股息的分派,分派额为  $q \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S \Delta t$ 。此处  $\left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S$  代表持股价值, $q$  是每单位时间  $\Delta t$  的股息。

2. 该组合的资本利得或损失(Capital Gain or Loss),已表示于公式(5)。

因此,在  $\Delta t$  时段内,该组合价值的总变量  $\Delta H^*$  为

$$\begin{aligned} \Delta H^* &= \Delta H + q \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S \Delta t \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - q \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S \right) \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

因该组合在  $\Delta t$  时段内是无风险,故其总变量应等于无风险报酬  $r H \Delta t$ 。故

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - q \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) S \right) \Delta t &= r H \Delta t \\ &= r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t \end{aligned} \quad (7)$$

简化(7)即成为求解选择权的偏微分方程式如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} (r - q) S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \quad (8)$$

在分派股息下,(8)与不分派股息下的偏微分方程式之差异仅在于  $\frac{\partial f}{\partial S}$  内的  $(r - q)$  及  $r$  (见前一章公式(8))。因此求解欧式买权及卖权的方

法相同。

求解欧式买权:偏微分方程式为

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}(r-q)S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rC \\ C_t = \max(S_T - K, 0) \end{cases} \quad (9)$$

按照 Feynman-Kac 公式, (9) 式的解答即是欧式买权的评价模型如下:  
(其推导与前 Black-Scholes 模型相同)

$$\begin{aligned} C &= e^{-(r-q)(T-t)} E[\max(S_T - K, 0)] \\ &= S e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned} \quad (10)$$

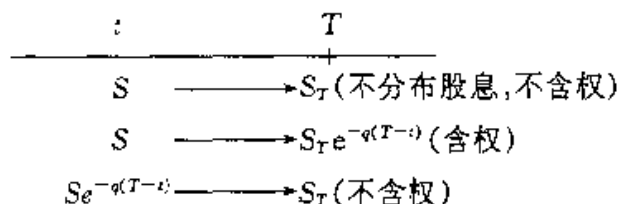
此处:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (11)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(S/K) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(dS/S)} = \text{股票报酬率的瞬间标准差}$$

以上 Merton 模型的推导也可以较直观的方式求解。以  $S$  及  $S_T$  分别代表在无股息分布下的现在股价及到期日股价, 则在连续分布股息下, 到期日的股价应是  $S_T e^{q(T-t)}$  (含权  $e^{q(T-t)}$ )。于是, 现在的不含权股价应是  $S e^{-q(T-t)}$ 。以图表示如下:



因 Black-Scholes 模型是在无分布股息下的评价模型, 将 Black-Scholes 模型内的现在股价  $S$  改成  $S e^{-q(T-t)}$ , 即转换成为在股息分布下的 Mer-



ton 模型。所以,

$$C = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

此处:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(Se^{-q(T-t)}/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln(S/K) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(Se^{-q(T-t)}/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln(S/K) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

这正是我们在严格推导下的 Merton 模型(10)。

### 欧式卖权评价模型

在连续分布股息  $q$  下,欧式卖权的评价模型可由(10)内的  $S$ ,  $K$ ,  $d_1$  及  $d_2$  改换成负值  $-S$ ,  $-K$ ,  $-d_1$  及  $-d_2$  即成为卖权的评价模型如下:

$$p = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1) \quad (12)$$

## 二、外汇选择权模型

外汇选择权的评价模型原是由 Garman and Kohlhagen(1983)所推导。该模型也可由 Merton 模型的转换应用求解。令汇率  $S = S(\text{Rmb}/\$)$ , 代表以人民币(Rmb)计价的美元价值。因汇率  $S$  呈现随机变动,我们可以 Itô Process 来代表它的随机变动过程。设定

$C = C(S, t)$  是欧式外汇买权, 也就是美元(对人民币)的买权, 则美元是买权的标的物。美元存款连续支付无风险利率  $r_f$  (美国利率), 相当于股票连续支付现金股息。因此, 在 Merton 模型内, 只要将股息  $q$  改成外国利率  $r_f$ , 且股价  $S$  的定义改成汇率定义  $S = S(\text{Rmb}/\$)$ , 即成为 Garman 及 Kohlhagen(1983) 外汇买权的评价模型如下:

$$C = Se^{-r_f\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \quad (13)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad \tau = T - t$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(dS/S)} = \text{汇率变动百分比的瞬间标准差}$$

若是欧式外汇卖权, 则将(13)内的  $S$ ,  $K$ ,  $d_1$  及  $d_2$  改成负值的  $-S$ ,  $-K$ ,  $-d_1$  及  $-d_2$  即转变成为卖权的评价模型如下:

$$p = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - Se^{-r_f\tau}N(-d_1) \quad (14)$$

### 利率均衡论(Interest Rate Parity, IRP)与外汇选择权

利用 IRP 的观念, 外汇选择权的评价模型也可以远期外汇表示。IRP 告诉我们, 两国之间的利率差距应等于汇率的变动比率, 表示如下:

$$\frac{F}{S} = e^{(r-r_f)\tau}, \quad \tau = T - t \quad (15)$$

此处:  $F = F(\text{Rmb}/\$)$ , 美元对人民币的远期价格,

$$\therefore S = Fe^{-(r-r_f)\tau} \quad (16)$$

将(16)代入(13)即成为以远期汇率作标的欧式外汇买权的评价模型如下:

$$\begin{aligned} C &= Fe^{-(r-r_f)\tau}e^{-r_f\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \\ &= e^{-r\tau}[FN(d_1) - KN(d_2)] \end{aligned} \quad (17)$$

此处:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(Fe^{-(r-r_f)\tau}/K) + (r - r_f + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln(F/K) + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln(F/K) - \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \end{aligned}$$

外汇卖权的评价模型(14)也改写如下:

$$p = e^{-r\tau} [KN(-d_2) - FN(-d_1)] \quad (18)$$

### 三、Merton 模型的另一种推导方法

连续支付现金股息  $d$  的标的股价随机过程可表示为

$$dS = (\mu - q)Sdt + \sigma SdW \quad (19)$$

令  $c = c(S, t)$  为标的股的衍生性商品(或买权)。利用 Itô 定理,该衍生性商品(买权)的价格随机过程为

$$\begin{aligned} dc &= \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu^* S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S dz, \\ \mu^* &= \mu - q \end{aligned} \quad (20)$$

在极小时间  $\Delta t$  下, (19) 及 (20) 可改写为

$$\Delta S = \mu^* S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (21)$$

$$\Delta c = \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu^* S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (22)$$

构造避险组合如下:

$$H = -c + \left( \frac{\partial c}{\partial S} \right) S \quad (23)$$

则在极小时段  $\Delta t$  下,避险组合的变量  $\Delta \Pi$  为

$$\begin{aligned}
 \Delta \Pi &= -\Delta c + \frac{\partial c}{\partial S}(\Delta S - qS\Delta t) \text{ (连续支付股息比率 } q) \\
 &= \underbrace{-\left(\frac{\partial c}{\partial S}\mu^*S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2S^2\right)\Delta t - \frac{\partial c}{\partial S}\sigma S\Delta z}_{-\Delta c} \\
 &\quad + \frac{\partial c}{\partial S} \cdot (\mu^*S\Delta t + \sigma S\Delta z) - \frac{\partial c}{\partial S}qS\Delta t \\
 &= -\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2S^2\right)\Delta t - \frac{\partial c}{\partial S}qS\Delta t \quad (24)
 \end{aligned}$$

(24)表示  $\Pi$  是无风险组合,故

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad (25)$$

合并(24)及(25):

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2S^2\right)\Delta t - \frac{\partial c}{\partial S}qS\Delta t &= r \Pi \Delta t \\
 &= r\left(-c + \frac{\partial c}{\partial S}S\right)\Delta t
 \end{aligned}$$

简化之即可得求解衍生性商品价格的偏微分方程式如下:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rc \quad (26)$$

(26)与(9)完全一样,加上买权的临界条件,求解即是买权的评价公式(10)。

## 参 考 文 献

- K. Amin, and R. A. Jarrow, "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates", *Journal of International Money and Finance*, 10(1991), p. 310—329.
- N. Bigger, and J. Hull, "The Valuation of Currency Options", *Financial Manage-*

- ment, 12 (Spring 1983), p. 24—28.
- Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976), p. 167—179.
- J. N. Bodurtha, and G. R. Courtadon, "Tests of an American Option Pricing Model on the Foreign Currency Options Market", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22 (June 1987), p. 153—167.
- M. Brenner, G. Courtadon, and M. Subrahmanyam, "Options on the Spot and Options on Futures", *Journal of Finance*, 40 (December 1985), p. 1303—1317.
- D. M. Chance, "Empirical Tests of the Pricing of Index Call Options", *Advances in Futures and Options Research*, 1, pt. A (1986), p. 141—166.
- M. B. Garman, and S. W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983), p. 231—237.
- J. O. Grabbe, "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983), p. 239—253.
- R. C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973), p. 141—183.
- H. R. Stoll, and R. E. Whaley, "New Option Instruments; Arbitrageable Linkages and Valuation", *Advances in Futures and Options Research*, 1, pt. a (1986), p. 25—62.

## 第四章 Black 模型——期货选择权

### 一、简介

期货选择权的标的是期货。期货买权(欧式)允许持有人在买权到期时有权利买进期货,加上获得交割金额等于  $(F_T - K)$ ,  $F_T$  是买权到期时期货价格,  $K$  是买权的履约价。期货卖权则允许持有人在卖权到期时有权利出售期货,加上现金收入等于卖权履约价  $K$  减掉到期时的期货价格  $F_T$ 。

### 二、期货买权的评价

令期货价格  $F$  的随机过程为 Ito Process 如下:

$$dF = \mu F dt + \sigma F dw \quad (1)$$

期货买权价格  $c = c(F, t)$  的随机过程可由 Itô 定理表示如下:

$$dc = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial F} \mu F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial F^2} \sigma^2 F^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial F} \sigma F dw \quad (2)$$

构造避险组合  $II$  如下:

$$II = -c + \left( \frac{\partial c}{\partial F} \right) F, \quad \left( \frac{\partial c}{\partial F} \right) F = 0 \quad (3)$$

但因期初买进  $\left(\frac{\partial c}{\partial F}\right)F$  单位的期货并不支付任何成本,该组合的期初价值其实是  $\Pi = -c$ 。在时间变动  $dt$  下,该组合的变量  $\Delta \Pi$  包括两部分的变量。其一来自买权的变量  $dc$ ,其二是持有期货部位的变量  $\left(\frac{\partial c}{\partial F}\right)dF$ 。因此,组合的总变量为

$$d\Pi = -dc + \left(\frac{\partial c}{\partial F}\right)dF \quad (4)$$

$$= -\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial F}\mu F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)dt - \frac{\partial c}{\partial F}\sigma Fdw$$

$$- \left(\frac{\partial c}{\partial F}\right)(\mu Fdt + \sigma Fdw) \quad (\text{将(1)及(2)代入(4)})$$

$$= -\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)dt \quad (5)$$

(4)显示在极微小时间  $dt$  下,应组合并不含有随机项  $dw$ ,因此它是无风险避险组合。其报酬应等无风险报酬  $r\Pi dt$ 。故

$$-\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)dt = r\Pi dt$$

$$= r(-c)dt$$

所以,求解期货买权的偏微分方程式为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = rc \quad (6)$$

加上到期时买权的现金流量为

$$C_T = \max(F_T - K, 0) \quad (7)$$

偏微分方程式(7)其实是 Merton 模型偏微分方程式(见前一章公式(9)),当  $r=q$  时的一种特别程式。因此,Merton 模型可应用于期货买权的评价模型,并令  $r=q$  及将  $S$  改成  $F$  即可获得期货买权的评价模型如下:

$$\begin{aligned}
 c &= Fe^{-qr}N(d_1) - Ke^{-rr}N(d_2) \\
 &= e^{-rr}[FN(d_1) - KN(d_2)], r = q
 \end{aligned} \tag{8}$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln(F/K) - (\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(dF/F)} = \text{期货报酬率的瞬间标准差}$$

### 三、期货卖权的评价

期货卖权的评价公式可根据它的到期现金流量进行推导。或可将(8)的  $F$ ,  $K$ ,  $d_1$  及  $d_2$  正负号对调, 则可获期货卖权的评价公式如下:

$$p = e^{-rr}[KN(-d_2) - FN(-d_1)] \tag{9}$$

其他变量的定义与(8)相同。



## 第五章 Martingale 评价方法

### 一、必要的数学基础

在第二章我们已介绍 Black-Scholes 评价模型。求解偏微分方程式的过程很繁琐且困难。在很多情况下甚至无法得到封闭解。幸好 Cox 及 Ross(1976)与 Harrison 及 Kreps(1979)介绍另一种求解衍生性商品评价的方法,称为概率平赌评价方法(the Martingale Pricing Method)。在 Martingale(概率平赌)评价方法下,一种证券(或衍生性商品)的价格可经由折现该证券未来期望现金流量,且期望值折现可在风险中立下进行。Martingale 评价方法比偏微分方程式简单,且不会涉及复杂的积分。许多偏微分方程式不能求解的问题,经由 Martingale 评价方法都可迎刃而解。Martingale 评价方法是研习现代金融工程的学生及实务界人士所不可欠缺的新数学工具。在本章中,我们将介绍 Martingale 评价方法,以及如何操作及求解新金融商品的评价模型。

#### 1. 在风险中立下,资产价格随机过程

Black-Scholes 模型所采用的资产价格随机过程是一种 Itô Process 如下:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW^P \quad (1)$$

此处: $dW^P$  代表在概率测度  $P$  下的 Brownian Motion,  $P$  是风险环境下的概率测度。

若标的资产支付连续股息率  $q$ , 则(2)成为

$$\frac{dS}{S} = (\mu - q)dt + \sigma dW^P \quad (2)$$

公式(2)可转换成为在风险中立下的资产价格随机过程:

令

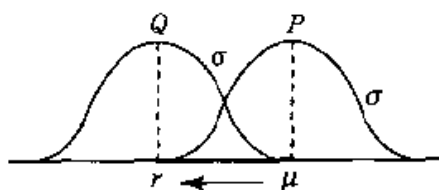
$$dW^P = dW^Q - \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) dt \quad (3)$$

此处:  $dW^Q$  代表在风险中立下的 Brownian Motion,  $Q$  是风险中立概率测度, 或称等价平赌概率测度 (Equivalent Martingale Measure)。

将(3)代(2)即得在风险中立下报酬率(或价格变动百分比)的价格随机过程如下:

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma dW^Q \quad (4)$$

比较(2)及(4)可知, 在风险中立下, 原来的  $\mu$  已被无风险利率  $r$  取代, 但原来标的资产的波动度 (Volatility)  $\sigma$  并未受到概率测度转换的影响。概率测度由  $P$  转换成  $Q$  (即由有风险环境转换成风险中立环境) 的唯一影响只是资产报酬率概率分布的期望值  $\mu$  转换成  $r$  (也就是其坐标往下移), 但并不改变资产原来的波动度  $\sigma$ 。也就是, 整体资产概率分布往无风险利率  $r$  的坐标移动而已。表示如下:



## 2. 在风险中立下, 未来资产价格的动态过程 (The Dynamics of the Asset Price)

因(2)是在原来概率测度  $P$  下的价格随机变动过程, 我们已知:

$$d \ln S_t = \left( \mu - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t^P \quad (5)$$

因此, 标的资产的价格动态过程为

$$S_T = S \exp \left[ \left( \mu - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \Delta W_T^P \right] \quad (6)$$

此处:  $S$  代表标的资产的现在价格 ( $t = 0$ )

$S_T$  代表在未来时间  $T$  的标的价格

$\Delta W_T^P = W_T^P - W_0^P$  代表在  $P$  测度下 Brownian Motion  $W^P$  从时间 0 至  $T$  的增量(或变量)。

$$\Delta W_T^P \sim N^P(0, T)$$

在风险中立下(即在  $Q$  测度下),  $\ln S_t$  的随机变动过程成为

$$d \ln S_t = \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \Delta W_t^Q \quad (7)$$

注: 与(5)不同之处, 只是  $\mu$  已被  $r$  取代。

因此在风险中立下( $Q$  测度下), 标的资产价格的动态过程为

$$S_T = S \exp \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \Delta W_T^Q \quad (8)$$

此处:  $\Delta W_T^Q = W_T^Q - W_0^Q$  代表在  $Q$  测度下, Brownian Motion  $W^Q$  的变量。

$$\Delta W_T^Q \sim N^Q(0, T)$$

### 3. 在风险中立( $R$ 测度)下, 未来资产价格的动态过程

在(3)中, 我们将原来  $P$  测度转换成风险中立  $Q$  测度。我们也可再将风险中立  $Q$  测度转换成风险中立的另一种测度  $R$ , 如此有利于以后求解评价的方便。

令

$$dW^Q = dW^R + \sigma dt \quad (9)$$

(或  $dW^R = dW^Q - \sigma dt$ , 它的理论基础将在下一节介绍)。

此处:  $\sigma dt$  不是随机项, 不会改变风险中立测度的性质。

将(9)代入(4)及(7)即得在风险中立( $R$  测度)下的资产随机变动过程(10)及  $\ln S_T$  的随机变动过程(11)如下:

$$\frac{dS}{S} = (r - q + \sigma^2)dt + \sigma dW^R \quad (10)$$

$$d \ln S = (r - q + \sigma^2/2)dt + \sigma dW^R \quad (11)$$

由(11)可进而求解在风险中立  $R$  测度下, 标的资产价格的动态过程为

$$S_T = S \exp[(r - q + \sigma^2/2)T + \sigma \Delta W_T^R] \quad (12)$$

此处:  $\Delta W_T^R = W_T^R - W_0^R$  代表在  $R$  测度下 Brownian Motion  $W^R$  的变量。

$$\Delta W_T^R \sim N^R(0, T)$$

## 二、Girsanov 定理

首先, 我们将 Girsanov Theorem 叙述如下, 再说明如何应用该定理。若  $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt\right)\right] < \infty$ , 并令

$$\zeta_T = \exp\left(\int_0^T \beta_t dW_t^Q - \frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt\right) \quad (13)$$

则在风险中立  $Q$  测度下, 相对于一个自然布朗讯息集合  $F_t$  (A Natural Brownian Filtration),  $\zeta_T$  是 Martingale。也就是,  $E(\zeta_T | F_t) = \zeta_t$ ,  $0 < t < T$ ; 即相对于信息集合  $F_t$ ,  $\zeta_T$  的未来最好预测是现在的  $\zeta_t$ 。具有此特性的随机过程才能称为 Martingale [详见 Karatzas 及 Shreve (1991) 与 Mikosch (1998)]。

下列等式关系(或公式)规范新测度  $R$  与原测度  $Q$  间的对等关系:

$$R(A) = \int_A \zeta_T dQ(\omega) \quad A \subset F, \omega \in A \quad (14)$$

或

$$dR = \zeta_T dQ$$

$$\frac{dR}{dQ} = \zeta_T \quad (15)$$

称为 Radon-Nikodym Derivative 或 Girsanov Factor。

也就是,在信息集合(the Filtration) $F$ 上,(新)测度 $R$ 对事件 $A$ 的衡量(或评估)是相等于测度 $Q$ 对 $A$ 的衡量。此外,在测度 $R$ 下的 Brownian Motion 可由测度 $Q$ 下的 Brownian Motion 转换,以公式表示如下:

$$dW^Q = dW^R + \beta_t dt$$

或

$$dW^R = dW^Q - \beta_t dt \quad (16)$$

而且

$$E^Q[\zeta_T I_A] = E^R[I_A], A \subset F \quad (17)$$

此处:  $I_A = \begin{cases} 1, & \text{若事件 } A \text{ 成立(或发生)} \\ 0, & \text{若事件 } A \text{ 不发生} \end{cases}$

$E^Q(\cdot)$ 代表在 $Q$ 测度下的期望值

公式(17)说明,在 $Q$ 测度下, $\zeta_T I_A$ 的期望值(较难计算)可转换在 $R$ 测度下指标函数 $I_A$ 的期望值(较容易计算)。

以上对 Girsanov 定理的介绍比较抽象,我们举例如下,以帮助读者了解该定理。

**例 1** 假设在评价时,我们必须求算

$$E^Q[S_T | S_T > K] \quad (18)$$

它是在到期( $T$ )时,股价 $S_T$ 大于履约价 $K$ 的期望值。在风险中立 $Q$ 测度下,直接求算该期望 $E^Q(\cdot)$ 较困难。可利用 Girsanov 定理转换成 $R$ 测度下的期望值。首先,在 $Q$ 测度下,

$$\begin{aligned} S_T &= S \exp[(r - q - \sigma^2/2)T + \sigma \Delta W_T^Q] \\ &= S e^{(r-q)T} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \Delta W_T^Q\right] \\ &= S e^{(r-q)T} \zeta_T \end{aligned} \quad (19)$$

此处:

$$\zeta_T = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \Delta W_T^Q\right) = \exp\left(\frac{-1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt + \int_0^T \sigma dW_t^Q\right) \quad (20)$$

此处:  $\zeta_T$  也就是(13), 且  $\beta_t = \sigma$ 。

同时因  $E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \beta_t^2 dt\right)\right) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T} < \infty$  (充分条件成立), 因此  $\zeta_T$  是 Martingale。所以, 测度  $Q$  的对等测度是测度  $R$  (The Equivalent Martingale Measure of  $Q$ )。两者的布朗运动转换关系式为:

$$dW^R = dW^Q - \beta_t dt = dW^Q - \sigma dt$$

或

$$dW^Q = dW^R + \sigma dt \quad (21)$$

公式(21)的测度转换, 由  $Q$  转换成  $R$  已在(9)介绍过。但在此, 我们强调它的理论基础。

同时期望值(18)可在  $R$  测度下求算如下:

$$\begin{aligned} E^Q[S_T | S_T > K] &= E^Q[S_T | A], \quad A = \{S_T | S_T > K\} \\ &= Se^{(r-q)T} E^Q[\zeta_T I_A] \text{ (利用(19))} \\ &= Se^{(r-q)T} E^R[I_A] \text{ (利用(17))} \\ &= Se^{(r-q)T} P_r^R(S_T > K), \quad E^R(I_A) = P_r^R(S_T > K) \\ &= Se^{(r-q)T} P_r^R(\ln S_T > \ln K) \end{aligned} \quad (22)$$

在测度  $R$  下, 我们已经知道股价  $S_T$  的动态过程(12), 因此

$$\ln S_T = \ln S + (r - q + \sigma^2/2)T + \sigma \Delta W_T^R > \ln K$$

解出

$$\begin{aligned} \Delta W_T^R &> \frac{\ln(K/S) - (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma} \\ \therefore \frac{-\Delta W_T^R}{\sqrt{T}} &\leq \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 \text{ (令)} \end{aligned} \quad (23)$$

此处:  $-\frac{\Delta W_T^R}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1)$

$$[\because -\Delta W_T^R \sim N(0, T)]$$

所以, 期望值(22)变成

$$\begin{aligned}
 E^Q[S_T | S_T > K] &= Se^{(r-q)T} P_r^R \left( -\frac{\Delta W_T^R}{\sqrt{T}} \leq d_1 \right) \\
 &= Se^{(r-q)T} N(d_1)
 \end{aligned} \tag{24}$$

此处:  $N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$  = 标准正态分布的累积概率。

若(24)再乘以  $e^{-rT}$  即是 Black-Scholes 模型的第一项(当  $q=0$ , 下一节将会介绍)。读者应将 Girsanov 定理及上面的例题加以重复了解, 以利日后求解衍生性商品的评价。

### 三、Martingale 评价方法的应用

在本节中, 我们将举例说如何应用 Martingale 方法来评价衍生性商品。首先我们应用于欧式买权的评价。

#### 例 1 欧式买权评价

$$\begin{aligned}
 C &= e^{-rT} E^Q[\max(S_T - K, 0)] \\
 &= e^{-rT} E^Q[(S_T - K)I_A]
 \end{aligned} \tag{25}$$

此处:

$$\begin{aligned}
 A &= \{S_T | S_T > K\} \\
 I_A &= \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 成立, 即 } S_T > K \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不成立, 即 } S_T \leq K \end{cases} \\
 \therefore C &= e^{-rT} E^Q[S_T I_A] - K e^{-rT} E^Q[I_A]
 \end{aligned} \tag{26}$$

(26)的第一个期望值  $E^Q[S_T | I_A]$  已在(24)得解。至于第二个期望值求解如下:

$$\begin{aligned}
 E^Q[I_A] &= P_r^Q(S_T > K) = P_r^Q(\ln S_T > \ln K) \\
 &= P_r^Q[\ln S + (r - q - \sigma^2/2)T + \sigma \Delta W_T^Q > \ln K]
 \end{aligned}$$

利用在  $Q$  测度下,  $S_T$  的动态过程(8)

$$\begin{aligned}
&= P_r^Q \left[ -\frac{\Delta W_T^Q}{\sqrt{T}} \leq \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right] \\
&= N(d_2), \text{ 也是在到期时买权会是价内的概率} \\
d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (27)
\end{aligned}$$

所以,欧式买权的评价模型为

$$\begin{aligned}
C &= e^{-rT} S e^{(r-q)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\
&= S e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (28)
\end{aligned}$$

这也就是 Merton 连续股息下的买权模型。令  $q = 0$ , 则(28)变成 Black-Scholes 买权评价模型:

$$C = S N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (29)$$

在 Martingale 评价方法下,我们得知

$N(d_2) = P_r^Q(S_T > K)$ , 到期时买权是价内的概率(在  $Q$  测度下)  
 $N(d_1) = P_r^R(S_T > K)$ , 也是到期时买权是价内的概率(但在  $R$  测度下, 见(24))

由此可见 Martingale 评价法简单容易, 比偏微分方程式的解法更简单、更容易。

**例 2** 数据选择权(Digital Options)或称二元素选择权(Binary Options)

1. 数据买权(A Digital Call, DC)

其到期现金流量为

$$DC_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_T > K \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}, X = \text{固定金额}$$

其评价为

$$\begin{aligned}
DC &= e^{-rT} E^Q[X I_A], A = \{S_T \mid S_T > K\} \\
&= X e^{-rT} E^Q[I_A]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= Xe^{-rT} P_r^Q(S_T > K) \\
&= Xe^{-rT} N(d_2) \quad (\text{见(27)})
\end{aligned} \tag{30}$$

## 2. 数据卖权(A Digital Put, DP)

其到期现金流量为

$$DP_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_T < K \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$$

其评价为

$$\begin{aligned}
DP &= e^{-rT} E^Q[XI_A], A = \{S_T \mid S_T < K\} \\
&= e^{-rT} E^Q[I_A] \\
&= Xe^{-rT} P_r^Q(S_T < K) = Xe^{-rT} [1 - P_r^Q(S_T \geq K)] \\
&= Xe^{-rT} [1 - N(d_2)] = Xe^{-rT} N(-d_2)
\end{aligned} \tag{31}$$

此处:  $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$

**例 3** 复杂型的数据选择权(A Complicate Digital Option, CDO), 这种选择权的到期现金流量  $CDO_T$  为

$$CDO_T = \begin{cases} X, & \text{若 } K_1 < S_T < K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$$

则其评价为

$$\begin{aligned}
CDO &= e^{-rT} E^Q[XI_A], A = \{S_T \mid K_1 < S_T < K_2\} \\
&= Xe^{-rT} P_r^Q(K_1 < S_T < K_2) \\
&= Xe^{-rT} [P_r^Q(S_T > K_1) - P_r^Q(S_T > K_2)] \\
&= Xe^{-rT} [N(d_{21}) - N(d_{22})] \quad (\text{利用(22)})
\end{aligned} \tag{32}$$

此处:

$$d_{21} = \frac{\ln(S/K_1) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_{22} = \frac{\ln(S/K_2) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

例 4 下出局买权的评价(Down-and-Out Call,  $DOC$ ), 下出局买权的到期现金流量为

$$\begin{aligned} DOC_T &= \max(S_T - K, 0) \text{ 以及股价在到期前都不触及价格 } B \\ &\quad (\text{即最低股价应高于 } B) \\ &= \begin{cases} S_T - K, & \text{若 } K_1 > K \text{ 及 } \underline{S} > B \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

此处:  $\underline{S}$  代表在到期时或之前股价的最低价格  $[= \min_{0 \leq t \leq T} (S_t)]$ 。

则下出局买权的评价求算如下:

$$\begin{aligned} DOC &= e^{-rT} E^Q[(S_T - K) I_{\{S_T > K, \underline{S} > B\}}] \\ &= e^{-rT} E^Q[S_T I_{\{S_T > K, \underline{S} > B\}}] - K e^{-rT} E^Q[I_{\{S_T > K, \underline{S} > B\}}] \end{aligned} \quad (34)$$

我们首先求(34)内的第二期望值:

$$\begin{aligned} E^Q[I_{\{S_T > K, \underline{S} > B\}}] &= P_r^Q(S_T > K, \underline{S} > B) \\ &= P_r^Q[\ln(S_T/B) > \ln(K/B), \ln(\underline{S}/B) > 0] \\ &= P_r^Q[X_T > k, \underline{X} > 0] \end{aligned} \quad (35)$$

此处:  $X_T = \ln(S_T/B)$ ,  $\ln(K/B) = k$ ,  $\underline{X} = \ln(\underline{S}/B)$

公式(35)内的一个条件是  $\underline{X} > 0$  [或  $\ln(\underline{S}/B) > 0$ ], 它代表布朗运动(Brownian Motion)  $X$  (或  $X_T$ ) 必须大于零, 否则其随机过程立即终止: 也就是, 一旦  $X_T$  等于 (或撞击) 0, 则  $X_T$  终止。因此, 界限 0 被称为  $X$  的吸收界限 (An Absorbing State)。此外, (35) 的概率是涉及具有吸收界限 0 的布朗运动  $X$  的概率。该概率已由 Ingersoll (1987, p. 352) 推导, 且可应用求解 (35)。Ingersoll 的结果重述如下:

在  $Q$  测度下, Brownian Motion 随机过程为:

$$\begin{aligned} dX &= \mu dt + \sigma dW^Q \\ &= (r - q - \sigma^2/2) dt + \sigma dW^Q \end{aligned} \quad (36)$$

$$\underline{X} = \min_{0 \leq t \leq T} X_t$$

则

$$P_r(X_T > k, \underline{X} > 0) = N\left[\frac{k - X_0 + \mu T}{\sigma \sqrt{T}}\right] - e^{-2\mu X_0/\sigma^2} N\left[\frac{-k - X_0 + \mu T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \quad (37)$$

此处:  $X_0 = \ln(S/B)$ ,  $\mu = (r - q - \sigma^2/2)$

再次, (34) 内的第一期望值求算如下:

$$\begin{aligned} E^Q[S_T I_{|S_T > K, \underline{S} > B|}] &= Se^{(r-q)T} E^Q[\exp(-\sigma^2 T/2 + \sigma \Delta W_T^Q) I_{|S_T > K, \underline{S} > B|}] \\ &= Se^{(r-q)T} E^R[I_{|S_T > K, \underline{S} > B|}] \\ &\quad \text{由 Girsanov 定理将 } Q \text{ 测度转换成 } R \text{ 测度} \\ &= Se^{(r-q)T} E^R[I_{|X_T > K, \underline{X} > 0|}] \end{aligned} \quad (38)$$

在此  $R$  测度下, Brownian Motion  $X$  的随机过程为

$$dX = (r - q + \sigma^2/2)dt + \sigma dW^R \quad (\text{正如(11)所示})$$

然后再应用 Ingersoll 的结果如下:

$$\begin{aligned} \text{期望值} &= Se^{(r-q)T} \left\{ N\left[\frac{k - X_0 + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-2(r-q+\sigma^2/2)X_0/\sigma^2} N\left[\frac{k - X_0 + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

最后将(37)及(39)代入(34)简化即是下出局买权的评价如下:

$$\begin{aligned} DOC &= e^{-rT} \left\{ N\left[\frac{k - X_0 + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-2(r-q-\sigma^2/2)X_0/\sigma^2} N\left[\frac{-k - X_0 + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \right\} \\ &\quad - Ke^{-rT} \left( Se^{(r-q)T} \left\{ N\left[\frac{k - X_0 + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-2(r-q+\sigma^2/2)X_0/\sigma^2} N\left[\frac{k - X_0 + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

以上利用 Martingale 方法评价下出局买权并不困难。一旦下出局买权求解后,我们可利用上、下出局选择权的评价关系求解上出局买权(UOC)

$$UOC = \text{一般买权公式(18)} - \text{下出局买权公式(40)}$$

其他界线选择权也可用 Martingale 方法求解。

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, p. 637—654.
- J. C. Cox, and S. Ross, 1976 "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Stochastic Processes*, 3, p. 145—166.
- E. Geman, N. E. Karacui and J. Rocher, 1995 "Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing", *Journal of Applied Probability*, 32, p. 443—458.
- M. Harrison, and D. Kreps, 1997, "Martingales and Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, p. 381—408.
- J. E. Ingersoll, 1987, "Theory of Financial Decision Making", Rowman & Littlefield.
- I. Karatzas, and S. E. Shreve, 1991, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", London, Springer-Verlag.
- R. C. Merton, 1973 "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, p. 141—183.

## 第六章 降低权利金之权证创新及评价

### 摘 要

有不少券商相继推出不同新类型的认购权证(或选择权),其中以可降低权利金的权证很受投资人欢迎。本论文将详细介绍几种可降低权利金的简单新权证,并以 Martingale Pricing 的方法推导出各种新权证的封闭解评价模型,同时推导出相关的避险参数。

本论文的方法可进一步应用于其他可降低权利金的新权证创新,不但投资人受益,发行券商也因新权证评价模型的简单化以及类似 Black-Scholes 避险操作的简易性,获得更佳的风险控管,因此可降低避险损失,提升利润。此外,本章的理论也可应用于建构不同类型的保本基金。

关键词: Martingale Pricing、减缩部分权利金的权证、上限型权证、局部支付型权证、抵付型权证、变化类型权证。

### 一、前 言

为降低权利金及吸引投资人购买认购权证的兴趣,不少综合券商相继创新发行多种认购权证,诸如上出局认购权证(Up-and-Out Calls)、上限型权证、回顾型重设权证(Look-Back and Reset Calls),市价定期重设权证等等证券。对投资人而言,这些权证不但陌生且难懂。

投资人只好从权利金是否便宜的观念做判断,只要发行价格低,则竞相购买,抢购一空。因此,就发行券商而言,只要权证能够在发行期间内完成促销,获利的机会很高。低权利金是个很好的买点。但若为了降低权利金而设计一些复杂且难以评价及避险的权证,则会增加发行权证的风险,并且权利金的决定也很可能出现不合理的价位。因此,若能设计一些简单且可降低权利金的权证,投资人不但受益,发行券商也比较容易决定权证的合理价位,且在避险方面也不复杂,风险自然降低。

选择权的创新种类不胜枚举,这些创新的商品都是属于所谓的新奇选择权(Exotic Options),诸如亚洲选择权(Asian Options),入局或出局选择权(Knock-in or Knock-out Options),回顾型选择权(Look-Back Options),择选选择权(Chooser Options),汇率连动选择权(Quanto Options),远期生效选择权(Forward-Start Options)等等。这些新奇选择权是因应避险者及投资人的不同需求而设计创新。但其到期现金流量完全不同于一般欧式选择权的到期现金流量。一般投资人很难了解其所以然。因此,若我们能对 Black-Scholes 选择权的到期现金流量做简单的修正调整,仍能使一般投资人容易了解,并可降低购买权证的成本,则定会吸引投资人的兴趣。就作者所知,目前仍然没有基于 Black-Scholes 选择权的简单权证设计创新。可能因为国外金融创新相关法令早于 1980 年代已松绑,法人机构可就避险者及投资人的不同需求,设计创新种类繁多的新奇选择权。但中国台湾相关法令尚未松绑,法人机构只能设计简单的权证来满足投资人的需要。因此,本章的理论正适合目前中国台湾法令规范下的简单权证设计创新。以 Martingale Pricing 的方法对这些新权证寻求封闭解(Closed-Form Solutions)的评价模型,以及提供相关重要的避险参数(Hedging Parameters),诸如 Delta、Gamma 及 Vega。此外,这些新权证创新的构想是将一般权证的到期现金流量(The Final Payoff)加以修正调整,稍微降低或只支付部分的到期现金流量,以期达到降低权证的權利金,符合投资人欲降低权证的购买成本。此外,这些新权证的优点在于具有 Black-Scholes 评价模型之简单特征,避险参数也容易求解。

虽然中国台湾权证均为美式权证,但因现金股利调整的方法,使它类

似欧式权证。当标的股在到期前分配现金股利时,按照证期会规定,履约价格必须往下修正调整。因此,现金股利对权证不产生影响。在这种情况下,美式认购权证的标的股可视为无现金股利的股票。因此,从理论而言,美式认购权证可视为欧式权证(至少很接近)。此外,中国台湾投资人极少在到期前行使提前执行,因此,虽是美式权证,但实际已几乎是欧式权证。所以,欧式权证的评价模型仍适用于中国台湾的权证,而不会产生显著误差。这解释了为何中国台湾实务界均以欧式模型来评价中国台湾权证。

本论文的结构如下。第二节将会介绍 6 种不同类型的新权证,并推导出每一新权证的封闭解评价模型以及相关的避险参数。第三节对本论文作总结论。

## 二、新商品创新及评价

在本节中,我们将逐一研讨可降低权利金的新认购权证(欧式)。这些新权证简单易懂。权证权利金的决定可由封闭解准确求出。避险参数(Hedge Parameters)也可由封闭解的评价模型加以决定,对避险操作有很大的助益。在下文中,我们将逐一研讨分析。

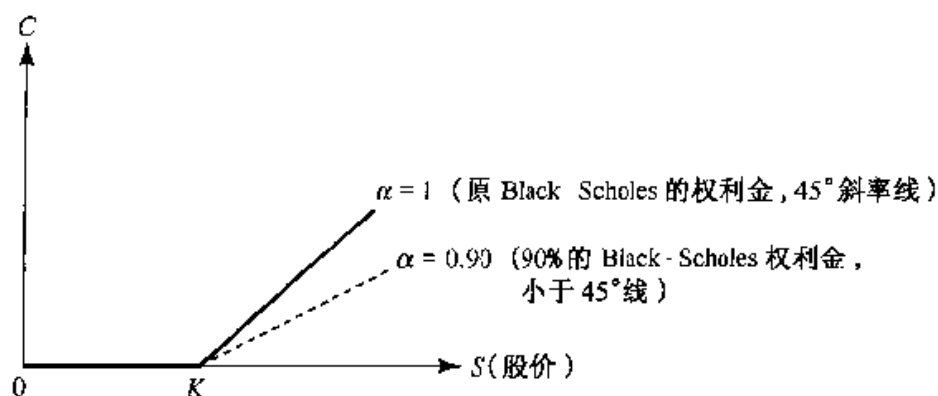
### 一、减缩部分权利金的权证或买权(Call Options With Proportional Payoff)

我们首先介绍最简单的权证。若将普通认购权证(以后简称权证)到期时的价值或现金流量调降某一百分比,则新权证的权利金将可以相同的百分比率降低,如下:

$$C_T = \alpha \max(S_T - K, 0) \quad (1)$$

此处:  $C_T$  = 新权证到期时的现金流量,  $S_T$  = 标的到期时的价格,  $K$  = 履约价格,  $\alpha (< 100\%)$  是调降的百分比率,例如:  $\alpha = 0.90, 0.85$ , 等等。 $T$  = 到期时间。

以图 1 表示如下:



(为简单计, 横轴下的权利金图省略)

图 1 到期现金流量部分减缩的权证

此种新权证的权利金其实是 Black-Scholes(简称 BS)权利金的比率。因此该权证的评价模型即是 BS 模型乘以  $\alpha$ 。以公式表示如下<sup>①</sup>：

$$C = \alpha [S e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)] \quad (2)$$

此处： $q$  = 标的股的连续股息， $r$  = 无风险利率

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2) \cdot T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$S$  = 标的股的现在价格( $t = 0$ )

$\sigma$  = 标的股的连续报酬率瞬间标准差

$$N(x) = \text{标准正态分布的累积概率} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

该权证的避险参数即是 BS 模型避险参数乘以  $\alpha$ ：

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \alpha e^{-qT} N(d_1) \quad (3)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\alpha e^{-qT}}{\partial S \sqrt{T}} n(d_1), \quad n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \quad (4)$$

<sup>①</sup> 我们仍然采用 Black-Scholes 的假设。标的股价呈现几何布朗运动： $dS = rSdt + \sigma S dW^Q$ ， $Q$  代表 risk-neutral measure。



$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \alpha S e^{-qT} n(d_1) \sqrt{T} \quad (5)$$

## 二、上限型权证或买权 (Capped Calls)

此种权证到期时的价值(或现金流量)如下:

$$C_T = \begin{cases} 0, & \text{若 } S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1, & \text{若 } K_1 < S_T < K_2 \\ K_2 - K_1, & \text{若 } S_T \geq K_2 \end{cases} \quad (6)$$

以图 2 表示其现金流量如下:

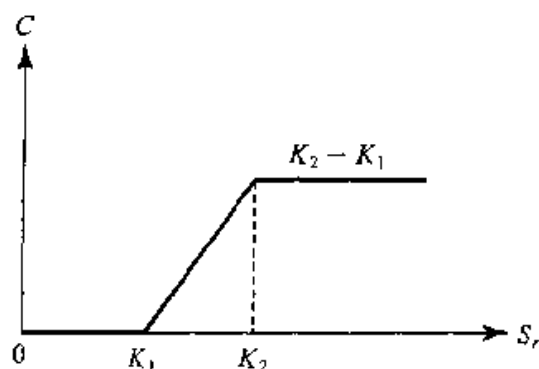


图 2 上限型权证之现金流量

解释如下:

(1) 在到期时,若标的价格( $S_T$ )小于或等于履约价格( $K_1$ ),则该权证价格为零( $C_T = 0$ ),与一般买权的到期价值相同。

(2) 在到期时,若标的价格介于  $K_1$  及  $K_2$  之间( $K_1 < S_T < K_2$ ),该权证的价值为标的价格减掉履约价格( $S_T - K_1$ ),这与一般买权相同。

(3) 若  $S_T \geq K_2$ ,则权证的价值受到上限( $K_2 - K_1$ )的限制,这与一般买权价值的决定( $S_T - K_2$ )不同。这就是因为该权证的价值受到上限的约束,因此其权利金得以降低。若  $K_2$  的设定越远离  $K_1$ ,则该权证越接近一般的买权。因此,所节省的权利金越少。

在风险中立下,上限型权证(或买权)的评价模型可根据上面该权证(或买权)到期现金流量的期望值,以无风险利率折现,并可以下列公

式代表之:

$$C = e^{-rT} E^Q[(S_T - K_1) 1_{|K_1 < S_T < K_2|}] \\ + e^{-rT} E^Q[(K_2 - K_1) 1_{|S_T \geq K_2|}] \quad (7)$$

此处:  $1_A$  代表指标函数(Indicator Function), 其定义如下:

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 成立(或出现)} \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不成立(或不出现)} \end{cases}$$

所以,

$$(S_T - K_1) 1_{|K_1 < S_T < K_2|} = \begin{cases} S_T - K_1, & \text{若 } K_1 < S_T < K_2 \\ 0, & \text{若 } S_T \text{ 不在 } K_1 \text{ 及 } K_2 \text{ 之间} \\ & \text{(即 } S_T \leq K_1 \text{ 或 } S_T \geq K_2) \end{cases}$$

$$(K_2 - K_1) 1_{|S_T \geq K_2|} = \begin{cases} K_2 - K_1, & \text{若 } S_T \geq K_2 \\ 0, & \text{若 } S_T < K_2 \end{cases}$$

$E^Q$  代表风险中立概率测度  $Q$  (Risk-Neutral Probability Measure  $Q$ ) 下的期望值。

评价模型(7)可借由 Martingale Pricing 及 Girsanov Theorem 求得, 表示如下: (详见附录一的证明)

$$C = Se^{-qT} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] + e^{-rT} [K_2 N(d_2') - K_1 N(d_1')] \\ = [Se^{-qT} N(d_1^*) - K_1 e^{-rT} N(d_1^* - \sigma \sqrt{T})] \\ - [Se^{-qT} N(d_2^*) - K_2 e^{-rT} N(d_2^* - \sigma \sqrt{T})] \\ = \text{The Black-Scholes Call } (K_1) - \text{The Black-Scholes Call } (K_2) \quad (8)$$

此处:

$$d_1^* = \frac{\ln(S/K_1) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2^* = \frac{\ln(S/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_1' = \frac{\ln(S/K_1) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1^* - \sigma \sqrt{T}$$

$$d_2' = \frac{\ln(S/K_2) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_2^* - \sigma \sqrt{T}$$

观察(8)式可得知,上限型买权是由长部位买权( $K_1$ )及短部位买权( $K_2$ )组合而成。评价模型(8)只涉及正态分布概率,计算很简单。其避险参数也很容易求得,表示如下:(详见附录二的推导)

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-qT} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] \quad (9)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-qT} \left[ \frac{n(d_1^*)}{\sigma S \sqrt{T}} - \frac{n(d_2^*)}{\sigma S \sqrt{T}} \right] \quad (10)$$

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S e^{-qT} \sqrt{T} [n(d_1^*) - n(d_2^*)] \quad (11)$$

### 三、局部支付型权证

局部支付型权证或买权(Payoff Segment Calls)在到期时的价值先由图3表示如下:

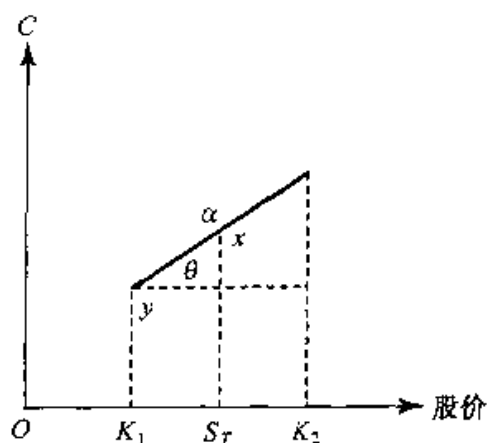


图3 局部支付型权证

以公式表示如下:

$$C_T = \begin{cases} 0, & \text{若 } S_T < K_1 \\ x + y = y + \alpha(S_T - K_1), & \text{若 } K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ 0, & \text{若 } S_T > K_2 \end{cases} \quad (12)$$

此处  $\alpha$  代表支付报酬的斜度 ( $\alpha = 1$ ,  $\alpha < 1$ , 或  $\alpha > 1$ ),

$$\alpha = \tan \theta = \frac{x}{S_T - K_1} \Rightarrow x = \alpha(S_T - K_1)$$

该权证的期终价值解释如下:

(1) 在到期 ( $T$ ) 时, 若标的股价  $S_T$  低于  $K_1$ , 或大于  $K_2$  时, 权证价值为零 (即若  $S_T < K_1$  或  $S_T > K_2$ , 则  $C_T = 0$ )。

(2) 在  $T$  时, 若标的股价介于  $K_1$  及  $K_2$  之间 ( $K_1 \leq S_T \leq K_2$ ), 权证的价值为  $y + \alpha(S_T - K_1)$ 。 $y$  为  $S_T = K_1$  时的权证价值。斜率  $\alpha$  可调整为大于、小于或等于 1 (即  $\alpha > 1$ ,  $\alpha < 1$ , 或  $\alpha = 1$ )。若  $\alpha = 1$  时, 权证的价值刚好等于  $y$  加上一般买权在  $K_1$  及  $K_2$  间的价值 [即  $y + (S_T - K_1)$ ]。

局部支付型权证的评价模型可根据公式 (12) 到期时的价值 (或现金流量) 推导出评价模型。运用 Martingale Pricing 及 Girsanov Theorem, 该权证的评价模型可表示如下: (详见附录三的推导)

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} E^Q \{ [y + \alpha(S_T - K_1)] 1_{|K_1 \leq S_T \leq K_2|} \} \\ &= e^{-rT} \{ (y - \alpha K_1) E^Q [1_{|K_1 \leq S_T \leq K_2|}] + \alpha E^Q [S_T 1_{|K_1 \leq S_T \leq K_2|}] \} \\ &= e^{-rT} (y - \alpha K_1) [N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] \\ &\quad + \alpha S e^{-qT} [N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})] \end{aligned} \quad (13)$$

此处:

$$d_{1,1} = \frac{\ln(S/K_1) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_{2,1}^* = \frac{\ln(S/K_1) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_{1,1} - \sigma \sqrt{T}$$

$$d_{2,2}^* = \frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_{1,2} - \sigma \sqrt{T}$$

因局部支付型权证的评价模型包含很容易计算的正态分布概率  $N(\cdot)$ , 权利金的计算极度快速。

局部支付型权证的避险参数可由(13)直接微分推导出, 表示如下:  
(详见附录四的推导)

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = & e^{-rt} (y - \alpha K_1) \left[ \frac{n(d_{2,1}^*) - n(d_{2,2}^*)}{S \sigma \sqrt{T}} \right] \\ & + \alpha e^{-qt} \left[ \frac{n(d_{1,1}) - n(d_{1,2})}{\sigma \sqrt{T}} \right] \\ & + \alpha e^{-qt} [N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})] \quad (K_1 \leq S \leq K_2) \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = & e^{-rt} (y - \alpha K_1) \left[ \frac{n(d_{2,2}^*)(d_{2,2}^* + \sigma \sqrt{T}) - n(d_{2,1}^*)(d_{2,1}^* + \sigma \sqrt{T})}{\sigma^2 S^2 T} \right] \\ & + \alpha e^{-qt} \left[ \frac{-n(d_{1,1})d_{1,1} + n(d_{1,2})d_{1,2}}{\sigma^2 S \sqrt{T}} \right] \\ & + \alpha e^{-qt} \left[ \frac{n(d_{1,1}) - n(d_{1,2})}{\sigma S \sqrt{T}} \right] \\ & (K_1 \leq S \leq K_2) \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = & e^{-rt} (y - \alpha K_1) \left[ n(d_{2,1}^*) \left( 1 - \frac{d_{2,1}^*}{\sigma \sqrt{T}} \right) - n(d_{2,2}^*) \left( \frac{d_{2,2}^*}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \sqrt{T} \end{aligned}$$

$$+ \alpha S e^{-qT} \left[ n(d_{1,1}) \left( 1 - \frac{d_{1,1}}{\sigma \sqrt{T}} \right) - n(d_{1,2}) \left( 1 - \frac{d_{1,2}}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \sqrt{T}$$

$$K_1 \leq S \leq K_2 \quad (14c)$$

### 避险跳跃的实务困难

虽然以上的避险参数( $\Delta$ ,  $\Gamma$  及  $Vega$ )可经由(14)求解,但就实务层面而言,避险者会遭遇到 Delta 断裂(或跳跃)的困难。观察图 3 可知,当股价尚未上升至  $K_1$  时,并不需要避险部位( $\Delta = 0$ , 因该权证尚无现金流量)。但当股价上升至  $K_1$  时,避险部位立即生效(根据(14a)式计算,  $\Delta > 0$ )。因此,股价在  $K_1$  之前后就会有 Delta 跳跃的现象。实务避险操作很难应付 Delta 跳跃,即由避险零部位可能立即跳跃成为正避险部位( $\Delta > 0$ , 若股价持续向上升)。但若股价逼近  $K_1$ ,却不是往上升,而是再度回档,则仍是维持避险零部位。但避险者无法预知,当股价逼近  $K_1$  时,股价是否会持续上升或回档。在这个时候,避险者只有按照主观判断股价的走势,来进行避险操作,这也就是实务界所谓的投机性避险(Speculative Hedge),而不是纯粹学理的避险。投机性避险的可能情况列举如下:

当股价逼近时,若主观判断往上攻坚的可能性大,则可建立部分(或全部)的避险部位。若判断正确,则不会产生高价抢进避险部位所需的股票。但判断可能会有错误,股价回档,则原先建立的避险部位股票会有价格损失。主观判断短期股价走势是一种投机性行为,故这种避险可称为投机性避险。这是实务避险操作所无法避免的困难。

另一种 Delta 跳跃发生于,股价已在  $K_1$  及  $K_2$  间,股价可能往上逼近  $K_2$  (仍是维持避险部位),但不知股价是否会再往上升超过  $K_2$ 。若会,则避险部位变成零。若不会,则仍应维持避险部位。此种情况的避险部位仍是基于主观判断当时股价的走势。因此又是投机性避险的另一种情况。这种 Delta 跳跃的困难是理论无法解决的,只有避险交易员的多年经验才能应付此种跳跃式的困难。因此,虽然金融工程是一门科学(Science),但金融工程的应用却是一门艺术(Art)。金融工程兼具科学与艺术两方面的有趣学科。

公式(13)是局部支付型权证的综合评价模型。该权证会因  $\alpha$  的不同设定而产生不同的有趣权证。我们介绍其中两种权证如下：

(1) 当  $\alpha = 0$ , 局部支付型权证变成兑现或无兑现权证(Cash-or-Nothing Call, 简称 CNC)。其到期日现金流量成为

$$CNC_T = \begin{cases} y, & \text{若 } K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ 0, & \text{若 } S_T < K_1 \text{ 或 } S_T > K_2 \end{cases}$$

只有当标的价格介于  $K_1$  及  $K_2$  之间, CNC 权证才支付固定金额  $y$ 。以图 4 表示如下：

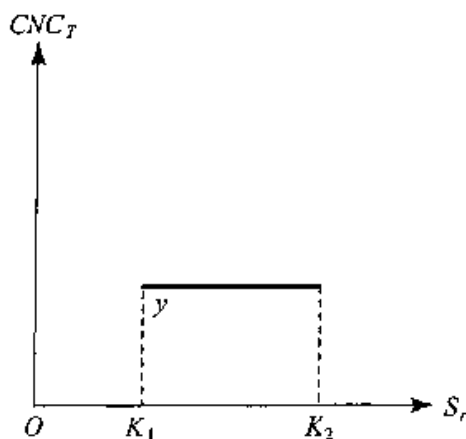


图 4 兑现或无兑现权证

CNC 的评价公式可将(13)内的  $\alpha$  设定为零即得

$$CNC = e^{-rT} y [N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] \quad (15)$$

其避险参数也可由公式(14)很容易求出(令  $\alpha = 0$ )

$$\Delta = \frac{\partial CNC}{\partial S} = e^{-rT} y \left[ \frac{n(d_{2,1}^*) - n(d_{2,2}^*)}{S \sigma \sqrt{T}} \right], K_1 \leq S \leq K_2 \quad (16a)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 CNC}{\partial S^2} = e^{-rT} y \left[ \frac{n(d_{2,2}^*)(d_{2,2}^* + \sigma \sqrt{T}) - n(d_{2,1}^*)(d_{2,1}^* + \sigma \sqrt{T})}{\sigma^2 S^2 T} \right] \quad (16b)$$

$$Vega = \frac{\partial CNC}{\partial \sigma}$$

$$= e^{-rT} y \left[ n(d_{2,1}^*) \left( 1 - \frac{d_{2,1}^*}{\sigma \sqrt{T}} \right) - n(d_{2,2}^*) \left( 1 - \frac{d_{2,2}^*}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \sqrt{T} \quad (16c)$$

(2) 令  $\alpha = 1$ , 则局部支付型权证变成为一般欧式 Black-Scholes 买权的局部支付权证(以  $C_{BS}^*$  称之)。

以图 5 表示如下:

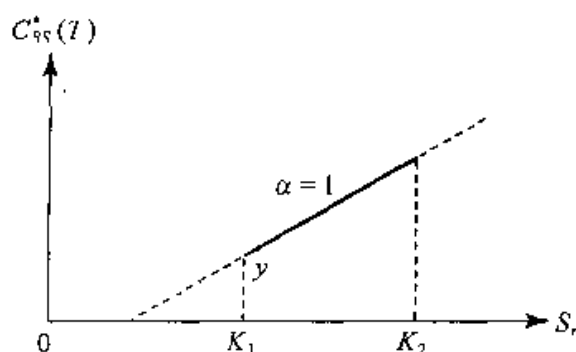


图 5 局部支付 Black-Scholes 买权之到期现金流量

其到期日现金流量为:

$$C_{BS}^*(T) = \begin{cases} y + S_T - K_1, & \text{若 } K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$$

$C_{BS}^*$  的评价公式如下:(在(13)内,令  $\alpha = 1$ )

$$C_{BS}^* = e^{-rT} (y - K_1) [N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] + S e^{-qT} [N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})] \quad (17)$$

其避险参数则为公式(14a)、(14b)、(14c),并令  $\alpha = 1$ , 在此不再重复。 $\alpha$  值设定大于 1, 则结果的权证价值会大于(17)所示  $C_{BS}^*$  的价格。

#### 四、抵付型权证

抵付型权证或买权(Deductible Calls, 以 DC 简称)到期现金流量为:

$$DC_T = \begin{cases} 0, & \text{若 } S_T < K \\ 0, & \text{若 } K \leq S_T \leq H \\ S_T - K, & \text{若 } H < S_T \end{cases} \quad (18)$$



$K = \text{履约价格}$

当  $S_T < K$  时,此类型权证(DC)无现金流量,与一般欧式买权相同。但当  $K \leq S_T \leq H$  时,此权证也不支付任何现金。这不同于一般买权,一般买权的现金流量则为  $S_T - K$ 。因为在初步获利阶段该权证不支付任何现金,只有当标的股价格  $S_T$  高于  $H$  时,才开始支付现金,此种现金流量正如汽车保险或火险在损失的最初固定金额内,保险公司不支付任何赔偿金。但当损失大于某一固定金额  $H$  时,才支付保险金。因此保险费(权利金支付)可降低。自付的部分越高,保险费也就越低(或权利金越低)。因此,我们称该类型的权证为抵付型权证。以图 6 表示其到期价值如下:

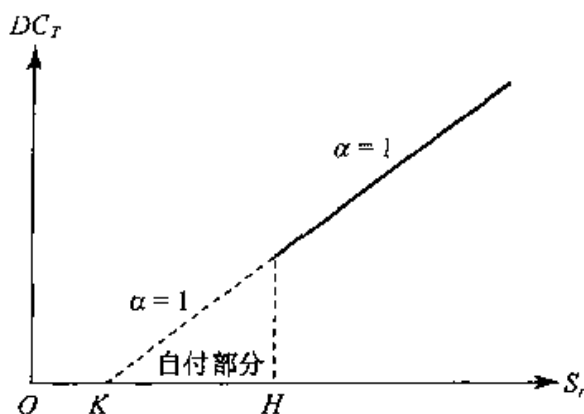


图 6 抵付型权证的到期价值

根据抵付型权证的到期价值,权利金的决定是一般 BS 模型价格减掉最初抵付(或自付)部分的权利金。以公式表示如下:

$$DC = Se^{-qT}N(X_1) - Ke^{-rT}N(X_2) - e^{-rT}E^Q[(S_T - K)1_{|K \leq S_T \leq H|}] \quad (19)$$

此处:

$$X_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad X_2 = X_1 - \sigma\sqrt{T}$$

自付部分权利金(期望值部分)可由(13)直接求出,并令  $\alpha = 1$ ,  $y = 0$ ,  $K_1 = K$ ,  $K_2 = H$ ;

$$e^{-rT}E^Q[(S_K - K)1_{|K \leq S_T \leq H|}] = -e^{-rT}K[N(N_2) - N(Y_2)] \\ + Se^{-qT}[N(X_1) - N(Y_1)] \quad (20)$$

此处:

$$Y_1 = \frac{\ln(S/H) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, Y_2 = Y_1 - \sigma\sqrt{T}$$

将(20)代入(19)即得抵付型权证的评价模型如下:

$$DC = Se^{-qT}N(X_1) - Ke^{-rT}N(X_2) \\ - Se^{-qT}[N(X_1) - N(Y_1)] \\ + e^{-rT}K[N(X_2) - N(Y_2)] \\ = Se^{-qT}N(Y_1) - Ke^{-rT}(Y_2) \quad (21a)$$

此评价模型其实是欧式买权的 BS 评价模型,虽然权证的履约价格是  $K$ ,但因自付部分标的价格必须高于  $H$  时,权证的价值才能增加,且等于  $S_T - H$ 。因此抵付型权证可视为另一种履约价格  $H$  高于原有履约价格  $K$  的权证。相对于  $H$  而言,它是一个价外权证。

抵付型权证避险参数的推导正如 BS 模型避险参数,因此可以直接表示如下:(参见附录五)

$$\Delta = \frac{\partial DC}{\partial S} = e^{-qT}N(Y_1) + (H - K)e^{-rT}n(Y_2) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \quad (21b)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 DC}{\partial S^2} \\ = e^{-qT}n(Y_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} - (H - K)e^{-rT}n(Y_2) \frac{1}{S^2\sigma\sqrt{T}} \left[ 1 + \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}} \right] \quad (21c)$$

$$Vega = \frac{\partial DC}{\partial \sigma} \\ = Se^{-qT}n(Y_1) \left( 1 - \frac{Y_1}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Ke^{-rT}n(Y_2) \left( 1 - \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}} \right) \sqrt{T} \quad (21d)$$

其他类型的权证可由局部支付型权证评价模型(13)内的  $\alpha$  加以变化,拼凑在一起成为降低权利金的权证创新。我们在比举例其中两种类型。

### 五、变化类型权证之一

此种权证(或买权)的到期日价值可由图 7 表示如下:

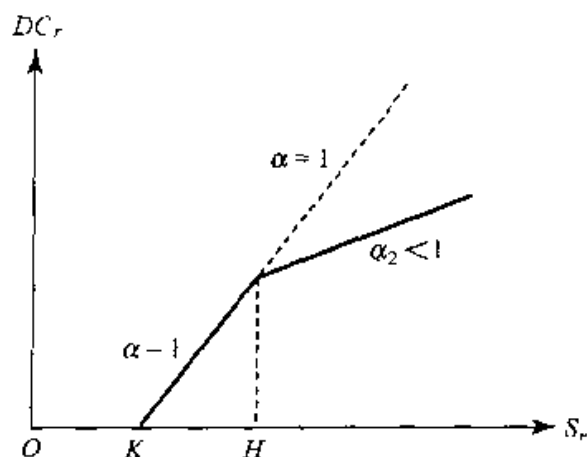


图 7 变化类型权证之一的到期日价值

以公式表示其价值如下:

$$C_T = \begin{cases} 0, & \text{若 } S_T \leq K \\ (S_T - K), & \text{若 } K < S_T \leq H \\ \alpha_2(S_T - K), & \text{若 } S_T > H, \alpha_2 < 1 \end{cases} \quad (22)$$

此种权证的履约价为  $K$ 。若到期时  $S_T$  介于  $K$  及  $H$  之间,其价值为  $S_T - K$ ;若  $S_T > H$ ,其价值为  $\alpha_2(S_T - K)$ ,  $\alpha_2 < 1$ 。其评价模型的推导如下:

$$C = e^{-rT} E^Q[(S_T - K)1_{\{K < S_T \leq H\}}] + \alpha_2 e^{-rT} E^Q[(S_T - K)1_{\{S_T > H\}}] \quad (23)$$

第一个期望值是公式(13)的一种特殊情况:  $y = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $K_1 = K$ ,  $K_2 = K$ 。因此,

$$e^{-rT} E^Q[(S_T - K)1_{K < S_T \leq H_1}] = Se^{-qT}[N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})] \\ - Ke^{-rT}[N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] \quad (24)$$

第二个期望值其实是  $\alpha_2$  乘以抵付型权证的价值(公式(21))。因此,将此(21)及(24)代入(23)即得最后的评价公式:

$$C = Se^{-qT}[N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})] - Ke^{-rT}[N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] \\ + \alpha_2[Se^{-qT}N(Y_1) - Ke^{-rT}N(Y_2)] \\ = Se^{-qT}[N(d_{1,1}) - N(d_{1,2}) + \alpha_2N(Y_1)] \\ - Ke^{-rT}[N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*) + \alpha_2N(Y_2)] \\ = Se^{-qT}[N(X_1) - (1 - \alpha_2)N(Y_1)] \\ - Ke^{-rT}[N(X_2) - (1 - \alpha_2)N(Y_2)] \\ = [Se^{-qT}N(X_1) - Ke^{-rT}N(X_2)] \\ - (1 - \alpha_2)[Se^{-qT}N(Y_1) - Ke^{-rT}N(Y_2)] \quad (25)$$

此处:

$$d_{1,1} = \frac{\ln(S/K) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = X_1,$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/H) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = Y_1,$$

$$d_{2,1}^* = d_{1,1} - \sigma\sqrt{T} = X_1 - \sigma\sqrt{T} = X_2,$$

$$d_{2,2}^* = d_{1,2} - \sigma\sqrt{T} = Y_1 - \sigma\sqrt{T} = Y_2$$

根据(25)该权证的避险参数为:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$= e^{-qT} N(X_1) - (1-\alpha) \left[ e^{-qT} N(Y_1) + (H-K) e^{-rT} n(Y_2) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \right],$$

$$d_1 = X_1 \quad (26a)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

$$= e^{-qT} \frac{n(X_1)}{S\sigma\sqrt{T}} - (1-\alpha) \left[ e^{-qT} \frac{n(Y_1)}{S\sigma\sqrt{T}} - (H-K) e^{-rT} \frac{n(Y_2)}{S^2\sigma\sqrt{T}} \left( 1 + \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]$$

$$(26b)$$

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

$$= [K e^{-rT} \sqrt{T} n(X_1)] - (1-\alpha) \left[ S e^{-qT} n(Y_1) \left( 1 - \frac{Y_1}{\sigma\sqrt{T}} \right) \sqrt{T} \right. \\ \left. - K e^{-rT} n(Y_2) \left( -1 - \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}} \right) \sqrt{T} \right] \quad (26c)$$

## 六、变化类型权证之二

此种权证的到期日价值可由图 8 表示如下：

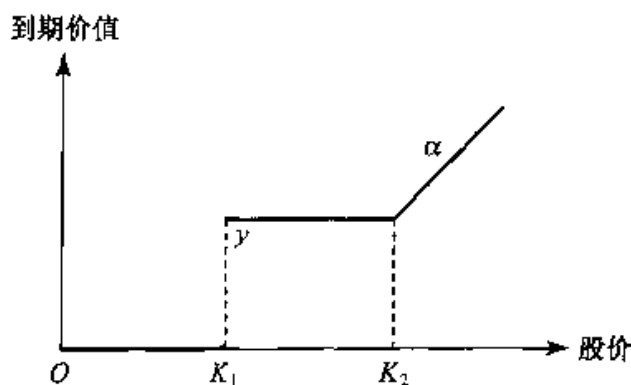


图 8 变化类型权证之二

以公式表示其价值如下：

$$C_T = \begin{cases} 0, & \text{若 } S_T < K_1 \\ y, & \text{若 } K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ \alpha(S_T - K_1), & \text{若 } S_T > K_2 \end{cases}$$

此种权证的现在价格其实是兑现或无兑现型权证 (Cash-or-No thing Calls) 的价格 (15) 加上抵付型权证价格 (21) 之和。因此, 其评价模型为:

$$\begin{aligned} C &= e^{-rt} E^Q[y 1_{K_1 \leq S_T \leq K_2}] + e^{-rT} E^Q[\alpha(S_T - K_2) 1_{S_T > K_2}] \\ &= e^{-rT} y [N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] + \alpha [Se^{-qT} N(Y_1^*) - Ke^{-rT} N(Y_2^*)] \\ &= \alpha [Se^{-qT} N(Y_1^*) - K_1 e^{-rT} N(Y_2^*)] + e^{-rT} y [N(X_2) - N(Y_2)] \end{aligned} \quad (27)$$

此处:

$$\begin{aligned} d_{2,1}^* &= X_2, \quad d_{2,2}^* = Y_2 \\ Y_1^* &= \frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} \\ Y_2^* &= Y_1^* - \sigma \sqrt{T} \end{aligned}$$

最后, 我们补充如下: 基于局部支付型权证, 我们可组合不同类型的现金流量成为另一种降低权利金的新权证或其他吸引投资人兴趣的新权证。读者可自行尝试创新。

### 三、结 论

在本章中, 我们已将可以降低权利金的几种新权证加以介绍, 并以 Martingale Pricing 的方法推导出各种新权证的封闭解评价模型, 也同时报告相关的避险参数。对于这些新权证在实务避险操作时所面临的 Delta 跳跃困难也提供一些实务因应之道 (投机性的避险)。

发行券商可依据每一新权证特有的到期现金流量设计创新适合投资人需求的新权证。同时兼顾目前严谨的法令, 创新的权证最好尽量属于 Black-Scholes 范围内的简单选择权, 才不致受碍于法令而无法发展。希望本章能进一步引发业界及学术界在这方面的兴趣, 创新更多低权利金的各种权证, 使投资人受益。

## 参 考 文 献

- Benson, Robert, and Nicholas Daniel (1991), "Up Over and Out", *Risk*, 4 (June), p. 17—19.
- Bouaziz, Laurent, Eric Briys, and Miche Crouhy (1994), "The Pricing of Forward-Starting Asian Options", *Journal of Banking and Finance*, 18, (October), p. 823—839.
- Chriss, Neil, and Michael Ong (1995), "Digitals Defused", *Risk*, 8, (December), p. 56—59.
- Conze, Antoine, and R. Viswanathan (1991), "European Path-Dependent Options: The Case of Geometric Averages", *Finance*, 12, (June), p. 7—22.
- J. C. Cox, and Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process", *Journal of Stochastic process* 3, p. 145—166.
- E. Geman, N. E. Karaoui, and J. Rocher (1995), "Changes of Numeraire, Change of Probability Measure and Option Pricing", *Journal of Applied Probability* 32, p. 443—458.
- Geske, Robert (1979), "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, (March), p. 63—81.
- M. Harrison, and D. Kreps (1977), "Martingales and Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20, p. 381—408.
- J. C. Hull, (1997), "Options, Futures and other Derivatives", Prentice-Hall International, Inc., p. 228—253.
- I. Karatzas and S. E. Shreve (1991), "Brownian Motion and Stochastic Calculus", Springer-Verlag, p. 1 900—1 998.
- A. G. Z. Kemna, and A. C. F. Vorst (1990), "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", *Journal of Banking and Finance*, 14, (March), p. 113—129.
- Levy, Edmond (1990), "Asian Arithmetic," *Risk*, 3, (May), p. 7—8.
- \_\_\_\_\_. (1992), "Pricing European Average Rate Currency Options," *Journal of International Money and Finance*, 11, (October), p. 474—491.
- Levy, Edmond, and Stuart Turnbull (1992), "Average Intelligence", *Risk*, 5

- (February), p. 53—59.
- Rich, R. Don and M. Don Chance (1993), "An Alternative Approach to the Pricing of Options on Multiple Assets", *Journal of Financial Engineering*, 2, (December), p. 271—285.
- Ritchken, Peter (1995), "On Pricing Barrier Options," *Journal of Derivatives*, 3, (Winter), p. 19—28.
- L. C. G. Rogers, and Z. Shi. (1995), "The Value of an Asian Option", *Journal of Applied Probability*, 32, (December), p. 1 077—1 088.
- Rubinstein, Mark, and Eric Reiner (1991), "Unscrambling the Binary Code", *Risk*, 4, (October), p. 78—83.
- Rubinstein, Mark (1991), "Options for the Undecided," *Risk*, 4, (April), p. 43.
- Turnbull, Stuart M. (1995), "Interest Rate Digital Options and Range Notes", *Journal of Derivatives*, 3, (Fall), p. 92—101.

## 附 录

The 1st component of (7)

$$\begin{aligned}
 &= E^Q[(S_T - K_1)1_{|K_1 < S_T < K_2|}] \\
 &= E^Q[S_T 1_{|K_1 < S_T < K_2|}] - K_1 E^Q[1_{|K_1 < S_T < K_2|}]
 \end{aligned}$$

But then

$$\begin{aligned}
 &E^Q[S_T 1_{|K_1 < S_T < K_2|}] \\
 &= E^Q\left\{S \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma(w_T - w_0)\right] 1_{|K_1 < S_T < K_2|}\right\} \\
 &= Se^{(r-q)T} E^Q\{e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\Delta w_T} 1_{|K_1 < S_T < K_2|}\}, \Delta w_T = w_T - w_0
 \end{aligned}$$

where we let  $\xi_T = e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\Delta w_T} = e^{\int_0^T \sigma dw_s - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 ds}$  which is a Girsanov factor.

A change of measure from Q to R:  $dw^Q = dw^R + \sigma dt$

$$\therefore \frac{ds}{s} = (r - q)dt + \sigma dw^Q = (r - q)dt + \sigma(dw^R + \sigma dt)$$



$$\begin{aligned}
&= (r - q + \sigma^2)dt + \sigma dw^R \\
\therefore d\ln S_T &= \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw^Q \\
&= \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma(dw^R + \sigma dt) \\
&= \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw^R
\end{aligned}$$

The Itô integral of the above stochastic differential equation (SDE) gives

$$\therefore S_T = S \exp\left[\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \Delta w_T^R\right], \Delta w_T^R = w_T^R - w_0^R \sim N(0, T)$$

Thus, using Girsanov theorem, the first expectation of (7) is computed below.

一、公式(8)的证明如下:

$$\begin{aligned}
&Se^{(r-q)T} E^R[1_{|K_1 < S_T < K_2|}], \\
&E^R(\cdot) \text{ is taken with respect to } R \text{ measure} \\
&= Se^{(r-q)T} P_r^R[K_1 < Se^{(r-q+\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\Delta w_T^R} < K_2] \\
&= Se^{(r-q)T} P_r^R\left[\frac{\ln(K_1/S) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}}\right. \\
&\quad \left.< \frac{\ln(K_2/S) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
&= Se^{(r-q)T} P_r^R\left[\underbrace{\frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2^*}\right. \\
&\quad \left.< -\frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}} < \underbrace{\frac{\ln(S/K_1) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_1^*}\right]
\end{aligned}$$

$$= \text{Se}^{(-q)T} [N(d_1^*) - N(d_2^*)], \quad \frac{-\Delta w_T^R}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1)$$

Next,

$$E^Q[1_{|K_1 < S_T < K_2|}] = P_r^Q[K_1 < S_T < K_2]$$

$$P_r^Q(K_1 < S \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}T\right)T + \sigma \frac{\Delta w_T^Q}{(w_T^Q - w_0^Q)}\right] < K_2)$$

where under Q measure (测度)

$$\begin{aligned} S_T &= S \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}T\right)T + \sigma(w_T^Q - w_0^Q)\right] \\ &= P_r^Q\left[\frac{\ln(K_1/S) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}}\right. \\ &\quad \left.< \frac{\ln(K_2/S) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= P_r^Q\left[\underbrace{\frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2'} < -\frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}}\right. \\ &\quad \left.< \underbrace{\frac{\ln(S/K_1) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_1'}\right] \\ &= N(d_1') - N(d_2'), \quad \frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} &E^Q[(K_2 - K_1)1_{|S_T \geq K_1|}] \\ &= (K_2 - K_1)P_r^Q(S_T \geq K_2) \\ &= (K_2 - K_1)P_r^Q[\text{Se}^{(r - q - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \Delta w_T^Q} \geq K_2] \\ &= (K_2 - K_1)P_r^Q\left[\frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}} \geq \frac{\ln(K_2/S) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (K_2 - K_1) P_r^Q \left[ - \frac{\Delta w_T^Q}{\sqrt{T}} < \underbrace{\frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}}_{d_2'} \right] \\
&= (K_2 - K_1) N(d_2')
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
C &= e^{-rT} \{ S e^{(r-q)T} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] - K_1 [N(d_1') - N(d_2')] \} \\
&\quad + e^{-rT} \{ (K_2 - K_1) N(d_2') \} \\
&= S e^{-qT} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] + e^{-rT} [K_2 N(d_2') - K_1 N(d_1')]
\end{aligned}$$

这也就是公式(8)。

## 二、公式(9),(10)及(11)的推导

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(d_1^*)}{\partial S} &= n(d_1) \frac{\partial d_1^*}{\partial S} = \frac{n(d_1^*)}{S \sigma \sqrt{T}} \\
\Delta &= \frac{\partial C}{\partial S} \\
&= e^{-qT} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] + S e^{-qT} \left[ \frac{n(d_1^*)}{S \sigma \sqrt{T}} - \frac{n(d_2^*)}{S \sigma \sqrt{T}} \right] \\
&\quad + e^{-rT} \left[ K_2 \frac{n(d_2')}{S \sigma \sqrt{T}} - K_1 \frac{n(d_1')}{S \sigma \sqrt{T}} \right] \\
&= e^{-qT} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] + e^{-qT} \left[ \frac{n(d_1^*) - n(d_2^*)}{S \sigma \sqrt{T}} \right] \\
&\quad + e^{-rT} \left[ \frac{K_2 n(d_2') - K_1 n(d_1')}{S \sigma \sqrt{T}} \right] \\
&= e^{-qT} [N(d_1^*) - N(d_2^*)] \text{ (最后两项可对消掉)}
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\frac{n(d_1^*)}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^{*2}/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^{*2}/2} \cdot \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial S} (d_1^{*2}) \\
&= \frac{-1}{2} n(d_1^*) \cdot 2d_1^* \frac{1}{S \sigma \sqrt{T}} = - \frac{n(d_1^*) d_1^*}{S \sigma \sqrt{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= e^{-qT} \left[ \frac{n(d_1^*) - n(d_2^*)}{S\sigma\sqrt{T}} \right] + e^{-qT} \left[ \frac{-n(d_1^*)d_1^* + n(d_2^*)d_2^*}{S\sigma\sqrt{T}} \right] \\ &\quad + e^{-rT} \left[ \frac{S\sigma\sqrt{T}(-K_2n(d_2')d_2' + K_1n(d_1')d_1') - \sigma\sqrt{T}(K_2n(d_2') - K_1n(d_1'))}{S^2\sigma^2T} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(d_1^*)}{\partial \sigma} &= n(d_1^*) \frac{\partial d_1^*}{\partial \sigma} \\ &= n(d_1^*) \left[ \frac{\sigma\sqrt{T}(\sigma T) - (\ln(S/K_1) + (r - q + \sigma^2/2)T)\sqrt{T}}{\sigma^2 T} \right] \\ &= n(d_1^*) \left[ \sqrt{T} - \frac{\ln(S/K_1) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \frac{\sigma\sqrt{T}\sqrt{T}}{\sigma^2 T} \right] \\ &= n(d_1^*) [1 - d_1^*/\sigma\sqrt{T}] \sqrt{T} \end{aligned}$$

$$Vega = Se^{-qT} \sqrt{T} [N(d_1^*) - N(d_2^*)]$$

三、公式(13)的证明如下:

In a risk-neutral world, the stock price dynamics is given by  $ds_t/s_t = (r - q)dt + \sigma dw^Q$

$$\begin{aligned} \therefore d\ln(S_t/S) &= \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw^Q \\ \Rightarrow S_t &= S \exp \left[ \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma (w_t^Q - w_0^Q) \right] \end{aligned}$$

我们首先推导(13)内的第一个期望值如下:

$$\begin{aligned} E^R[1_{\{K_1 < S_T < K_2\}}] &= P_r[K_1 < S_T < K_2] \\ &= P_r[\ln(K_1/S) < \ln(S_T/S) < \ln(K_2/S)] \\ &= P_r \left[ \frac{\ln(K_1/S) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\Delta w^Q}{\sqrt{T}} \right. \\ &\quad \left. < \frac{\ln(K_2/S) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P, \left[ \underbrace{\frac{\ln(S/K_1) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}}_{d_{2,1}^*} > -\frac{\Delta w^Q}{\sqrt{T}} \right. \\
&\quad \left. > \underbrace{\frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}}_{d_{2,2}^*} \right] \\
&= N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*) \left[ -\frac{\Delta w^Q}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1) \right]
\end{aligned}$$

再次计算(13)内的第二个期望值如下：

$$\begin{aligned}
&E^Q[S_T 1_{|K_1 \leq S_T \leq K_2|}] \\
&= E^Q\left\{ S \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma(w_T^Q - w_0^Q)\right] 1_{|K_1 \leq S_T \leq K_2|} \right\} \\
&= Se^{(r-q)T} E^Q\left\{ e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma(w_T^Q - w_0^Q)} 1_{|K_1 \leq S_T \leq K_2|} \right\}, \text{ under Q measure}
\end{aligned}$$

Let

$$\xi_T = e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma(w_T^Q - w_0^Q)} = e^{\int_0^T \sigma dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 dt} \Rightarrow \xi_T \text{ is Girsanov factor}$$

$$\therefore dw^Q = dw^R + \sigma dt$$

$$\begin{aligned}
d\ln(S_t/S) &= \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw^Q \\
&= \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma(dw^R + \sigma dt) \\
&= \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw^R \\
\Rightarrow S_t &= S \exp\left[\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma(w_t^R - w_0^R)\right]
\end{aligned}$$

利用 Girsanov theorem, 第二个期望值成为

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Girsanov}}{=} Se^{(r-q)T} E^R[1_{|K_1 < S_T < K_2|}], \text{ under R measure} \\
&= Se^{(r-q)T} P_r^R[K_1 < S_T < K_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Se^{(r-q)T} P_r^R [\ln(K_1/S) < \ln(S_T/S) < \ln(K_2/S)] \\
&= Se^{(r-q)T} P_r^R \left[ \frac{\ln(K_1/S) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} < \frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}} \right. \\
&\quad \left. < \frac{\ln(K_2/S) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} \right] \\
&= Se^{(r-q)T} P_r^R \left[ \underbrace{\frac{\ln(S/K_1) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}}_{d_{1,1}} > -\frac{\Delta w_T^R}{\sqrt{T}} \right. \\
&\quad \left. > \underbrace{\frac{\ln(S/K_2) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}}_{d_{1,2}} \right] \\
&= Se^{(r-q)T} [N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})]
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
C &= e^{-rT} (y - \alpha K_1) [N(d_{2,1}^*) - N(d_{2,2}^*)] \\
&\quad + \alpha Se^{-qT} [N(d_{1,1}) - N(d_{1,2})]
\end{aligned}$$

#### 四、公式(14a),(14b)及(14c)的推导

先求(14a):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(d_{2,1}^*)}{\partial S} &= \frac{\partial N(d_{2,1}^*)}{\partial d_{2,1}^*} \frac{\partial d_{2,1}^*}{\partial S} = \frac{n(d_{2,1}^*)}{S\sigma \sqrt{T}}, \quad n(d_{2,1}^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{2,1}^{*2}}{2}} \\
\frac{\partial N(d_{2,2}^*)}{\partial S} &= \frac{n(d_{2,2}^*)}{S\sigma \sqrt{T}}, \quad n(d_{2,2}^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{2,2}^{*2}}{2}} \\
\frac{\partial N(d_{1,1})}{\partial S} &= \frac{n(d_{1,1})}{S\sigma \sqrt{T}}, \quad \frac{\partial N(d_{1,2})}{\partial S} = \frac{n(d_{1,2})}{S\sigma \sqrt{T}}
\end{aligned}$$

此处:

$$n(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}}, \quad b = d_{1,1}, d_{1,2}, d_{2,1}^*, \text{ or } d_{2,2}^*$$

将以上的偏微分代入(14a)即得  $\Delta \left( = \frac{\partial C}{\partial S} \right)$

然后求(14b):

$$\frac{\partial^2 N(d_{1,1}^*)}{\partial S^2} = \frac{\frac{\partial n(d_{2,1}^*)}{\partial S} (\sigma S \sqrt{T}) - n(d_{2,1}^*) (\sigma \sqrt{T})}{(\sigma S \sqrt{T})^2},$$

$$\begin{aligned} \text{where } \frac{\partial n(d_{2,1}^*)}{\partial S} &= \frac{\partial n(d_{2,1}^*)}{\partial d_{2,1}^*} \frac{\partial d_{2,1}^*}{\partial S} \\ &= \frac{\left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{2,1}^{*2}}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) 2d_{2,1}^* \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}}\right) \right] (\sigma S \sqrt{T}) - n(d_{2,1}^*) (\sigma \sqrt{T})}{\sigma^2 S^2 T} \\ &= -\frac{d_{2,1}^* n(d_{2,1}^*) + n(d_{2,1}^*) \sigma \sqrt{T}}{T \sigma^2 S^2} \\ &= \frac{-n(d_{2,1}^*) (d_{2,1}^* + \sigma \sqrt{T})}{T \sigma^2 S^2} \end{aligned}$$

同样的,

$$\frac{\partial^2 N(d_{2,2}^*)}{\partial S^2} = -\frac{d_{2,2}^* n(d_{2,2}^*) + n(d_{2,2}^*) \sigma \sqrt{T}}{T \sigma^2 S^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(d_{1,2})}{\partial S} &= \frac{\partial n(d_{1,1})}{\partial d_{1,1}} \frac{\partial d_{1,1}}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_{1,1}^2/2} \left( \frac{-1}{2} \cdot 2d_{1,1} \right) \frac{1}{S \sigma \sqrt{T}} \\ &= -n(d_{1,1}) d_{1,1} / (S \sigma \sqrt{T}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-rt} (y - aK_1) \left[ \frac{d_{2,2}^* n(d_{2,2}^*) - d_{2,1}^* n(d_{2,1}^*) + (n(d_{2,2}^*) - n(d_{2,1}^*)) \sigma \sqrt{T}}{T \sigma^2 S^2} \right]$$

$$+ a e^{-qt} \left[ \frac{-n(d_{1,1}) d_{1,1} + n(d_{1,2}) d_{1,2}}{S \sigma^2 T} \right]$$

$$+ a e^{-qt} \left[ \frac{n(d_{1,1}) - n(d_{1,2})}{S \sigma \sqrt{T}} \right] \text{ (简化即是(14b))}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = e^{-rt} (y - aK_1) [n(d_{2,1}^*) (1 - d_{2,1}^* / \sigma \sqrt{T}) \sqrt{T}]$$

$$\begin{aligned}
& -n(d_{2,2}^*)(1-d_{2,2}^*/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T}] \\
& +\alpha Se^{-qT}[n(d_{1,1})(1-d_{1,1}/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T} \\
& -n(d_{1,2})(1-d_{1,2}/\sigma\sqrt{T})\sqrt{T}]
\end{aligned}$$

### 五、公式(21b), (21c)及(21d)的推导

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial DC}{\partial S} = e^{-qT}N(Y_1) + Se^{-qT}\frac{\partial N(Y_1)}{\partial S} - Ke^{-rT}\frac{\partial N(Y_2)}{\partial S} \\
&= e^{-qT}N(Y_1) + Se^{-qT}n(Y_1)\frac{\partial Y_1}{\partial S} - Ke^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial S} \\
&\quad (\because Se^{-qT}n(Y_1) = He^{-rT}n(Y_2)) \\
&= e^{-qT}N(Y_1) + Se^{-qT}n(Y_1)\frac{\partial Y_1}{\partial S} - He^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial S} \\
&\quad + (H-K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial S} \\
&= e^{-qT}N(Y_1) + (H-K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \\
\Gamma &= \frac{\partial^2 DC}{\partial S^2} = e^{-qT}n(Y_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} + (H-K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{-1}{S^2\sigma\sqrt{T}} \\
&\quad + (H-K)e^{-rT}\left(-Y_2n(Y_2)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \\
&= e^{-qT}n(Y_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} - (H-K)e^{-rT}n(Y_2)\frac{1}{S^2\sigma\sqrt{T}}\left[1 + \frac{Y_2}{\sigma}\sqrt{T}\right] \\
Vega &= \frac{\partial^2 DC}{\partial \sigma} = Se^{-qT}n(Y_1)\frac{\partial Y_1}{\partial \sigma} - Ke^{-rT}n(Y_2)\frac{\partial Y_2}{\partial \sigma} \\
&= Se^{-qT}n(Y_1)\left(1 - \frac{Y_1}{\sigma\sqrt{T}}\right)\sqrt{T} \\
&\quad - Ke^{-rT}n(Y_2)\left(1 - \frac{Y_2}{\sigma\sqrt{T}}\right)\sqrt{T}
\end{aligned}$$



## 第七章 组合型权证的正确评价及避险方法

在本章中,我们证明不能直接套用 Black-Scholes(BS)模型来评价组合权证,直接利用 BS 的 Delta 来避险也不适当。我们推导出评价组合型权证的正确模型,同时提供规避组合型权证风险的正确方法。本章的结果对组合型权证发行券商在评价及避险方面提供正面的辅助。

**关键词:**组合型权证、Delta、Gamma、冲销风险、隐含波动度、避险效率。

### 一、前 言

组合型权证(Basket Options)是许多新奇选择权(Exotic Options)中很受欢迎的一种选择权,因为它可达到成本效益。避险者可以较低的成本(权利金的支付)获得有效的避险。比如说,进口商采购商品必须支付美元及马克,为规避美元及马克的汇率风险及降低权利金的支付,进口商可购买美元及马克为组合的买权(Basket Call Options)。其总成本一定会比个别购买美元及马克买权的权利支付低。这是因为美元及马克组合的波动度(Volatility)会比原来美元及马克的个别波动度还低(美元及马克的相关数低于 1)。同样的理由,组合型股票(A Basket of Stocks)的波动度也是低于组合内个别股票的波动度。因此,组合型权证的权利金低于个股权证的权利金,广受国外投资人的欢迎。

组合型权证发行人必须决定组合型权证的权利金及了解如何冲销风险。以大型指数权证(或选择权)而言,我们可利用统计理论的中央

极限定理(Central Limit Theorem)来推动,大型指数的价格变动过程很接近对数正态分布(Lognormal Distributions),因此我们可利用 Black-Scholes(BS)模型来评价(大型)指数权证。但对(小型)组合型权证而言,因它只包括少数几种不同的股票,因此我们不能将组合型权证价格变动的概率分布视为对数正态分布,更不能直接采用 BS 模型来评价(小型)组合型权证。否则评价误差会很大,而且避险比率也会被扭曲。因此,在本章中我们将介绍一些适当的方法,可用来评价组合权证及提供冲销风险的方法,并同时证明直接套用 Black-Scholes 模型来评价组合型权证是错误的。

在第二节中,我们首先介绍组合型权证的正确评价方法,并介绍有关实证的结果。第三节介绍如何规避发行组合型权证的风险。最后一节对本文的结果作结论。

## 二、组合型权证的评价

正如 Black-Scholes 模型,我们首先假设标的物的价格变动可由下列 Itô 方程式所代表:

$$dS_{it} = \mu S_{it} dt + \sigma_i S_{it} dz_{it} \quad (1)$$

此处:

$dS_{it}$  = 标的物的瞬间价格变量

$S_{it}$  = 股票(或标的物)在时间  $t$  的价格

$\mu_{it}$  = 股票  $i$  的瞬间期望报酬率(或收益率)

$\sigma_{it}$  = 股票  $i$  报酬率的瞬间标准差(或称波动度)

$z_{it}$  = 随机误差(Random Noise 或 White Noise)

$= N(0, 1)$ , 标准正态分布

$dz_{it}$  是  $z_{it}$  的瞬间变量

由数种不同股票组成一组合的(加权平均)价格  $B_t$  可表示如下:

$$B_t = \sum_{i=1}^n W_i S_{it} \quad (2)$$

此处,  $W_i$  = 股票  $i$  在组合内所占的权数(或百分比);若  $W_i = 1/n$ , 则  $B_t$  代表等权组合(Equally-Weighted Basket of Stocks)的价格。在到期时, 组合型认购权证的收益  $C_T$  (The Basket Payoff)可表示为:

$$C_T = \max(B_T - K, 0), \quad B_T = \sum_{i=1}^n W_i S_{iT}$$

在风险中立的环境下, 组合型买权在到期前任一时间  $t$  的价值  $C_t$  为

$$C_t = e^{-r\tau} E[\max(B_T - K, 0)] \quad (3)$$

此处:  $\tau$  = 权证的存续时间,  $r$  = 无风险利率

$E[\cdot]$  代表组合型权证的期望值。该期望值是以风险中立的概率分布做为计算基础(Equivalent Martingale Probability Measure)。

组合价格  $B_t$  的概率分布并不是对数正态分布, 因为即使个别单一变量价格呈现对数正态分布, 数个对数正态分布变量的加权平均价格( $B_t$ )却不会是对数正态分布。因此,  $B_t$  不是对数正态分布, 我们不能直接套用 Black-Scholes 模型来评价组合型认购权证<sup>①</sup>。虽然如此, 我们可借用数理统计(Mathematical Statistics)的理论将组合价格(加权平均价格)转换成几何平均价格, 并加上两项调整项目。而后, 由数理统计理论, 数个对数正态分布变量的几何平均价格才会仍是呈现对数正态分布。如此, 我们才可利用 Black-Scholes 的风险中立方法推导组合型认购权证(或买权)的适当评价模型, 进而推导出风险管理(或冲销风险)的方法。为推导方便计, 我们利用 Gentle(1994)的方法将(3)内

① 若是大型权证(诸如股价指数或大型组合权证)可直接假设整个 Basket 是 lognormal。但小型权证只包括少数几档个股, 按照数理统计原理则不可直接视为 lognormal。一般而言, 组合应包括至少 30 档以上的股票才可勉强视为 lognormal。有些学者建议为何不直接假设组合权证的标的本身(即组合本身)是 lognormal。是的, 可以。但问题是, 直接假设组合的本身是 lognormal 下, 其评价的准确度及避险效率并不及本文所介绍的模型。本文除了介绍一个比较适当的评价模型外, 并与直接套用 Black-Scholes 模型(即直接假设组合是 lognormal)进行实证比较, 其结果列于第四节。

的  $(B_T - K)$  项改写如下:

$$\begin{aligned}
 B_T - K &= \sum_i \left[ (W_i F_{it}) \left( \frac{S_{iT}}{F_{it}} \right) \right] - K, \quad \sum_i \text{ 代表 } \sum_i^n \\
 &= \left[ \sum_i \frac{W_i F_{it}}{\sum_j W_j F_{jt}} S_{iT}^* - \frac{K}{\sum_j W_j F_{jt}} \right] \sum_j W_j F_{jt} \\
 &= \left[ \sum_i X_i S_{iT}^* - K^* \right] \sum_j W_j F_{jt} \quad (4)
 \end{aligned}$$

此处:

$$X_i = \frac{W_i F_{it}}{\sum_j W_j F_{jt}}, \quad \sum_i X_i = 1, \quad K^* = \frac{K}{\sum_j W_j F_{jt}}$$

$F_{jt}$  = 在时间  $t$  股票  $j$  (或标的物  $j$ ) 的远期价格 (到期日  $T$ )  
 $= S_{jt} e^{r(T-t)}$

$$S_{iT}^* = S_{iT} / F_{it}$$

将(4)代入(3),并重新整理即成为

$$C_t = e^{-rt} E \left[ \max \left( \sum_i X_i S_{iT}^* - K^*, 0 \right) \right] \sum_j W_j F_{jt} \quad (5)$$

再次, Vorst (1992) 已推导出几何平均  $\prod_i S_{iT}^{*X_i}$  与算术平均  $\sum_i X_i S_{iT}^*$  间的关系如下:

$$\sum_i X_i S_{iT}^* \cong \prod_i S_{iT}^{*X_i} - E \left( \prod_i S_{iT}^{*X_i} \right) + E \left( \sum_i X_i S_{iT}^* \right) \quad (6)$$

此处:

$$\prod_i S_{iT}^{*X_i} = S_{1T}^{*X_1} S_{2T}^{*X_2} \dots S_{nT}^{*X_n}$$

$$E \left( \sum_i X_i S_{iT}^* \right) = \sum_i X_i E \left( \frac{S_{iT}}{F_{it}} \right) = \sum_i X_i = 1$$

$$[\because F_{it} = E(S_{it})]$$

将(6)代入(5)简化即得

$$C_t \approx e^{-r\tau} E \left[ \max \left( \prod_i S_{i\tau}^{*X_i} - K', 0 \right) \right] \sum_j W_j F_j \quad (7)$$

此处:

$$K' = K^* + E \left( \prod_i S_{i\tau}^{*X_i} \right) - E \left( \sum_i X_i S_{i\tau}^* \right)$$

是修正调整后的履约价格 (8)

公式(7)组合型权证价格  $C_t$  内的价格已经调整转换成为加权平均价格  $\prod_i S_{i\tau}^{*X_i}$ , 并藉之做基础来计算权证的价格。因  $\prod_i S_{i\tau}^{*X_i}$  的价格变动呈现对数正态分布, 我们可利用 Black-Scholes 风险中立的方法求出组合型权证  $C_t$  的评价模型。虽然我们以几何平均价格  $\prod_i S_{i\tau}^{*X_i}$  加上两个调整项来替代原来的权证价格(加权价格  $\sum_i X_i S_{i\tau}^*$ ), 并不是完全无误差, 但误差很小, 不值得重视(详见 Levy and Turnbull (1992))。反观, 若利用公式(3)内的权证价格直接套用 Black-Scholes 模型则会产生更大的评价误差及很不正确的避险比率。

在尚未利用 Black-Scholes 方法推导出公式(7)内组合型认购权证(或买权)的价格(或权利金)时, 我们必须首先求出公式(7)内几何平均价格  $\prod_i S_{i\tau}^{*X_i}$  的期望值及其波动度( $v$ )。我们可利用数理统计的理论求之如下:

重新改写几何平均价格:

$$\begin{aligned} \prod_i S_{i\tau}^{*X_i} &= \prod_i \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau} e^{r\tau}} \right)^{X_i} = \prod_i \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau}} \right)^{X_i} \prod_i (e^{-r\tau})^{X_i} \\ &= \prod_i \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau}} \right)^{X_i} e^{-r\tau \sum_i X_i} \\ &= \prod_i \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau}} \right)^{X_i} e^{-r\tau}, \quad \sum_i X_i = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \ln \left( \prod_i S_{i\tau}^{*X_i} \right) = \sum_i X_i \ln \left( \frac{S_{i\tau}}{S_{i\tau}} \right) - r\tau, \quad \tau = T - t$$

根据公式(1), 股票价格变动呈现 Itô 方程式暗示  $\ln(S_{i\tau}/S_{i\tau})$  是正

态分布,即  $N[(\mu_i - \sigma_i^2/2)\tau, \sigma_i^2\tau]$ ,

$$\therefore X_i \ln(S_{iT}/S_i) \sim N[X_i(\mu_i - \sigma_i^2/2)\tau, X_i^2\sigma_i^2\tau]$$

因此,利用数量统计  $\ln(\prod_i S_{iT}^{X_i})$  也会是正态分布<sup>①</sup>而且

$$\begin{aligned} \alpha - E[\ln \prod_i S_{iT}^{X_i}] &= \sum_i X_i(\mu_i - \sigma_i^2/2)\tau - r\tau \\ &= \sum_i X_i(-\sigma_i^2/2)\tau \quad (\because \sum_i X_i\mu_i\tau - r\tau = 0, \mu_i = r) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \text{Var}[\ln \prod_i S_{iT}^{X_i}] = (\sum_i X_i^2\sigma_i^2 + \sum_i \sum_{i \neq j} X_i X_j \sigma_{ij})\tau \\ &= v^2\tau \end{aligned} \quad (10)$$

$$v^2 = \sum_i X_i^2\sigma_i^2 + \sum_i \sum_{i \neq j} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$\sigma_i^2 = \text{Var}(dS_{iT}/S_{iT})$  (股票  $i$  的瞬间报酬率方差)

$\sigma_{ij} = \text{Cov}(dS_{iT}/S_{iT}, dS_{jT}/S_{jT})$  ( $i \neq j$  = 股票  $i$  及  $j$  瞬间报酬率的共变量)

所以,几何平均价格  $\prod_i S_{iT}^{X_i}$  的期望值为:

$$E(\prod_i S_{iT}^{X_i}) = e^{\alpha + \frac{1}{2}\sigma^{*2}} = m \exp\left(\frac{1}{2}v^2\tau\right) \quad (11)$$

$$m = e^{\alpha} = \exp\left[\sum_i X_i(-\sigma_i^2/2) \cdot \tau\right] \quad (12)$$

我们回到公式(7)。因(7)内的几何平均价格  $\prod_i S_{iT}^{X_i}$  变动呈现对数正态分布,我们就可利用 Black-Scholes 的方法来推导组合型认购构证的评价模型如下:(详见附录的推导)

$$C_t = e^{-rt} \left( \sum_i W_i F_u \right) \left[ m \exp\left(\frac{1}{2}v^2\tau\right) N(d_1) - K' N(d_2) \right] \quad (13)$$

① 假设各证券间的  $\ln(S_{iT}/S_i)$  是不相关(或独立)。它是一种近似假设,目的能使推导公式解更容易。多少会影响评价公式的准确性,由第四节的实证结果可验证,其准确性仍优于直接套用 Black-Scholes 模型的结果。

此处:

$$d_1 = v\sqrt{\tau} - \frac{\ln(K'/m)}{v\sqrt{\tau}} \quad (14)$$

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{\tau}$$

利用组合型认购权证评价模型(13), 我们可进一步推导组合型权证的 Delta( $\Delta$ )及 Gamma( $\Gamma$ ), 其结果如下: (详见附录的证明)

$$\Delta = \frac{\partial C_t}{\partial B_t} = N(d_1) \quad (15)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C_t}{\partial B_t^2} = \left( \sum_i W_i F_{it} \right)^{-1} \frac{e^{r\tau}}{K' v \sqrt{\tau}} f(y) \quad (16)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

此处:

$$\begin{aligned} B_t &= e^{-r\tau} E \left[ \prod_i S_{it}^{X_i} \right] \left( \sum_i W_i F_{it} \right) \\ &= e^{-r\tau} m \exp \left( \frac{1}{2} v^2 \tau \right) \sum_i W_i F_{it} \\ &= \text{在时间 } t \text{ 组合的价格(已转换为几何平均价格)} \end{aligned}$$

观察(15)及(16)可知, 组合型权证的 Delta 及 Gamma 像似 Black-Scholes 的 Delta 及 Gamma, 但完全不同。组合型权证的 Delta 及 Gamma 都含有组合内各股票远期价格的加权平均  $\sum_i W_i F_{it}$ , 但 Black-Scholes 则无此项。此外, 组合型权证内的  $d_i$  定义也完全不同于 Black-Scholes 的  $d_i$ 。由此可知, 若直接套用 Black-Scholes 模型来评价组合型权证, 则会产生很大的误差, 而且 Delta 及 Gamma 的计算也完全不正确。

利用 Vorst(1992)的结果, 将组合加权平均价格转换成几何平均价格, 加上两个调整项[公式(6)], 而后推导出的组合型权证评价模型[公式(13)]已由 Gentle(1994)证明其实证准确性不逊于 Rubinstein

(1991)二项模型的准确,且容易计算。此外,权证内各标的物间的报酬率相关系数愈低,权证的价格波动度也愈低,因此其权利金也愈低。(Gentle 采用外汇组合权证作实证资料)。

### 三、冲销风险

在第二节中我们已推导出组合型权证的 Delta 及 Gamma [公式 (15) 及 (16)]。但组合型权证的标的物是组合本身。组合本身并不是上市交易的公司股票。因此我们无法直接利用公式 (15) 的 Delta 来计算应购买或出售组合来进行冲销组合型权证的风险。另一种可行的冲销风险方法是,计算组合内每一个股的 Delta ( $\Delta_i = \partial C_i / \partial S_i$ )。此  $\Delta_i$  的决定可由数学微积分求之。也就是说,我们仍可对组合型权证  $C_i$  微分,取得组合内个股对组合整体风险应冲销的部分(即  $\partial C_i / \partial S_i$ )。虽然经由微分可硬推导出  $\partial C_i / \partial S_i$ ,但却是很复杂,难以了解。在实务应用上必须靠复杂的数值分析(Numerical Analysis)才能计算出组合内个股的避险部分( $\partial C_i / \partial S_i$ )。为避免计算上的复杂及费时,我们采取另一种可行的方法,分析如下。从公式 (15) 已知组合的总避险比率为  $\Delta$ , 所以篮指内个股风险应冲销的部位( $\Delta_i$ )应该占有整体组合权证总避险部位( $\Delta$ )的部分是个股  $i$  的风险占有组合总风险的比率( $X_i^*$ ),乘以组合总避险部位( $\Delta$ )。以公式表示如下:

$$\Delta_i = \frac{\partial C_i}{\partial S_i} \approx X_i^* \Delta, [\Delta = N(d_1)] \quad (17)$$

此处: $\Delta$  是组合型权证的 Delta,可由公式 (15) 计算出

个股  $i$  的风险占有组合整体风险的比例( $X_i^*$ )其实也就是投资理论所言的:个股  $i$  的价格变动对组合整体风险所注入或增加的风险。由公式表示则为:

$$X_i^* = \frac{X_i \text{Cov}(R_i, R_B)}{\sigma^2} = \frac{X_i \text{Cov}(R_i, R_B)}{\sum_{j=1}^n X_j \text{Cov}(R_j, R_B)} \quad (18)$$



此处:  $R_i = dS_i/S_i$  (股票  $i$  的报酬率)

$Cov(R_i, R_B)$  = 个股  $i$  与组合间的报酬率共变量。

$v^2$  = 组合的总风险

为何采用(18)的理由,很容易可证明如下:

由公式(10),已知调整修正后组合的总风险为:

$$\begin{aligned} v^2 &= \sum_i \sum_j X_i X_j \sigma_{ij}, \sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j) \\ &= \sum_i X_i Cov(R_i, R_B), R_F = \sum_j X_j R_j \textcircled{1} \end{aligned} \quad (19)$$

公式(19)告诉我们,组合总风险是个股风险对组合所注入风险  $[X_i Cov(R_i, R_B)]$  的总和。因此,个股  $i$  的风险对组合总风险所占有的比例应是(18)所示的  $X_i^*$ 。

因此,在冲销发行人组合型权证风险时,我们可以利用(17)的  $\Delta_i$  来计算应出售或购入适当数量的个股  $i$ ,以冲销组合权证的风险。在实务应用时,很容易计算  $\Delta_i$ ,因为组合总风险  $v^2$  及个股注入风险  $[X_i Cov(R_i, R_B)]$  都是很容易计算。所以,公式(17)的个股 Delta( $\Delta_i$ )不但计算容易,且具有理论基础的强力支持。

### 一、冲销风险的另一种选择

公式(18)的  $X_i^*$  提供我们在避险操作方面的另一种可行的选择。 $X_i^*$  代表组合内标的股  $i$  注入组合总风险的额外风险。也就是,标的股  $i$  风险占有组合总风险的分量(或百分比)。因此,若组合内少数标的股的风险  $[X_i Cov(R_i, R_B)]$  占有组合总风险( $v^2$ )的分量很高时,不妨只针对这些少数高分量标的股进行修正调整避险比率。其余标的股风险占有总风险的分量低时,可暂时忽略它。为更清楚说明,举一简例如下:

**例:** 假设某一组合型权含有四种标的股(1、2、3 及 4)。标的股与组合间的关系计算如下:

① 详见陈松男,书内证明。

标的股	$X_i$	$Cov(R_i, R_B)$	$X_i Cov(R_i, R_B)$	注入风险百分比( $X_i^*$ )
1	0.35	0.65	0.228	$51.70\% = [X_1 Cov(R_1, R_B)/v^2]$
2	0.30	0.55	0.165	$37.41\% = [X_2 Cov(R_2, R_B)/v^2]$
3	0.25	0.15	0.038	8.62
4	0.10	0.10	0.010	2.27
			$0.441 = v^2$	100%
			(总风险)	

观察上表得知,标的股 1 及 2 的风险占有组合总风险 ( $v^2 = 0.441$ ) 的 89.11% ( $= 51.70\% + 37.41\%$ ), 不妨对该两种高分量标的股进行调整避险比率 ( $X_i^* \cdot \Delta$ )。换言之,若组合总避险比率为 0.90 ( $= \Delta$ , 可由公式 (15) 计算), 则标的股 1 的避险比率为 0.47 ( $= 51.70\% \cdot 0.90$ ), 标的股 2 的避险比率为 0.34 ( $37.41\% \cdot 0.90$ )。至于标的股 3 及 4 可暂时忽略它。较保守的操作方法,可再加入标的股 3。如此,前 3 个标的股的风险占有组合总风险的比率为 97.73%。(忽略标的股 4 的避险操作)。

## 二、常被误用的方法

公式(17)及(18)是计算组合型权证标的股的正确避险比率公式。应注意的事是,某些实务界误用下列公式计算标的股应占有组合避险部分的比率如下:

$$X'_i = \frac{\rho_{iB}}{\sum_{j=1}^n \rho_{jB}} \quad (20)$$

此处:  $\rho_{iB} = Corr(R_i, R_B)$

公式(20)内的  $X'_i$  完全不同公式(18)的  $X_i^*$ 。 $X'_i$  并不是个股  $i$  的价格变动对组合总风险所注入或增加的风险,其理由如下:

1.  $X'_i$  的分母  $\sum_{j=1}^n \rho_{jB}$  并不代表组合的总风险:

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jB} = \sum_j \frac{Cov(R_j, R_B)}{\sigma_j \sigma_B} \neq \sum_j X_j Cov(R_j, R_B) = v^2$$

$$\left( \because \frac{1}{\sigma_i \sigma_B} \neq X_i \right)$$

2.  $X'$  的分子  $\rho_{iB}$  并不是代表标的股  $i$  风险注入组合总风险的部分:

$$\rho_{iB} = \frac{Cov(R_i, R_B)}{\sigma_i \sigma_B} \neq X_i Cov(R_i, R_B) \quad \left( \because \frac{1}{\sigma_i \sigma_B} \neq X_i \right)$$

由上面的证明可知,采用公式(20)的  $X'$  作为标的股占有组合避险部位的比率是不正确的。正确的计算是根据公式(18)的  $X_i^*$ 。此外,当组合内个股的数目增加至大型加权指数时,  $X_i^*$  也不会接近  $X_i'$  (很容易可证明之)。采用公式(18)的  $X_i^*$  才是正确的方法。

#### 四、实证研究

本节实证研究主要针对中国台湾证券交易所挂牌交易而目前已经到期之组合型认购权证,共计 4 档分别是宝来 01 地产股组合认购权证、宝来 02 科技股组合认购权证、中信 01 金融股组合认购权证、建弘 01“电子指数概念”组合型认购权证。资料来源为中国“台湾经济所报”资料库。<sup>①</sup>

上述 4 只认购权证的标的股票包括:国建、太设、中工、中石化、华新、宏电、大众、中环、茂矽、明电、中信银、农银、复华、国寿、联电、仁宝、国巨、旺宏、华邦等 19 只股票。资料来源为中国“台湾经济新报资料库”及“AREMOS 经济统计资料库”。以每日收盘价格作为计算日报酬率、报酬率相关系数及共变量。

在计算波动度时,将根据前一天组合型认购权证的收盘价格及当

<sup>①</sup> 虽然中国台湾权证均为美式权证,但因现金股利调整的结果,它像似欧式权证。当标的股在前期发放现金股利时,按照证期会规定,履约价格必须往下修正调整。因此,现金股利对权证的价格不产生影响。在这种情况下,美式权证的标的设可视为无现金股利的股票。因此,从理论而言,美式权证可视为欧式权证(至少很接近)。此外,中国台湾投资人极少在到期前行使提前执行,因此,虽是美式权证,但实际已几乎是欧式权证。所以,欧式权证的评价模型仍适用于中国台湾的权证,而不会产生误差。这解释为何中国台湾实务界均以欧式模型来评价中国台湾权证。

时之利率、权重、存续期间、标的价值( $B_t$ )、履约价格等计算出隐含波动度,并以此隐含波动度作为估计次日组合型认购权证理论价格之输入变量。个股的隐含波动度也以类似的方式求得。(采用 Bisection Method 的方法求得隐含波动度。)

为计算公式(9)及(10)内的个股标准差( $\sigma_i$ )及几何平均报酬率的方差 $v^2$ ,我们采用 Garman-Klass 的方法,此方法提供比较有效率的统计估计值。Garman 及 Klass 的波动度估计公式如下<sup>①</sup>:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} [\log(H_t/L_t)]^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [2\log(2) - 1] \times [\log(C_t/O_{t-1})]^2 \right\}} \quad (21)$$

此处:

$H_t$ :为当日最高价, $L_t$ :为当日最低价

$C_t$ :为当日收盘价, $O_{t-1}$ :为前日收盘价

为利用公式(21)计算组合型权证的模型价格 $C_t$ ,除了需要标的股价外,还需要利率、履约价格( $K$ )、权重等等资料。我们采用的利率为一年期定存利率一月资料(由中国“台湾经济新报资料库”取得)。履约价格、个股权重(行使比率)为各发行券商所订定,并按照各发行证券商应标的股票发行股票股利、现金增资所调整的履约价、个股权重做为计算组合型认购权证的每日价格。资料来源为“各发行证券商之认购权证公开说明书”及相关之“调整认购权证履约价格、行使比率的公告事项”。

比较本文的模型价格(公式(13))是否优于直接套用 Black-Scholes (以后简称 BS)模型所估计出来的价格,我们采用的评鉴原则是,何者更能接近组合型权证的市价,也就是何者对市价的误差为最低。当然模型价格愈接近市场价格,愈能显示它的估价能力<sup>②</sup>。

① 波动度有数种估计方法,诸如随机漫步、Garch、Egarch、Volatility Smiles 等等。至于哪一种方法比较好,是一个重要的研究议题,将会在未来进行实证研究。

② Monte Carlo 用来评鉴估价的品质(准确性)并不见得是绝对的好方法,它的估计值标准差(Standard Error of Estimates)会随着标的物波动度的增大而增加。因此,对评鉴估价品质而言,它可以说是一种相对不良的标准。详见:Bouaziz, Briys and Grouhy(1994)。

我们采用两种估计误差的方法,来作判别:1. 平均平方误差及其标准差;2. 平均绝对误差及平均绝对误差率。其公式分述如下:

1. 平均平方误差:

$$\frac{\sum_{t=1}^n (P_t - P_{mt})^2}{n}$$

此处:

$P_t$  = 在  $t$  日的理论模型价格(或 BS 模型价格)

$P_{mt}$  = 组合权证在  $t$  日的收盘价格(即市价)

$n$  = 组合权证的交易天数

2. 平均平方误差的标准差:以统计的标准公式求之。

3. 平均绝对误差:

$$\frac{\sum_{t=1}^n |P_t - P_{mt}|}{n}$$

4. 平均绝对误差率:

$$\frac{\sum_{t=1}^n |(P_t - P_{mt})/P_{mt}|}{n}$$

根据以上估计误差的方法,本文理论模型与 BS 模型对 4 种组合型权证估价与市价间的估计误差报告于表 1 如下。

表 1 4 种组合型认购权证之理论模型价格、BS 模型价格与市价间的估计误差

权 证	判别方法			
宝来 01	1. 平均平方差	2. 平方差标准差	3. 平均绝对差	4. 平均绝对差率
理论模型	0.083 994 025	0.196 279 935	0.190 650 231	0.074 967 265
BS 模型	0.147 598 818	0.212 095 502	0.297 734 809	0.296 356 166
宝来 02	1. 平均平方差	2. 平方差标准差	3. 平均绝对差	4. 平均绝对差率
理论模型	0.108 982 935	0.639 236 234	0.151 789 507	0.055 628 021
BS 模型	1.065 999 289	1.657 131 511	0.727 801 648	2.236 125 649
中信 01	1. 平均平方差	2. 平方差标准差	3. 平均绝对差	4. 平均绝对差率
理论模型	0.203 607 526	2.210 432 085	0.131 406 737	0.034 540 349
BS 模型	0.407 726 147	2.144 977 175	0.367 074 185	1.040 681 082

权 证	判别方法			
建弘 01	1. 平均平方差	2. 平方差标准差	3. 平均绝对差	4. 平均绝对差率
理论模型	0.066 858 098	0.135 222 842	0.172 999 045	0.059 587 728
BS 模型	0.702 987 096	1.581 883 95	0.568 671 194	0.035 299 19

观察表 1 的结果可知,由本文理论模型对宝来 01、宝来 02、中信 01、建弘 01 所计算出的价格与市价之误差都小于 BS 模型所计算出的价格与市价的误差,而且误差的波动较为稳定(因为平方差标准差较小),最明显的是建弘 01,本文理论模型的价格与市价的估计误差仅有 0.07 元平方的误差(平均平方差),而 BS 模型估价与市价的误差达到 0.7 元平方,超过理论模型的误差有 10 倍之多。就平方差标准而言,除了建弘 01 外,理论模型的标准差都比 BS 模型的标准差小的很多。理论模型的建弘 01 标准差仅是稍微高于 BS 模型(仅超过 0.065 而已)。至于平均绝对误差及平均绝对误差率(最后两栏),本文理论模型至少 3 倍小于 BS 模型误差。根据上面实证结果,本文理论模型对组合型权证的估价的确实优于 BS 模型。

### 一、避险效率

准确评价模型的避险效率应高于不准确的评价模型(此处指直接套用 BS 模型来评价组合型权证或篮指权证)。为求算本文模型与 BS 模型的避险效率,我们必须根据该两种模型所建议的避险比率(Delta)来建立避险组合。按照理论,避险组合的价值对标的价格的变动应不具有敏感性。也就是说,避险组合的价值随标的价格变动的幅度愈低,显示愈具有避险效率。应用于此,我们将于下文求证:在本文模型下,避险组合随标的价格(权证价格)变动的敏感性(价值变量)低于 BS 模型下的避险组合。因此,前者的避险效率高于后者。

### 二、建构避险组合:

避险组合包括 3 成分:标的股票(现股)、存借款(Borrowing or Lending)以及权证本身。在决定应持有的股权时,(本文)理论模型是按照公式(15)、(17)及(18)来计算组合型权证内个股的  $\Delta_i =$

$X_i^* \cdot \Delta = (18) \times (15)$ ), 而 BS 模型则首先按照 BS 的 Delta 公式来计算组合型权证的 Delta ( $\Delta^*$ ), 再利用公式 (20) 求算个股的 Delta ( $\Delta_i = X_i^* \cdot \Delta^* = (20) \times \Delta^*$ )。此外, 也以原始权重 (公式 (2) 内的  $W_i$ ) 来计算在 BS 模型下的个股 Delta ( $\Delta_i = W_i \times \Delta^*$ )。

从权证上市开始第一天起, 避险组合的建立如下: 将收到之权利金作为购买现股建立避险组合之用, 而买卖现股所需要的金额扣减权利金后, 不足的部分则以借款将差额补齐。所以在期初时避险组合的价值为零 (即 Self-Financing 组合的观念)。在次一交易日, 再按照当天所应有持股数 (由 Delta 计算决定) 卖出多余的股数并偿还债务或以融资方式再买进不足之股数, 如此, 逐日修正调整。在建立及修正调整避险组合时, 交易成本也加入考量。交易成本包括: (1) 买卖股票成本: 包括发行券商买进股票时, 要缴交千分之 0.5 的手续费; 卖出股票时要缴交千分之 0.5 (自营商缴交证交所之手续费) 及千分之 3 (交易税) 的手续费。(2) 利息成本: 采用一年期定存利率作为利息计算的依据。

### 三、避险组合价值的计算:

根据上述所建构的避险组合, 在每天收盘时按照个股个数乘上相对应的收盘价, 再减去融资成本及认购权证在收盘时的价值, 最后可求得每日避险组合的价值。在期初避险组合的价值为零 (即 Self-Financing)。之后, 因标的价格的波动, 避险组合的价值会偏离零。其价值愈偏离零, 显示对标的股价变动愈具敏感性 (即其变动幅度愈大), 则避险效率显示愈差。表 2 分别列报理论模型及 BS 模型避险组合的效率。避险效率是以各避险组合每日价值偏离零的平均绝对值大小作为评鉴依据。同时, 我们也计算每一避险组合每日价值的绝对值是否小于另一避险组合每日价值的绝对值。每日价值绝对值小于另一组绝对值的天数愈多, 显示其价值对标的价格的变动愈不具有敏感性, 其避险效率愈好。

观察表 2 可知, 以绝对平均值来说, 宝来 01、宝来 02、建弘 01 都显示理论模型 (即同时考虑协方差及修正权值, 公式 (15)、(17) 及 (18)) 的避险方法较优; 以最佳避险天数来看, 宝来 01、宝来 02、中信 01、建

表 2 认购权证避险效率总表

	宝来 01 地产股		宝来 02 科技股	
	平均绝对值	避险优异天数	平均绝对值	避险优异天数
本文理论模型				
1. 协方差及修正权值(公式(15)、(17)及(18))	27 840 098	149	143 770 305	174
BS 模型				
1. 相关系数(公式(20))	31 545 202	109	151 006 658	23
2. 原始权重(公式(2)的 $W_i$ )	32 081 346	13	145 046 546	74
	中信 01 金融股		建弘 01 电子股	
	平均绝对值	避险优异天数	平均绝对值	避险优异天数
本文理论模型				
1. 协方差及修正权值(公式(15)、(17)及(18))	37 061 090	112	64 620 033	260
BS 模型				
1. 相关系数(公式(20))	24 185 017	74	255 277 353	0
2. 原始权重(公式(2)的 $W_i$ )	27 185 348	83	268 768 895	7

弘 01 的理论模型在大部分的时间,其避险效率都优于 BS 模型的两组(相关系数(公式(20)),及原始权重  $\Delta_i = W_i \times \Delta^*$ )。以建弘 01 为例:由建弘 01 认购权证、相关履约标的个股及存借款所建构的避险组合,理论模型的稳定性(平均绝对值)约是 BS 模型两组的 4 倍。又,在组合认购权证的存续期间内,理论模型所采用的避险方式共计有更多的天数表现优于其他两种 BS 模型所建构之避险组合(当天避险组合价



值的绝对值是比较低的或最小的)。就宝来 01 及 02 而言,理论模型组的避险优异天数分别为 149 天及 174 天,远高于 BS 模型的两组。中信 01 及建弘 01 也显示理论模型的优异。虽然中信 01 的理论模型在平均绝对值的判别下表现不如 BS 模型组,但以避险优异天数而言,理论模型却有 112 天,而 BS 模型的两组只有 74 天及 83 天。因此,虽然我们无法确定理论模型对中信 01 权证避险的效率是绝对优于 BS 模型,但至少可与 BS 模型持平。就 4 个组合型权证整体而言,理论模型依照个股对整体权证所注入的风险程度当作避险比率的考量(即公式(15)、(17)及(18))可说是较佳的避险方法。此外,第一部分的实证结果证明,理论模型对组合型权证的估价比 BS 模型更接近权证的市场价格。

## 五、结 论

在本文中,我们已经证明不能直接套用 Black-Scholes 模型来评价组合型权证、也不适宜直接利用 BS 的 Delta 来避险。我们在本文中推导出评价组合型权证的正确模型,同时提供规避组合型权证风险的正确方法。本文的理论及实证结果对组合型权证发行人在评价及避险方面提供正面的辅助。

## 参 考 文 献

- 陈松男,“选择权与期货”,新陆书局及复旦大学出版社(上海)。  
陈松男,“现代投资学”,新陆书局及复旦大学出版社(上海)。  
L. Bouaziz, E. Briys and M. Crouhy (1994), “The Pricing of Forward-starting Asian Options”, *Journal of Banking & Finance* 18, p. 823—839.  
C. B. Huynh, (1995), “Back to Baskets”, *Over the Rainbow*, Risk publication, Chapter 19, p. 148—150. Also appeared in *Risk* (May 1994).  
D. Gentle, (1995), “Basket Weaving”, *Over the Rainbow*, Risk publication,

Chapter 18, p. 143—145. Also appeared in *Risk* (May 1993).

E. Levy, and S. Turnbull (1992), "Average Intelligence", *From Black-Scholes to Black Holes*, Risk publication, Chapter 23, p. 157—164. Also appeared in *Risk*, (February 1992).

M. Rubinstein, (1991) "Somewhere Over the Rainbow", *Risk*, November, p. 61.

T. Vorst, (1992), "Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Option", *International Review of Financial Analysis*, Vol. 1, No. 3, p. 179—194.

## 附 录

### 一、证明公式(13):

将 Black-Scholes 模型应用于(7)内:

$$\begin{aligned}
 C_t &= \left( \sum_i W_i F_{it} \right) \underbrace{e^{-rt} E \max \left( \prod_i S_{it}^{*x_i} - K', 0 \right)}_{\text{应用 BS 模型}} \\
 &= \left( \sum_i W_i F_{it} \right) \left[ \left( \prod_i S_{it}^{*x_i} \right) N(d_1) - K' e^{-rt} N(d_2) \right] \\
 &= \left( \sum_i W_i F_{it} \right) \left[ e^{-rt} E \left( \prod_i S_{it}^{*x_i} \right) N(d_1) - K' e^{-rt} N(d_2) \right]
 \end{aligned}$$

此处:在风险中立下,

$$e^{-rt} E \left( \prod_i S_{it}^{*x_i} \right) = \prod_i S_{it}^{*x_i}$$

$$\therefore C_t = e^{-rt} \left( \sum_i W_i F_{it} \right) \left[ \exp \left( \frac{1}{2} v^2 \tau \right) N(d_1) - K' N(d_2) \right]$$

利用(11)

以上公式中, 履约价格 =  $K'$ , 组合权证价格 =  $\prod_i S_{it}^{*x_i} = e^{-rt} E \left( \prod_i S_{it}^{*x_i} \right)$ , 组合权证  $Vol. = v$ , 因此, 由 BS 模型的  $d_1$  定义, 我们可直接书写  $d_1$  如下:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln[e^{-r\tau} E(\prod_i S_{i\tau}^{*X_i} / K')] + (r + v^2/2)\tau}{v\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln[E(\prod_i S_{i\tau}^{*X_i})] - \ln K' + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln(e^{r+v^2/2}) - \ln K' + v^2\tau/2}{v\sqrt{\tau}}, E(\prod_i S_{i\tau}^{*X_i}) \\
&= e^{r+v^2/2} (\text{由 lognormal 的性质}) \\
&= \frac{\alpha - \ln K' + v^2\tau}{v\sqrt{\tau}} \\
&= v\sqrt{\tau} - \frac{\ln(K'/m)}{v\sqrt{\tau}} \quad [\because E(\ln \prod_i S_{i\tau}^{*X_i}) = \alpha = \ln e^r = \ln m] \\
d_2 &= d_1 - v\sqrt{\tau}
\end{aligned}$$

二、公式(15)及(16)的证明如下:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial C_t}{\partial B_t} = N(d_1) \\
\Gamma &= \frac{\partial^2 C_t}{\partial B_t^2} = \frac{\partial}{\partial B_t} \int_{-\infty}^{v\sqrt{\tau}-h} f(y) dy, \quad h = \frac{\ln(K'/m)}{v\sqrt{\tau}} \\
&= f(y) \frac{\partial}{\partial B_t} (v\sqrt{\tau} - h) \\
&= f(y) \frac{\partial}{\partial B_t} (v\sqrt{\tau} - \ln(K'/m)/v\sqrt{\tau})
\end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}
K' &= K^* + E(\prod_i S_{i\tau}^{*X_i}) - E(\sum_i X_i S_{i\tau}^*) \\
&= f(y) \left( 0 - \frac{(1/K')}{v\sqrt{\tau}} \frac{\partial}{\partial B_t} K' \right)
\end{aligned}$$

$$= \left( \sum_i W_i F_{it} \right)^{-1} f(y) \left[ \frac{1}{K' v \sqrt{\tau}} (0 + e^{r\tau} - 0) \right]$$

此处:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial B_t} (E \prod_i S_{it}^{*X_i}) &= e^{r\tau} \left( \sum_i W_i F_{it} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial B_t} \underbrace{(e^{-r\tau} E \prod_i S_{it}^{*X_i} \sum_i W_i F_{it})}_{B_t} \\ &= e^{r\tau} \left( \sum_i W_i F_{it} \right)^{-1} \\ &= \left( \sum_i W_i F_{it} \right)^{-1} \frac{e^{r\tau}}{K' v \sqrt{\tau}} f(y) \end{aligned}$$

注: 利用积分规则:  $\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{v(x)} g(y) dy = g(y) \frac{d}{dx} v(X)$ ,  $g(y)$  is not a function of  $X$ .

## 第八章 欧式及美式数据选择权 (Digital Options)

### 一、简介

欧式数据买权(European Digital Calls)在到期时支付投资人某一固定金额  $X$ ,条件是到期时标的价格大于履约价( $K$ )。也就是

$$C_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_T > K \\ 0, & \text{若不是(也可设定为 } X \text{ 单位的标的物)} \end{cases}$$

欧式数据卖权(European Digital Puts)在到期时也支付投资人某一固定金额  $X$ ,若到期时标的价格低于履约价:

$$P_T = \begin{cases} X & \text{若 } S_T < K \\ 0 & \text{若不是。} \end{cases}$$

至于美式数据选择权,在到期前任一时刻,若标的价格高于(或低于)履约价,则在当时立即支付某一固定金额  $X$ ,也可设定延迟至到期时再支付。在本章中,我们将介绍欧式及美式选择权的评价。

### 二、欧式数据选择权

#### 一、欧式数据买权的评价

在风险中立下,欧式数据买权的价值( $DC$ )为

$$\begin{aligned}
 DC &= e^{-r} E[ X I_{|S_T > K|} ] \\
 &= e^{-r} X E( I_{|S_T > K|} ) \\
 &= e^{-r} X N(d_2)
 \end{aligned} \tag{1}$$

此处:  $E(I_{|S_T > K|}) = N(d_2)$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - q - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{2}$$

$\tau = T - t$  ( $t$  是现在评价时点)

## 二、欧式数据卖权的评价

在风险中立下, 欧式数据卖权的价值(DP)为:

$$\begin{aligned}
 DP &= e^{-r} E[ X I_{|S_T < K|} ] = e^{-r} X E[ I_{|S_T < K|} ] \\
 &= e^{-r} X [1 - P_r(S_T > K)] \\
 &= e^{-r} X [1 - N(d_2)] \\
 &= e^{-r} X N(-d_2)
 \end{aligned} \tag{3}$$

## 三、避险比率 Delta

$$\text{买权: } \Delta_{DC} = \frac{\partial DC}{\partial S} = e^{-r} \times \frac{1}{\sigma S \sqrt{\tau}} n(d_2) \tag{4}$$

$$\text{卖权: } \Delta_{DP} = \frac{\partial DP}{\partial S} = -e^{-r} \times \frac{1}{\sigma S \sqrt{\tau}} n(d_2) = -\Delta_{DC} \tag{5}$$

$$n(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_2^2/2}$$

虽然(4)及(5)式的避险比率涉及标的价格  $S$ , 但一般不使用(4)及(5)作为避险依据。常用的方法是利用买权牛市价差来规避发行数据买权的风险。牛市价差内的长部位买权(低履约价  $K_L$ )及短部位(高履约价  $K_U = K$ ), 应调整使其履约价差( $K_U - K_L$ )等于数据买权支付的金额  $X$  (即  $K_U - K_L = X$ ), 因为在到期时, 当标的价格高于履约价  $K (= K_U)$ , 牛市价差达到最大利润  $K_U - K_L (= X)$ 。若加入考量牛市价差的

建构成本  $y$  时,应尽量选择  $K$  及  $K_L$  ( $K = K_U$ ) 的价差减掉成本  $y$  等于  $X$  [即,  $(K - K_L) - y = X$  ]。

同样道理,对数据卖权的避险可采用卖权的熊市价差,履约价差  $(K_U - K_L)$  等于  $X$  ( $K_L = K$ ,  $K$  是数据卖权的履约价)。若建构卖权价差时有收入  $h$ ,则可选择  $(K_U - K) - h = X$ 。

### 三、美式数据选择权

美式数据选择权的评价比欧式数据选择权的评价更困难。我们首先考虑延迟支付现金  $X$  至到期日的情况,而后考量立即支付的另一种情况。

#### 一、延迟现金支付至到期日 $T$

##### 1. 美式数据买权(American Digital Calls)

首先我们改写标的价格的变动过程如下:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t \quad (6)$$

$$d\ln(S_t/S) = (r - q - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t \quad (7)$$

$$\therefore \ln(S_t/S) = (r - q - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

$$W_t + vt = \frac{1}{\sigma} \ln(S_t/S) \quad (8a)$$

此处:

$$v = (r - q - \sigma^2/2)/\sigma \quad (8b)$$

$W_t + vt$  代表有漂浮项的布朗运动(Drifted Brownian Motion),  $v > 0$ 。

根据(8)式,我们可表示在到期前标的价格第一次触及履约价  $K$  的时点为  $T_y^v$ :

$$\tau_y^v = \inf\{t \mid W_t + vt = y\} \quad (9a)$$

此处:

$$y = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \ln(K/S) > 0 \quad (S < K) \quad (9b)$$

当标的价格触及  $K (S_t = K)$  即是有漂浮项布朗运动  $(W_t + vt)$  触及  $\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ln(K/S)$  的价位。假设期初股价  $S$  小于  $K$ , 而后往上升触及  $K$ 。

根据(9a)及美式数据买权在到期时的现金流量(延迟至到期日支付)为

$$ADC_T = XI_{|\tau_y^v \leq T|} \quad (10)$$

此处:  $X$  = 固定支付金额

故在风险中立下, 美式数据买权的现在 ( $t = 0$ ) 价值应为

$$ADC = e^{-rT} X E[I_{|\tau_y^v \leq T|}] = X e^{-rT} P_r(\tau_y^v \leq T) \quad (11)$$

为求解(11)式的概率, 我们必须首先知道第一触及时点  $\tau_y^v$  (First Hitting Time) 的概率分布函数。根据 Brockhaus, Ferraris, etc. (1999, p. 14) 从任一时点  $T$  起,  $T_y^v$  的(累积)概率分布为:

$$P_r^*[\tau_y^v \leq T] = N\left(\frac{y - vT}{\sqrt{T}}\right) + e^{2vy} N\left(\frac{y + vT}{\sqrt{T}}\right) \quad (12)$$

因  $\tau_y^v$  可能发生于瞬间时刻, 我们必须将(12)式转换成为发生于瞬间时刻( $dt$ )的概率分布; 也就是对(12)式的  $T$  微分如下:

首先微分两个小项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{y - vT}{\sqrt{T}} \right) &= \frac{\sqrt{T}(0 - v) - (y - vT) \frac{1}{2} T^{-1/2}}{(\sqrt{T})^2} \\ &= \frac{\left( -Tv - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}vT \right) \frac{1}{\sqrt{T}}}{T} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{y + vT}{T^{3/2}} = -\frac{1}{2} (y + vT) T^{-3/2} \\ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{y + vT}{\sqrt{T}} \right) &= -\frac{1}{2} (y - vT) T^{-3/2} \end{aligned} \quad (13)$$



则第一次瞬间时刻( $\tau_y^v$ )触及  $y$  的概率分布为:

$$\begin{aligned}
 P_r[\tau_y^v \in dt] &= \frac{\partial}{\partial T} P_r^*[\tau_y^v \leq T] \\
 &= \frac{\partial}{\partial T} N\left(\frac{y-vT}{\sqrt{T}}\right) + e^{2vy} \frac{\partial}{\partial T} N\left(\frac{y+vT}{\sqrt{T}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-vt)^2/2t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{y-vt}{\sqrt{t}} \right] \\
 &\quad + e^{2vy} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y+vt)^2/2t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{y+vt}{\sqrt{t}} \right) \right] \quad (0 \leq t \leq T) \\
 &= \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-vt)^2/2t} (y+vt) t^{-3/2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} e^{2vy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y+vt)^2/2t} (y-vt) t^{-3/2} \quad (14)
 \end{aligned}$$

此处:为简单计,在(14)式内,以  $t$  来表示  $\tau_y^v$ ,  $0 \leq t \leq T$ 。

利用(14)式,我们可求算(11)式内  $P_r(\tau_y^v \leq T)$  的概率如下:

$$\begin{aligned}
 P_r(0 \leq \tau_y^v \leq T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^T - (y+vt) t^{-3/2} e^{-(y-vt)^2/2t} dt \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{2vy} \int_0^T - (y-vt) t^{-3/2} e^{-(y+vt)^2/2t} dt \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

就第一积分部分,令  $u = \frac{y-vt}{\sqrt{t}} \Rightarrow du = d\left(\frac{y-vt}{\sqrt{t}}\right) = \frac{-1}{2}(y+vt)t^{-3/2}dt \Rightarrow dt = -2(y+vt)^{-1}t^{3/2}du$

当  $t = 0$ ,  $u = \infty$

当  $t = T$ ,  $u = \frac{y-vT}{\sqrt{T}} = a_2$  (设定之)

$$\therefore \text{第一积分部分} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_2}^{\infty} \frac{1}{2} (y+vt) t^{-3/2} e^{-u^2/2}$$

$$\begin{aligned}
 & \times | -2(y+vt)^{-1}t^{3/2} | du \\
 & = \int_{-\infty}^{-a_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = N(-a_2) \\
 & = N\left(-\frac{y-vT}{\sqrt{T}}\right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

就第二积分部分, 令  $x = \frac{y+vt}{\sqrt{t}} \Rightarrow dx = d\left(\frac{y+vt}{\sqrt{t}}\right) = \frac{-1}{2}(y-vt)t^{-3/2}dt \Rightarrow dt = -2(y-vt)^{-1}t^{3/2}dx$

当  $t=0$ ,  $x=\infty$

当  $t=T$ ,  $x = \frac{y+vT}{\sqrt{T}} = a_1$  (设定之)

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{第二积分部分} &= e^{2vy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{2}(y-vt)t^{-3/2} e^{-x^2/2} \\
 & \times | -2(y-vt)^{-1}t^{3/2} dx | \\
 &= e^{2vy} \int_{-\infty}^{-a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{2vy} N(-a_1) \\
 &= \exp\left[2\left(\frac{r-q-\sigma^2/2}{\sigma}\right)\left(\frac{\ln(K/S)}{\sigma}\right)\right] N(-a_1) \\
 &= (K/S)^{2(r-q-\sigma^2/2)/\sigma^2} N\left(-\frac{y+vT}{\sqrt{T}}\right) \quad (17)
 \end{aligned}$$

最后, 将(16)及(17)代入(15), 并代入(11)即得美式数据买权的评价, 公式如下:

$$ADC = Xe^{-rT} [N(-a_2) + (K/S)^{2(r-q-\sigma^2/2)/\sigma^2} N(-a_1)] \quad (18)$$

此处:  $a_1 = \frac{y+vT}{\sqrt{T}}$ ,  $y = \left(\frac{1}{\sigma}\right)\ln(K/S)$

$$a_2 = \frac{y-vT}{\sqrt{T}}, \quad v = (r-q-\sigma^2/2)/\sigma$$

## 2. 美式数据卖权(American Digital Puts)

就卖权而言,我们考虑期初标的价格高于履约价,  $S > K$ 。则美式数据卖权在到期时的现金流量(延迟至到期日支付)为:

$$ADP_T = XI_{|\tau_y^v| \leq T} \quad (19)$$

在风险中立下,美式数据卖权的现在( $t=0$ )价值为:

$$\begin{aligned} ADP &= e^{-rT} X E[I_{|\tau_y^v| \leq T}] \\ &= e^{-rT} X P_r[\tau_y^v \leq T] \\ &= e^{-rT} X P_r[\tau_{-y}^{-v} \leq T] \end{aligned} \quad (20)$$

利用布朗运动  $W_t$  概率分布的对称性质:

$$P_r[\tau_y^v \leq T] = P_r[\tau_{-y}^{-v} \leq T]$$

亦即

$$\begin{aligned} \tau_y^v &= \inf\{t \mid W_t + vt = y\} \\ &= \inf\{t \mid (-W_t) + (-v)t = (-y)\} \text{ (对称性质)} \\ &= \tau_{-y}^{-v} (-y > 0, \because S < K, \text{见(9b)}) \end{aligned}$$

利用求解美式数据买权的方法,将原来的  $y$  及  $v$  分别以  $-y$  及  $-v$  替代,即可获得美式数据卖权的评价模型如下:

$$ADP = e^{-rT} X [N(a_2) + (K/S)^{2(r-q-\sigma^2/2)/\sigma^2} N(a_1)] \quad (21)$$

## 二、立即支付型

当标的价格触及  $K$  (即  $W_t + vt$  触及  $y$ ) 时,立即支付固定金额  $X$  的评价不同于前一节延迟支付的评价。我们求解如下:

## 1. 美式数据买权

在风险中立下,美式数据买权的评价为

$$ADC^* = X E[e^{-rt} I_{|\tau_y^v| \leq T}] \quad (22)$$

此处:折现是在标的价格初次触及  $K$  的时刻  $t$ ,将  $X$  折现到期初(不是到期日  $T$ ,与(11)不同)。

根据(12)式,第一次瞬间时刻  $\tau_y^v$  触及  $y$  的概率分布(14)式也可表示为:

$$P_r[\tau_y^v \in dt] = \frac{|y|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(y-vt)^2/2t} (y \neq 0) \quad (23a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial T} P_r[\tau_y^v \leq T] = (14) \quad (23b)$$

[详见 Brockhaus, Ferraris, etc. (1999, p. 14)]。

利用(23a)我们可求算(22)美式数据买权的评价如下:

$$ADC^* = X \int_0^T e^{-rt} \frac{|y|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(y-vt)^2/2t} dt \quad (24)$$

此处:  $t$  代表  $\tau_y^t$ ; 第一次触及  $y$  可能发生于有效期  $T$  内的任何时刻, 故对  $t$  积分 0 到  $T$ 。也就是(22)式的期望值。为求解(24), 我们令

$$u = \sqrt{v^2 + 2r} \Rightarrow u^2 = v^2 - 2r \Rightarrow r = (u^2 - v^2)/2$$

$$\begin{aligned} \therefore ADC^* &= X \int_0^T e^{-rt} \frac{|y|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(y-vt)^2/2t} dt \\ &= \frac{X}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T e^{-(u^2-v^2)t/2} t^{-3/2} |y| e^{-(y-vt)^2/2t} dt \end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{(u^2-v^2)t}{2} - \frac{(y-vt)^2}{2t}\right] &= \exp\left[-\frac{(u^2-v^2)t^2 + y^2 - 2yvt + v^2 t^2}{2t}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{u^2 t^2 + y^2 - 2yvt}{2t}\right] \\ &= \exp[yv - yu] \exp\left[-\frac{y^2 - 2yut + u^2 t^2}{2t}\right] \\ &= e^{-y(u-v)} e^{-\frac{(y-ut)^2}{2t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore ADC^* &= X \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y(u-v)} \int_0^T t^{-3/2} |y| e^{-(y-ut)^2/2t} dt \\ &= X e^{-y(u-v)} \int_0^T \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-(y-ut)^2/2t}}_{P[\tau_y^v \in dt]} dt \end{aligned}$$

$$= Xe^{-y(u-v)} \int_0^T \underbrace{P_r[\tau_y^v \in dt]}_{(14) \text{ in } u} dt \quad (\text{以(14)式替代此等式}$$

的积分函数,获得下一等式,并以  $u$  替代  $v$ )

$$= Xe^{-y(u-v)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{-1}{2} \int_c^T (y+ut) t^{-3/2} e^{-(y-ut)^2/2t} dt \right. \\ \left. + \frac{-1}{2} e^{2uy} \int_0^T (y-ut) t^{-3/2} e^{-(y+ut)^2/2t} dt \right]$$

[上等式的积分与(15),(16)及(17)的积分相同;不同之处只有符号,以  $u$  替代  $v$ 。因此获得下等式]。所以,立即支付型美式数据买权的评价为:

$$ADC^* = Xe^{-y(u-v)} [N(-a_2^*) + e^{2yu} N(-a_1^*)] \quad (25)$$

$$\text{此处: } a_2^* = \frac{y-uT}{\sqrt{T}}, \quad a_1^* = \frac{y+uT}{\sqrt{T}}$$

$$u = \sqrt{v^2 + 2r}, \quad v = (r - q - \sigma^2/2)/\sigma$$

## 2. 美式数据卖权

在风险中立下,立即支付型美式数据卖权的评价为:

$$ADP^* = XE[e^{-rt} I_{\tau_y^v < T}] = XE[e^{-rt} I_{|\tau_{-y}^v| < T}] \quad (26)$$

正如(20),利用  $W_t$  概率分布的对称性质,只要将(22)及(24)内的  $y, v$  及  $u$  分别以负号  $-y, -v$  及  $-u$  替代,即是答案,

$$\therefore ADP^* = Xe^{-y(u-v)} [N(a_2^*) + e^{2yu} N(a_1^*)] \quad (27)$$

## 参 考 文 献

- O. Brockhaus, A. Ferraris, C. Gallus, D. Long, R. Martin and M. Overhasus, "Modelling And Hedging Equity Derivatives", *Risk Books* (1999).  
I. Karatzas, and S. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", Springer-Verlag (1991).

## 第九章 二元素选择权：现金或无偿选择权

### 一、单一标的型的现金或无偿选择权

二元素选择权(Binary Options)合约到期时,若标的价格在某一预先约定的价格范围内,支付持有人某一金额;但若不在该范围内,则不支付任何金额。过去投资银行很成功地推出二元素选择权,但都是以单一种标的物为主。举例如下:

**例 1** 现金或无偿买权(Cash-or-Nothing Call, CNC)。

其到期日现金流量为:

$$CNC_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_T > K \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (1)$$

此处:  $S_T$  代表到期目标的价格,  $K$  = 履约价

于是,其评价可由 Martingale Pricing 很容易求解

$$\begin{aligned} CNC &= e^{-rT} E[XI_{|S_T > K|}] \\ &= e^{-rT} \times P_r(S_T > K) = e^{-rT} \times N(d_2) \end{aligned} \quad (2)$$

此处:  $S_T = S_{\exp}[(r-q-\sigma^2/2)T - \sigma(W_T - W_0)]$ ,  $W_T$  = Brownian Motion

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$N(d_2) = P_r(S_T > K)$  即是 Black-Scholes 公式内的第二项。它代表在到期时买权会是价内的概率。

$q$  = 连续股利率,  $r$  = 无风险利率

**例 2** 现金或无偿卖权(Cash-or-Nothing Put, CNP)。

其到期现金流量为:

$$CNP_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_T < K \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (3)$$

则其评价公式为:

$$\begin{aligned} CNP &= e^{-rT} E[XI_{|S_T < K|}] = e^{-rT} \times P_r(S_T < K) \\ &= e^{-rT} \times N(-d_2) \end{aligned} \quad (4)$$

**例 3** 资产或无偿买权(Asset-or-Nothing Call, ANC)。

其到期现金流量为:

$$ANC_T = \begin{cases} S_T, & \text{若 } S_T > K \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (5)$$

其评价公式为:

$$ANC = e^{-rT} E^Q[S_T I_{|S_T > K|}] = e^{-rT} S e^{(r-q)T} E^Q[\zeta_T I_{|S_T > K|}]$$

此处:  $\zeta_T = \exp(-\sigma^2 T/2 + \sigma \Delta W_T^Q)$ ,  $\Delta W_T^Q = W_T^Q - W_0^Q$

在  $Q$  概率测度下,

$$S_T = S \exp[(r-q-\sigma^2/2)T + \sigma \Delta W^Q]$$

$$\begin{aligned} \therefore ANC &= S e^{-qT} E^R[I_{|S_T > K|}], \text{期望值是在 } R \text{ 概率测度下} \\ &= S e^{-qT} P_r^R(S_T > K) = S e^{-qT} N(d_1) \end{aligned} \quad (6)$$

此处: 在  $R$  测度下,  $S_T = S \exp\left[\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \Delta W^R\right]$

$N(d_1) = P_r^R(S_T > K)$  也是 Black-Scholes 买权公式内第一项的概率。在  $R$  测度下, 买权会是价内的概率。

**例 4** 资产或无偿卖权(Asset-or-Nothing Put, ANP)。

其到期现金流量为

$$ANP_T = \begin{cases} S_T, & \text{若 } S_T < K \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (7)$$

其评价公式为:

$$\begin{aligned} ANP &= e^{-rT} E^Q[S_T I_{S_T < K}] = S e^{-qT} E^Q[\zeta_T I_{S_T < K}] \\ &= S e^{-qT} E^R[I_{S_T < K}] = S e^{-qT} P_r^R[S_T < K] \\ &= S e^{-qT} N(-d_1) \end{aligned} \quad (8)$$

有鉴于单一标的型现金或无偿选择权的成功经历, Heynen 及 Kat (1998) 将之延伸至两个标的型的现金或无偿选择权。在以下几节中, 我们将详细介绍几种不同类型及其评价模型与避险参数(Hedging Parameters)。

## 二、两个标的型的现金或无偿选择权: 4 种不同类型

令标的 1 及 2 的价格随机过程如下:

$$d\ln(S_{1t}/S_1) = (r - q_1 - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dW_1 \quad (9)$$

$$d\ln(S_{2t}/S_2) = (r - q_2 - \sigma_2^2/2)dt + \sigma_2 dW_2 \quad (10)$$

此处:  $S_{it}$  = 标的  $i$  在时间  $t$  的价格  $i = 1, 2$

$q_i$  = 标的  $i$  的连续股利率

此外,  $\begin{cases} S_{1T} = S_1 \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)T + \sigma_1^2 \Delta W_{1T}^Q] \\ S_{2T} = S_2 \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2)T + \sigma_2^2 \Delta W_{2T}^Q] \end{cases}$

4 种不同类型二元素(或双标的)现金或无偿选择权介绍如下:

1. 双标的型现金或无偿买权(Bivariate Cash-or-Nothing Call, BCNC)。其到期现金流量为:

$$BCNC_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_{1T} > K_1 \text{ 及 } S_{2T} > K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (11)$$

在风险中立下, 它的评价模型为

$$\begin{aligned} BCNC &= e^{-rT} E[X I_{S_{1T} > K_1, S_{2T} > K_2}] \\ &= e^{-rT} X P_r(S_{1T} > K_1, S_{2T} > K_2) \end{aligned}$$



$$= e^{-rT} X P_r(\ln S_{1T} > \ln K_1, \ln S_{2T} > \ln K_2)$$

此处:  $\because \ln S_{iT} > \ln K_i$

$$\therefore \ln S_i + (r - q_i - \sigma_i^2/2)T + \sigma_i \Delta W_{iT} > \ln K_i$$

$$-\frac{\Delta W_{iT}}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(S_i/K_i) + (r - q_i - \sigma_i^2/2)T}{\sigma_i \sqrt{T}} = d_{ii} \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

$$= X e^{-rT} P_r\left(-\frac{\Delta W_{1T}}{\sigma_1 \sqrt{T}} < d_{11}, -\frac{\Delta W_{2T}}{\sigma_2 \sqrt{T}} < d_{22}\right) \quad (13)$$

$$= X e^{-rT} N_2(d_{11}, d_{22}, \rho)$$

此处:

$N_2(\cdot) =$  二元标准正态分布下的累积概率

$$= \int_{-\infty}^{d_{11}} \int_{-\infty}^{d_{22}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1$$

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(X_1^2 - 2\rho X_1 X_2 + X_2^2)\right]$$

$$(-\infty < X_i < \infty, i = 1, 2)$$

$$X_i = -\frac{\Delta W_{iT}}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1)$$

$$\rho = \text{Corr}\left(\frac{-\Delta W_{1T}}{\sigma_1 \sqrt{T}}, \frac{-\Delta W_{2T}}{\sigma_2 \sqrt{T}}\right) = \frac{\text{Cov}(\Delta W_{1T}, \Delta W_{2T})}{\sigma_1 \sigma_2 T} \quad (\text{两资产报酬}$$

率的相关系数)

BCNC 的 Delta 求解如下:

对第一资产的 Delta:

$$\frac{\partial(BCNC)}{\partial S_1} = e^{-rT} X \frac{\partial N_2(d_{11}, d_{22}, \rho)}{\partial S_1} = e^{-rT} X \left(\frac{\partial N}{\partial d_{11}}\right) \left(\frac{\partial d_{11}}{\partial S_1}\right)$$

首先计算

$$\frac{\partial N}{\partial d_{11}} = \frac{\partial}{\partial d_{11}} \int_{-\infty}^{d_{11}} \int_{-\infty}^{d_{22}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-q^2/2} dX_2 dX_1$$

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{1}{1-\rho^2}(X_1^2 - 2\rho X_1 X_2 + X_2^2) \\
 &= \int_{-\infty}^{d_{21}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-q^2/2} dX_2 \\
 &\quad (\text{微分规则: } \frac{d}{dX} \int_a^X f(t) dt = f(X))
 \end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{1}{1-\rho^2}(d_{11}^2 - 2\rho d_{11} X_2 + X_2^2) \\
 &= \frac{1}{1-\rho^2} [d_{11}^2 - \rho^2 d_{11}^2 + (\rho^2 d_{11}^2 - 2\rho d_{11} X_2 + X_2^2)] \\
 &= d_{11}^2 + (X_2 - \rho d_{11})^2 / (1-\rho^2) \quad (\text{完全平方}) \\
 &= e^{-d_{11}^2/2} \int_{-\infty}^{d_{22}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(X_2 - \rho d_{11})^2}{2(1-\rho^2)}} dX_2
 \end{aligned}$$

再利用转换变量, 令

$$\begin{aligned}
 y &= (X_2 - \rho d_{11}) / \sqrt{1-\rho^2} \Rightarrow dy = dX_2 / \sqrt{1-\rho^2} \\
 &\quad \left( \because -\infty < y < \frac{d_{22} - \rho d_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\partial N}{\partial d_{11}} &= e^{-d_{11}^2/2} \int_{-\infty}^{\frac{d_{22} - \rho d_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-y^2/2} dy \sqrt{1-\rho^2} \\
 &= \frac{e^{-d_{11}^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{d_{22} - \rho d_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\
 &= \frac{e^{-d_{11}^2/2}}{\sqrt{2\pi}} N\left(\frac{d_{22} - \rho d_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)
 \end{aligned}$$

再次,

$$\frac{\partial d_{11}}{\partial S_1} = \frac{\partial}{\partial S_1} \left[ \frac{-\ln(S_1/K_1) + (r - q_1 - \sigma_1^2/2)T}{\sigma_1\sqrt{T}} \right] = \frac{1}{S_1\sigma_1\sqrt{T}}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \Delta_1 &= \frac{\partial(BCNC)}{\partial S_1} = e^{-rT} X \left( \frac{e^{-d_{11}^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{1}{S_1 \sigma_1 \sqrt{T}} N \left( \frac{d_{22} - \rho d_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\
&= \frac{Xe^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-d_{11}^2/2} \frac{1}{S_1 \sigma_1 \sqrt{T}} N \left( \frac{d_{22} - \rho d_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right]
\end{aligned} \quad (14)$$

类似的求解方法,我们可求解第二资产的 Delta:

$$\Delta_2 = \frac{\partial(BCNC)}{\partial S_2} = \frac{Xe^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-d_{22}^2/2} \frac{1}{S_2 \sigma_2 \sqrt{T}} N \left( \frac{d_{11} - \rho d_{22}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right] \quad (15)$$

对 BCNC 的避险时必须同时持有  $\Delta_1$  股的标的 1 及  $\Delta_2$  股的标的 2。与 Black-Scholes 的 Delta 避险相同,基本上必须是动态避险。但因 BCNC 同时涉及两种标的的避险,故其避险困难度高于一般买权或卖权的避险。

2. 双标的型现金或无偿卖权 (Bivariate Cash-or-Nothing Put, BCNP)。

其到期现金流量为:

$$BCNP_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_{1T} < K_1 \text{ 及 } S_{2T} < K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (16)$$

在风险中立下,它的评价模型为:

$$\begin{aligned}
BCNP &= e^{-rT} E[XI_{|S_{1T} < K_1, S_{2T} < K_2|}] \\
&= Xe^{-rT} P_r(S_{1T} < K_1, S_{2T} < K_2) \\
&= Xe^{-rT} N_2(-d_{11}, -d_{22}, \rho)
\end{aligned} \quad (17)$$

至于 BCNP 的 Delta,可将(14)及(15)内的  $d_{11}$  及  $d_{22}$  改成负值,即得应放空  $\Delta_1$  股的标的 1 及  $\Delta_2$  股的标的 2。

3. 混合型现金或无偿买权

第一种混合型现金或无偿选择权 BCN(I)的到期现金流量为:

$$BCN(I)_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_{1T} > K_1 \text{ 及 } S_{2T} < K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (18)$$

在风险中立下,它的评价模型为:

$$\begin{aligned} BCN(I) &= e^{-rT} E[XI_{|S_{1T} > X, S_{2T} < K_2|}] \\ &= Xe^{-rT} P_r(S_{1T} > X, S_{2T} < K_2) \\ &= Xe^{-rT} N_2(d_{11}, -d_{22}, -\rho) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{此处: } -\rho = \text{Corr}\left(\frac{-\Delta W_{1T}}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{\Delta W_{2T}}{\sigma_2\sqrt{T}}\right)$$

第二种混合型现金或无偿选择权  $BCN(II)$  的到期现金流量为:

$$BCN(II)_T = \begin{cases} X, & \text{若 } S_{1T} < K_1 \text{ 及 } S_{2T} > K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (20)$$

在风险中立下,其评价模型为:

$$\begin{aligned} BCN(II) &= e^{-rT} E[XI_{|S_{1T} < K_1, S_{2T} > K_2|}] \\ &= Xe^{-rT} P_r(S_{1T} < K_1, S_{2T} > K_2) \\ &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11}, d_{22}, -\rho) \end{aligned} \quad (21)$$

现金或无偿选择权的极限性质:

1. 当  $K_1 \rightarrow 0, d_{11} \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} BCNC &= Xe^{-rT} N_2(d_{11} = \infty, d_{22}, \rho) \\ &= Xe^{-rT} N(d_{22}), N_2(\infty, d_{22}, 0) = N(d_{22}) \end{aligned}$$

$\therefore$  当  $K_1 \rightarrow 0$ ,  $BCNC$  变成以资产 2 为标的物的现金或无偿买权  $CNC$ 。

$$\begin{aligned} \text{但 } BCNP &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11} = -\infty, -d_{22}, \rho) \\ &= 0 \quad (\because N_2(-\infty, -d_{22}, \rho) = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BCN(I) &= Xe^{-rT} N_2(d_{11} = \infty, -d_{22}, -\rho) \\ &= Xe^{-rT} N(-d_{22}) = CNP \text{ (即(4))} \end{aligned}$$

$$BCN(II) = Xe^{-rT} N(-\infty, d_{22}, \rho) = 0$$

2. 当  $K_2 \rightarrow 0, d_{22} \rightarrow \infty$ ,

$$BCNC = Xe^{-rT} N(d_{11}) \text{ (以资产 1 为标的物的现金或无偿买权)}$$

$$BCNP = Xe^{-rT} N_2(-d_{11}, -d_{22} = -\infty, \rho) = 0$$

$$BCN(I) = Xe^{-rT} N_2(d_{11}, -\infty, \rho) = 0$$

$$\begin{aligned} BCN(II) &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11}, \infty, \rho) \\ &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11}) = (8) \text{ (以标的 1 为标的物的现金或} \\ &\quad \text{无偿卖权)} \end{aligned}$$

3. 当  $K_1 \rightarrow \infty, d_{11} \rightarrow -\infty,$

$$\begin{aligned} BCNC &= Xe^{-rT} N_2(d_{11} = -\infty, d_{22}, \rho) = 0 \\ BCNP &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11} = \infty, -d_{22}, \rho) \\ &= Xe^{-rT} N(-d_{22}) \text{ (以资产 2 为标的物的现金或无偿卖权)} \end{aligned}$$

$$BCN(I) = Xe^{-rT} N_2(d_{11} = -\infty, -d_{22}, -\rho) = 0$$

$$\begin{aligned} BCN(II) &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11} = \infty, d_{22}, -\rho) \\ &= Xe^{-rT} N_2(d_{22}) = (8) \text{ (以资产 2 为标的物的现金或无} \\ &\quad \text{偿买权)} \end{aligned}$$

4. 当  $K_2 \rightarrow \infty, d_{22} \rightarrow -\infty,$

$$\begin{aligned} BCNC &= Xe^{-rT} N_2(d_{11}, d_{22} = -\infty, \rho) = 0 \\ BCNP &= Xe^{-rT} N_2(-d_{11}, -d_{22} = \infty, \rho) \\ &= Xe^{-rT} N(-d_{11}) \text{ (以资产 1 为标的物的现金或无偿卖权)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BCN(I) &= Xe^{-rT} N_2(d_{11}, -d_{22} = \infty, -\rho) \\ &= Xe^{-rT} N(d_{11}) \text{ (买权(标的 1))} \end{aligned}$$

$$BCN(II) = Xe^{-rT} N_2(-d_{11}, d_{22} = -\infty, \rho) = 0$$

### 三、C-Brick 选择权

C-Brick 选择权是指在到期时,若两个标的价格分别落在不同的价格范围内,则支付持有人某一固定金额  $X$ 。也就是

$$C\text{-Brick}_T = \begin{cases} X, & \text{若 } K_1 < S_{1T} < K_2 \text{ 及 } K_3 < S_{2T} < K_4 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (22)$$

其评价为:

$$\begin{aligned} \text{C-Brick} &= e^{-rT} E[ XI_{|K_1 < S_{1T} < K_2, K_3 < S_{2T} < K_4|} ] \\ &= Xe^{-rT} P_r(K_1 < S_{1T} < K_2, K_3 < S_{2T} < K_4) \end{aligned}$$

此处:  $\because K_1 < S_{1T} < K_2 \Rightarrow \ln K_1 < \ln S_{1T} < \ln K_2$

$$\therefore \ln K_1 < \ln S_1 + \left(r - q - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + \sigma_1 \Delta W_{1T} < \ln K_2$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\ln(S_1/K_1) + \left(r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1 \sqrt{T}}}_{d_{11}} &> -\frac{\Delta W_{1T}}{\sqrt{T}} \\ &> \underbrace{\frac{\ln(S_1/K_2) + \left(r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1 \sqrt{T}}}_{d_{12}} \end{aligned}$$

或

$$d_{12} < -\frac{\Delta W_{1T}}{\sqrt{T}} < d_{11}, \quad -\frac{\Delta W_{1T}}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{相同的, } d_{24} < -\frac{\Delta W_{2T}}{\sqrt{T}} < d_{23}, \quad -\frac{\Delta W_{2T}}{\sqrt{T}} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\ln(S_1/K_1) + \left(r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1 \sqrt{T}} \\ d_{12} &= \frac{\ln(S_1/K_2) + \left(r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1 \sqrt{T}} \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} d_{23} &= \frac{\ln(S_2/K_3) + \left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T}{\sigma_2 \sqrt{T}} \\ d_{24} &= \frac{\ln(S_2/K_4) + \left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T}{\sigma_2 \sqrt{T}} \end{aligned} \quad (23b)$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \text{C-Brick} &= Xe^{-rT} P_r \left( d_{12} < -\frac{\Delta W_{1T}}{\sqrt{T}} < d_{11}, d_{24} < -\frac{\Delta W_{2T}}{\sqrt{T}} < d_{23} \right) \\
 &= Xe^{-rT} \int_{d_{12}}^{d_{11}} \int_{d_{24}}^{d_{23}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1 \\
 &= Xe^{-rT} \left( \int_{-\infty}^{d_{11}} \int_{d_{24}}^{d_{23}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1 - \int_{-\infty}^{d_{12}} \int_{d_{24}}^{d_{23}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1 \right) \\
 &= Xe^{-rT} \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{d_{11}} \int_{-\infty}^{d_{23}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1}_{N_2(d_{11}, d_{23}, \rho)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{d_{12}} \int_{-\infty}^{d_{24}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1}_{N_2(d_{12}, d_{24}, \rho)} \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\int_{-\infty}^{d_{12}} \int_{d_{23}}^{d_{24}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1}_{N_1(d_{12}, d_{23}, \rho)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{d_{12}} \int_{-\infty}^{d_{24}} f(X_1, X_2) dX_2 dX_1}_{N_2(d_{12}, d_{24}, \rho)} \right]
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \text{C-Brick} &= Xe^{-rT} [N_2(d_{11}, d_{23}, \rho) - N_2(d_{11}, d_{24}, \rho) \\
 &\quad - N_2(d_{12}, d_{23}, \rho) + N_2(d_{12}, d_{24}, \rho)] \quad (24)
 \end{aligned}$$

观察 C-Brick 的评价 (24) 可知, C-Brick 其实是由 4 个不同的 BCNC 组合而成。

1. 第一个长部位的 BCNC =  $Xe^{-rT} N_2(d_{11}, d_{23}, \rho)$ , 即买进它。

到期时现金流量 =  $\begin{cases} \text{收取 } X, & \text{若 } S_{1T} > K_1 \text{ 及 } S_{2T} > K_3 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$

2. 第二个长部位的 BCNC =  $Xe^{-rT} N_2(d_{12}, d_{24}, \rho)$ , 即买进它。

到期时现金流量 =  $\begin{cases} \text{收取 } X, & \text{若 } S_{1T} > K_2 \text{ 及 } S_{2T} > K_4 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$

3. 第三个短部位的 BCNC =  $Xe^{-rT} N_2(d_{12}, d_{23}, \rho)$ , 即出售或发行。

到期时现金流量 =  $\begin{cases} \text{支付 } X, & \text{若 } S_{1T} > K_2 \text{ 及 } S_{2T} > K_3 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$

4. 第四个短部位的 BCNC =  $Xe^{-rT} N_2(d_{11}, d_{24}, \rho)$ 。

到期时现金流量 =  $\begin{cases} \text{支付 } X, & \text{若 } S_{1T} > K_1 \text{ 及 } S_{2T} > K_4 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$

### C-Brick 的 Delta

因 C-Brick 是由 4 个不同的 BCNC 组合而成, 它的 Delta 也是四个 BCNC 的 Delta 之和。每一个 BCNC 的 Delta 都可由公式(14)及(15)推敲而出。比如说, (24)内第二个 BCNC 的 Delta 的求解可将(14)及(15)内的  $d_{11}$  及  $d_{22}$  分别以  $d_{12}$  及  $d_{23}$  取代即可。其他 BCNC 的 Delta 可类推。

因 C-Brick 的 Delta 是 4 个不同 BCNC 的 Delta 之和(其中有两个负 Delta), C-Brick Delta 可能是正值也可能是负值, 因此 Delta 的变动行为很复杂。由 Heynen 及 Kat 的简单例证得知:

1. 当标的 1 股价从低价位持续上升, C-Brick Delta 从 0 起上升, 而后下降变成负值, 再回归至 0。

2. 接近到期日时, C-Brick Delta 对标的价格的变动反应更是敏感, 更有剧烈的变动。

3. 对标的 2 的价格变动, C-Brick Delta 也有如上述两点的反应。Heynen 及 Kat 有图解表明上述的结果。

## 四、资产或无偿选择权

双标的型资产或无偿选择权 (A Bivariate Asset-or-Nothing Option) 也可分成 4 种不同的类型, 分别介绍如下:

1. 双标的型资产或无偿买权 (A Bivariate Asset-or-Nothing Call, BANC)。

其到期现金流量为

$$BANC_T = \begin{cases} S_{1T}, & \text{若 } S_{1T} > K_1 \text{ 及 } S_{2T} > K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases} \quad (25)$$

其评价模型求解如下:

$$BANC = e^{-rT} E^Q [S_{1T} I_{\{S_{1T} > K_1, S_{2T} > K_2\}}]$$

在求解期望值时, 我们须借用两个变量(两个资产价格)下的



Girsanov定理的概率测度转换:

(1)  $dW_1^Q = dW_1^R + \sigma_1 dt$  (由  $Q$  测度转换成  $R$  测度(详见附录))

$$\begin{aligned}\therefore d\ln(S_{1T}/S_1) &= (r - q_1 - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dW_1^Q \\ &= (r - q_1 + \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dW_1^R\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  在  $R$  测度下,  $S_{1T} = S_1 \exp[(r - q_1 + \sigma_1^2/2)T + \sigma_1 \Delta W_{1T}^R]$ ,

$$\Delta W_{1T}^R = W_{1T}^R - W_{10}^R$$

(2)  $dW_2^Q = dW_2^R + \sigma_1 \rho dt$  (详见附录)

$$\begin{aligned}\therefore d\ln(S_{2T}/S_2) &= (r - q_2 - \sigma_2^2/2)dt + \sigma_2 dW_2^Q \\ &= (r - q_2 - \sigma_2^2/2 + \rho\sigma_1\sigma_2)dt + \sigma_2 dW_2^R\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  在  $R$  测度下,  $S_{2T} = S_2 \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2 + \rho\sigma_1\sigma_2)T + \sigma_2 \Delta W_{2T}^R]$

利用上面 Girsanov 的结果,  $BANC$  的评价可表示为

$$BANC = e^{-rT} S_1 e^{(r-q_1)T} E^Q [e^{-\sigma_1^2 T/2 + \sigma_1 \Delta W_{1T}^Q} I_{|S_{1T} > K_1, S_{2T} > K_2|}] \quad (26)$$

此处: 在  $Q$  测度下

$$\begin{aligned}S_{1T} &= S_1 \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2)T + \sigma_1 \Delta W_{1T}^Q] \\ &= S_1 e^{-q_1 T} E^R [I_{|S_{1T} > K_1, S_{2T} > K_2|}] \\ &= S_1 e^{-q_1 T} P_r(S_{1T} > K_1, S_{2T} > K_2)\end{aligned} \quad (27)$$

此处:

$$\because S_{1T} > K_1 \Rightarrow \ln S_{1T} > \ln K_1$$

$$\therefore \ln S_1 + (r - q_1 + \sigma_1^2/2)T + \Delta W_{1T}^R > \ln K_1$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta W_{1T}^R}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(S_1/K_1) + (r - q_1 + \sigma_1^2/2)T}{\sigma_1 \sqrt{T}} = f_{11} \quad (28)$$

类似推理, 条件  $S_{2T} > K_2$  即是

$$-\frac{\Delta W_{2T}^R}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(S_2/K_2) + (r - q_2 - \sigma_2^2/2 + \rho\sigma_1\sigma_2)T}{\sigma_2 \sqrt{T}} = g_{22} \quad (29)$$

$$\therefore BANC = S_1 e^{-q_1 T} P_r \left( -\frac{\Delta W_{1T}^R}{\sqrt{T}} < f_{11}, -\frac{\Delta W_{2T}^R}{\sqrt{T}} < g_{22} \right)$$

$$= S_1 e^{-q_1 T} N_2(f_{11}, g_{22}, \rho) \quad (30)$$

$$\rho = \text{Corr}\left(\frac{-\Delta W_{1T}^R}{\sqrt{T}}, \frac{-\Delta W_{2T}^R}{\sqrt{T}}\right)$$

此处:  $f_{11}$  及  $g_{22}$  分别是(28)及(29)等号值。

2. 双标的型资产或无偿卖权 (Bivariate Asset-or-Nothing Put, BANP)。其到期现金流量为:

$$BANP_T = \begin{cases} S_{1T}, & \text{若 } S_{1T} < K_1 \text{ 及 } S_{2T} < K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$$

则其评价求解可由(25)的求解立即推论得知:

$$\begin{aligned} BANP &= e^{-rT} E^Q[S_{1T} I_{|S_{1T} < K_1, S_{2T} < K_2|}] \\ &= S_1 e^{-q_1 T} N_2(-f_{11}, -g_{22}, \rho) \end{aligned} \quad (31)$$

3. 混合型双标的资产或无偿选择权可为两类。

(1) 第一类混合型的到期现金流量为

$$BAN(I)_T = \begin{cases} S_{1T}, & \text{若 } S_{1T} < K_1 \text{ 及 } S_{2T} > K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$$

则其评价为:

$$\begin{aligned} BAN(I) &= e^{-rT} E^Q[S_{1T} I_{|S_{1T} < K_1, S_{2T} > K_2|}] \\ &= S_1 e^{-q_1 T} N_2(-f_{11}, g_{22}, -\rho) \end{aligned} \quad (32)$$

(2) 第二类混合型的到期现金流量为:

$$BAN(II) = \begin{cases} S_{1T}, & \text{若 } S_{1T} > K_1 \text{ 及 } S_{2T} < K_2 \\ 0, & \text{若不是} \end{cases}$$

则其评价为:

$$\begin{aligned} BAN(II) &= e^{-rT} E^Q[S_{1T} I_{|S_{1T} > K_1, S_{2T} < K_2|}] \\ &= S_1 e^{-q_1 T} N_2(f_{11}, -g_{22}, -\rho) \end{aligned} \quad (33)$$

至于资产或无偿选择权的极限性质分析与现金或无偿选择权的极

限性质分析相似,简述如下:

就  $BANC$  而论:

1. 当  $K_1 \rightarrow 0$ , 则  $BANC = S_1 e^{-q_1 T} N(g_{22})$ , 是标的 2 的买权。到期时, 若  $S_{2T} > K_2$ , 则该买权支付  $S_{1T}$ 。

2. 当  $K_2 \rightarrow 0$ , 则  $BANC = S_1 e^{q_1 T} N(f_{11})$ , 是标的 1 的买权。到期时, 若  $S_{1T} > K_1$ , 则该买权支付  $S_{1T}$ 。

3. 若  $K_1 \rightarrow \infty$  或  $K_2 \rightarrow \infty$ ,  $BANC = 0$ 。

就  $BANP$  而论:

1. 当  $K_1 \rightarrow 0$  或  $K_2 \rightarrow 0$ , 则  $BANP = 0$ 。(  $\because f_{11} \rightarrow -\infty, g_{22} \rightarrow -\infty$  )

2. 当  $K_1 \rightarrow \infty$ , 则  $BANP = S_1 e^{-q_1 T} N(-g_{22})$ , 是标的 2 的卖权。到期时, 若  $S_{2T} < K_2$ , 则该卖权支付  $S_{1T}$ 。

3. 当  $K_2 \rightarrow \infty$ , 则  $BANP = S_1 e^{-q_1 T} N(-f_{11})$ , 是标的 1 的卖权。到期时, 若  $S_{1T} < K_1$ , 则该卖权支付  $S_{1T}$ 。

至于其他混合型可做类似分析。

## 五、A-Brick 选择权

A-Brick 选择权的到期现金流量为

$$A\text{-Brick}_T = \begin{cases} \alpha S_{1T}, & \text{若 } K_1 < S_{1T} < K_2 \text{ 及 } K_3 < S_{2T} < K_4 \\ 0, & \text{若不是。} (\alpha \text{ 是一常数 } \alpha > 1 \text{ 或 } 0 < \alpha < 1) \end{cases} \quad (34)$$

它的评价模型如下:

$$\begin{aligned} A\text{-Brick} &= e^{-rT} E^Q[\alpha S_{1T} I_{\{K_1 < S_{1T} < K_2, K_3 < S_{2T} < K_4\}}] \\ &= \alpha S_1 e^{-q_1 T} E^R[I_{\{K_1 < S_{1T} < K_2, K_3 < S_{2T} < K_4\}}] \quad (\text{利用 Girsanor 概率测} \\ &\quad \text{度转换, 正如(26) 及(27), 而后利用 C-Brick 的类似解法}) \\ &= \alpha S_1 e^{-q_1 T} [N_2(f_{12}, g_{24}, \rho) \\ &\quad - N_2(f_{12}, g_{23}, \rho) - N_2(f_{11}, g_{24}, \rho) + N_2(f_{11}, g_{23}, \rho)] \end{aligned} \quad (35)$$

此处:

$$f_{11} = \frac{\ln(S_1/K_1) + (r - q_1 + \sigma_1^2/2)T}{\sigma_1\sqrt{T}} \quad (\text{类似(28)})$$

$$f_{12} = \frac{\ln(S_1/K_2) + (r - q_1 + \sigma_1^2/2)T}{\sigma_1\sqrt{T}}$$

$$g_{23} = \frac{\ln(S_2/K_3) + (r - q_2 - \sigma_2^2/2 + \rho\sigma_1\sigma_2)T}{\sigma_2\sqrt{T}} \quad (\text{类似(29)})$$

$$g_{24} = \frac{\ln(S_2/K_4) + (r - q_2 - \sigma_2^2/2 + \rho\sigma_1\sigma_2)T}{\sigma_2\sqrt{T}}$$

### A-Brick 的 Delta

因 A-Brick 选择权是由 4 个资产或无偿买权 BANC 组合而成(正如(35)所示),其 Delta 也是由 4 个 BANC 的 Delta 加总之和。求解 BANC Delta 的方法与求解 BCN Delta[公式(14)及(15)]的方法相同。因此,我们可先将第一个 BANC<sub>1</sub> 的 Delta 表示如下:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial}{\partial S_1}(\text{BANC}_1) = \frac{\partial}{\partial S_1}[\alpha S_1 e^{-q_1 T} N_2(f_{11}, g_{24}, \rho)] \\ &= \alpha e^{-q_1 T} \left[ N_2(f_{11}, g_{24}, \rho) + S_1 \frac{\partial N_2(f_{11}, g_{24}, \rho)}{\partial S_1} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

(再利用(14)的方法微分  $N_2(\cdot)$ )

$$= \alpha e^{-q_1 T} \left[ N_2(f_{11}, g_{24}, \rho) + \frac{S_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-f_{11}^2/2} \frac{1}{S_1 \sigma_1 \sqrt{T}} N\left(\frac{g_{24} - \rho f_{11}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right] \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{\partial}{\partial S_2}(\text{BANC}_1) \\ &= \frac{\alpha S_1 e^{-q_1 T}}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-g_{24}^2/2} \frac{1}{S_2 \sigma_2 \sqrt{T}} N\left(\frac{f_{11} - \rho g_{24}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

其他 3 个 BANC 的 Delta 也可很容易从(36)及(37)推演而出。因 A-Brick 选择权的 Delta 是 4 个 BCN Delta 的总和,其避险 Delta 可能

是正值也可能是负值。且其变化行为也很复杂,正如 C-Brick Delta 的变动行为。

## 参 考 文 献

- R. Heynon, and H. Kate, "Brick by Brick", *Hedging With Trees*, Risk Publication (1998), Chapter 9.
- I. Karatzas, and S. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", 2nd Ed., Springer-Varlag (1991).
- V. K. Rohatgi, "An Introduction to Probability and Mathematical Statistics", John Wiley & Sons (1976).

## 附 录

$$\text{求证: } \begin{cases} dW_1^Q = dW_1^R + \sigma_1 dt \\ dW_2^Q = dW_2^R + \rho\sigma_1 dt \end{cases}$$

$$\text{证明: 已知 } \frac{dR}{dQ} = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \sigma_1 W_1^T\right]$$

$$\therefore E^R[e^{Q_1 W_1^T + Q_2 W_2^T}] = E^Q\left[\frac{dR}{dQ} e^{\theta_1 W_1^T - \theta_2 W_2^T}\right]$$

$$= E^Q\left[-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \sigma_1 W_1^T + Q_1 W_1^T + Q_2 W_2^T\right]$$

$$= e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}T/2} E^Q[e^{(\theta_1 - \sigma_1)W_1^T + \theta_2 W_2^T}]$$

(The expection is the moment generating function of  $W_1^T$  and  $W_2^T$ )

$$= e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}T/2} \exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \sigma_1)^2 T + \frac{1}{2}\theta_2^2 T\right]$$

$$+ \rho\theta_2(\theta_1 - \sigma_1)T](\text{利用 Rohatgi, p. 234})$$

$$= e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}T/2} \exp\left[\frac{1}{2}\theta_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 T - \sigma_1\theta_1 T\right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\theta_2^2 T + \rho\theta_1\theta_2 T - \rho\theta_2\sigma_1 T \Big] \\
& = \exp \left[ \left( -\sigma_1 T \cdot \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1^2 T \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( -\rho\sigma_1 T \cdot \theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2 \right) T + \rho\theta_1\theta_2 T \right] \\
& = \exp \left\{ (\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} -\sigma_1 \\ -\rho\sigma_1 \end{bmatrix} T + \frac{1}{2} (\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} T \right\} \\
& = \exp \left\{ \underline{\theta}' \underline{\mu} T + \frac{1}{2} \underline{\theta}' \underline{\Sigma} \underline{\theta} T \right\} \\
& \Rightarrow \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}^R \sim N \left[ \underbrace{\begin{bmatrix} -\sigma_1 T \\ -\rho\sigma_1 T \end{bmatrix}}_{\underline{\mu}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\Sigma}} \right] \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} dW_1^R &= dW_1^Q - \sigma_1 dt \\ dW_2^R &= dW_2^Q - \rho\sigma_1 dt \end{aligned} \right\} \\
& \text{或} \\
& \Rightarrow \begin{cases} dW_1^Q = dW_1^R + \sigma_1 dt \\ dW_2^Q = dW_2^R + \rho\sigma_1 dt \end{cases}
\end{aligned}$$

## 第十章 互换选择权(Exchange Options)

### 一、简介

在实务上,投资顾问的给酬是由他的绩效报酬率  $R_1$  高于设定标准报酬率  $R_2$  的某一百分比决定,即  $\alpha(R_1 - R_2)$ ,  $\alpha$  是百分比,诸如 20% 或 30% 等等。也就是,他的给酬是超额报酬率  $(R_1 - R_2)$  的  $\alpha$  百分比。若他的绩效低于标准报酬率  $R_2$  (即  $R_1 - R_2 < 0$ ), 则他的报酬为零。这种绩效价值其实是一种互换选择权,以  $R_2$  交换  $R_1$ 。其到期现金流量为  $\max[\alpha(R_1 - R_2), 0]$ 。互换选择权的另一种是融资购买股票。若融资百分比为  $x_1$ , 则在合约到期时,必须归还本金加利息(以  $x_1^*$  代表之)。若在到期时,质押的股票(期初购进股票,但被质押在经纪商或银行)的价值  $S^*$  高于应归还的  $x_1^*$ , 则融资者偿还全部债务,否则背信,让它去。则融资者的到期损益是选择权的到期损益  $\max(S^* - x_1^*, 0)$ 。这也是互换选择权的一种,以负债  $x_1^*$  交换股票价值  $S^*$ 。在实务上,尚有其他金融合约的性质相当于互换选择权,因此,可利用互换选择权的评价模型来评估金融合约。互换选择权是由 Margrabe (1978) 介绍。在本章中我们将详细介绍其评价模型。

### 二、互换选择权的特征

令两种资产价格的随机过程为

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dW_i \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

公式(1)内的符号与前几章中 Ito Process 的定义相同,即  $\mu_i$  是资产  $i$  的期望瞬间报酬率,  $\sigma_i$  是资产  $i$  报酬率的瞬间标准差,  $dW_i$  是资产  $i$  价格变动的随机项(即 Brownian Motion)。

欧式互换选择权的到期现金流量  $W^*$  为:

$$\begin{aligned} W^* &= W(S_1^*, S_2^*, t) \quad (t = \text{尚存到期日}) \\ &= \max(S_1^* - S_2^*, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

此处  $S_i^*$  为到期时资产  $i$  的价格 ( $i = 1, 2$ )。

有关互换选择权的性质探讨如下:

1. 因它是一种选择权,在有效期内其价值大于或等于零,  $W \geq 0$ 。但由(2),显然在有效期内  $W \leq S_1$ , 故

$$0 \leq W \leq S_1$$

2. 对两种资产  $S_1$  及  $S_2$  而言,互换选择权是线性同质 (Linear Homogeneous in  $S_1$  and  $S_2$ )。也就是

$$\begin{aligned} \lambda W^*(S_1^*, S_2^*, t) &= \lambda \max(S_1^* - S_2^*, 0) \\ &= \max(\lambda S_1^* - \lambda S_2^*, 0) \\ &= W^*(\lambda S_1^*, \lambda S_2^*, t) \end{aligned} \quad (3)$$

3. 因  $W$  是对  $S_1$  及  $S_2$  具有线性同质,由 Euler 定理,下列公式成立:

$$W - \left(\frac{\partial W}{\partial S_1}\right)S_1 - \left(\frac{\partial W}{\partial S_2}\right)S_2 = 0 \quad (4)$$

或

$$W = \left(\frac{\partial W}{\partial S_1}\right)S_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial S_2}\right)S_2 \quad (5)$$

公式(5)说明发行互换选择权的避险组合,可由持有  $\left(\frac{\partial W}{\partial S_1}\right)$  单位(或股)的第一标的物与放空  $\left(\frac{\partial W}{\partial S_2}\right)$  单位(或股)的第二标的物 ( $\because \frac{\partial W}{\partial S_2} < 0$ )。



因该避险组可由放空  $S_2$  所得的资金去购买  $\left(\frac{\partial W}{\partial S_1}\right)$  单位的  $S_1$ , 该避险组合是零投资避险组合。因是零投资成本, 故在很短期内其报酬率为零:

$$dW - \left(\frac{\partial W}{\partial S_1}\right)dS_1 - \left(\frac{\partial W}{\partial S_2}\right)dS_2 = 0 \quad (6)$$

这与 Black-Scholes 模型内的避险组合 II 不同。Black-Scholes 的 II 并无风险, 但仍有无风险报酬。

4. 公式(2)可解释为: 以  $S_1$  为标的股的买权, 履约价为  $S_2$ ; 或以  $S_2$  为标的股的卖权, 履约价为  $S_1$ 。

### 三、互换选择权的评价

我们仍采用 Black-Scholes 所有的假设。为推导方便计, 欧式互换买权  $W^*$  及资产  $S_1^*$  的价值将以资产  $S_2^*$  做为计价单位(即  $W^*/S_2^*$  与  $S_1^*/S_2^*$ )。则公式(2)可改写如下: ( $S_2^*$  视为随机或浮动履约价)

$$\frac{W^*}{S_2^*} = \frac{1}{S_2^*} \max(S_1^* - S_2^*, 0) = \max(S_1^*/S_2^* - 1, 0) \quad (7)$$

公式(7)表示  $W^*/S_2^*$  其实是一种买权的到期现金流量, 标的物的到期价格为  $S_1^*/S_2^*$ , 履约价等于 1。因此, 我们可利用 Black-Scholes 买权的评价模型来求解选择权( $W/S$ )的评价公式。尚未这样做之前, 首先决定在以  $S_2^*$  (或  $S_2$ ) 作为计价后的经济体制。在此经济体制下, 无风险利率为零。也就是, 以资产 2 价值计价的无风险利率(借及贷放利率)为零。这是因为: 贷放者贷放一单位以资产 2 计价的其他资产, 当然要求在到期时偿还同样单位的资产, 而不要求利率, 因为资产 2 (第二资产) 的价值随时间过去而成长, 其成长率即是利率。(原来经济环境下的无风险利率仍是  $r$ )。以另一方式来解释: 资产 2 报酬率  $r_2$  作为计价的无风险利率为  $\ln(r/r_2) = \ln r - \ln r_2 = 0$  ( $\because$  在风险中立下,  $\ln r_2 = \ln r$ )。

我们已分析(7)是欧式买权的到期现金流量,故利用 Black-Scholes 模型,该买权( $W/S_2$ )的现在价格应是

$$\frac{W}{S_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)N(d_1) - 1 \cdot e^{\delta(t)} \cdot N(d_2) \quad (8)$$

所以,欧式互换买权的评价模型为

$$W = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2) \quad (9)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(S_1/S_2) + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (\text{利率项} = 0)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2, \quad \rho_{12} = \text{Corr}\left(\frac{dS_1}{S_1}, \frac{dS_2}{S_2}\right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \text{Var}\left(\frac{dS_1}{S_1}\right) = \text{Var}(d\ln S_1) = \text{Var}(\ln S_{1,t} - \ln S_{1,0}) \\ &= \text{Var}(\ln S_1) \quad (\because \text{Var}(\ln S_{1,0}) = 0) \end{aligned}$$

$$\sigma_2^2 = \text{Var}\left(\frac{dS_2}{S_2}\right) = \text{Var}(\ln S_2)$$

证明  $\sigma^2$ :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}\left[\frac{d(S_1/S_2)}{(S_1/S_2)}\right] = \text{Var}\left[d\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right)\right] \\ &= \text{Var}\left[\ln\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right) - \ln\left(\frac{S_{10}}{S_{20}}\right)\right] \\ &= \text{Var}\left[\ln\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right)\right] \quad (\because \text{Var}\left[\ln\left(\frac{S_{10}}{S_{20}}\right)\right] = 0) \\ &= \text{Var}(\ln S_{1t} - \ln S_{2t}) \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

#### 四、互换选择权的延伸

互换选择权评价模型(9)可应用于下列几种情况,讨论如下:

1. 若令  $S_2 = Ke^{-rt}$ , 则(9)即变成 Black-Scholes 买权公式:

$$C = W = S_1 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(S_1/Ke^{-rt}) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t}{\sigma_1 \sqrt{t}} = \frac{\ln(S_1/K) + (r + \sigma_1^2/2)t}{\sigma_1 \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_1 \sqrt{t}$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2$$

2. 若令  $S_2 = KP(t)$ ,  $P(t)$  = 无风险折价债券的现在价值(到期日  $t$ , 到期时支付一元), 则互换选择权变成 Black-Scholes 模型:

$$\begin{aligned} W &= S_1 N(d_1) - KP(t) N(d_2) \\ &= S_1 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \end{aligned}$$

$P(t)$  其是折现因子, 相同于  $e^{-rt}$  的角色。

3. 欧式互换选择权可用来评价美式互换选择权。首先建立两个组合:

组合 A: 包含互换选择权  $W$

组合 B: 购进  $S_1$  并放空  $S_2$ , 即  $S_1 - S_2$

在到期日  $T$

组合 A 的价值  $= W^* = \max(S_1^* - S_2^*, 0) \geq 0$

组合 B 的价值  $= S_1^* - S_2^* > 0$  或  $< 0$

因此, 组合 A 的价值大于或等于组合 B 的价值。所以,

$$W(S_1, S_2, t) \geq S_1 - S_2 \quad (10)$$

公式(10)可用来决定美式互换选择权是否应提前履约的条件。只要提前履约的价值  $(S_1 - S_2)$  小于或等于欧式互换选择权的价值  $W(S_1, S_2, t)$ , 持有人不应提前履约。因此, 持有人不会提前履约, 在这种情况下, 美式互换选择权  $W_A$ , 其实是欧式互换选择权:  $W_A(S_1, S_2, t) = W(S_1, S_2, t)$ 。

4. 互换选择权评价公式(9)也可用来评价美式互换选择权(买权或卖权均可), 其履约价随着时间成长, 即  $Ke^{-rt}$  愈接近到期日,  $t$  愈小; 因此  $Ke^{-rt}$  愈大, 且到期时履约价等于  $K$ 。此种美式互换买权的评价可将(9)内的  $S_2$  设定为  $Ke^{-rt}$ , 即  $S_2 = Ke^{-rt}$ 。则

$$W_A = S_1 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

5. 欧式互换卖权的评价模型可由第二节的方法求解。重写(7)如下( $S_1^*$  视为随机或浮动履约价):

$$\frac{W_p^*}{S_1^*} = \max\left(1 - \frac{S_2^*}{S_1^*}, 0\right) \quad (11)$$

它是卖权的到期现金流量, 标的价格为  $S_2^*/S_1^*$ , 履约价为 1。因此, 互换卖权的评价模型  $W_p$ , 可利用 Black-Scholes 卖权评价模型求解如下:

$$\frac{W_p}{S_1} = 1 \cdot e^{-r(t)} N(-d_2') - \left(\frac{S_2}{S_1}\right) N(-d_1') \quad (12)$$

$$\therefore W_p = S_1 N(-d_2') - S_2 N(-d_1') \quad (13)$$

此处:

$$d_1' = \frac{\ln(S_2/S_1) + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (14)$$

$$d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{t}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}\left[\frac{d(S_2/S_1)}{(S_2/S_1)}\right] = \text{Var}[\ln(S_2/S_1)] = \text{Var}(\ln(S_1/S_2))$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

6. 公式(13)也可解释为美式互换卖权的评价模型,其履约价  $Ke^{-rt}$  ( $= S_1$ ) 随时间成长,故其评价模型为:

$$W_p = Ke^{-rt}N(-d_2') - S_2N(-d_1') \quad (15)$$

7. 互换选择权的买卖权平价关系(Put-Call Parity)。

建构两个组合如下:

组合 A: 包括持有美式互换买权  $W_A(S_1, S_2, t)$  (标的为  $S_1$ , 履约价为  $S_2$ ), 并出售美式互换卖权  $W_A(S_2, S_1, t)$  (标的为  $S_2$ , 履约价为  $S_1$ ), 加上持有资产  $S_2$ 。

组合 B: 包括持有资产  $S_1$ 。

根据第三点的结果, 美式互换选择其实是欧式互换选择。在到期时组合 A 及 B 的价值如下:

$$\begin{aligned} \text{组合 A} &= W_A^*(S_1^*, S_2^*, t) - W_A^*(S_2^*, S_1^*, t) + S_2^* \\ &= \max(S_1^* - S_2^*, 0) - \max(S_2^* - S_1^*, 0) + S_2^* \\ &= \begin{cases} (S_1^* - S_2^*) - 0 + S_2^* = S_1^* & \text{if } S_1^* > S_2^* \\ S_2^* = S_1^* & \text{if } S_1^* = S_2^* \\ 0 - (S_2^* - S_1^*) + S_2^* = S_1^* & \text{if } S_1^* < S_2^* \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{组合 B} = S_1^*$$

故在到期时, 组合 A 价值等于组合 B 价值。互换选择权的平价关系于是成立:

美式互换选择权平价关系:

$$W_A(S_1, S_2, t) - W_A(S_2, S_1, t) + S_2 = S_1 \quad (16)$$

欧式互换选择权

$$W_e(S_1, S_2, t) - W_e(S_2, S_1, t) + S_2 = S_1 \quad (17)$$

注:  $W_A$  代表美式,  $W_e$  代表欧式。

## 参 考 文 献

- M. Margrabe, "The Value of An Option to Exchange One Asset For Another", *Journal of Finance*, Vol. XXXIII, No. 1, March 1978, p. 177—186.
- R. C. Merton, "The Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4(Spring 1973), p. 141—183.

## 第十一章 后定选择权(Chooser Options)

### 一、简介

买权是一种多头格局的商品,当标的股价如同预期上升,则买权持有人获利。但若标的股价不上升反而下跌,则卖权持有人获利。在不确定的市场情况下,投资人很难预期未来标的股票是否会上升或下跌。因此,在不确定市场环境下预先买进买权或卖权的风险极高。但可买进下跨式(Long Straddles),即同时买进买权及卖权。若在到期时,标的股价(大幅)上升,下跨式内的买权获利;若下跌,则下跨式内的卖权获利。唯一的缺点是,买进下跨式必须同时支付买权及卖权的权利金成本。为降低成本,可设计另一种商品,允许持有人在到期前某一特定时间决定该商品是买权或卖权,而不是如同下跨式允许持有人在到期时再做决定是买权或卖权。因此,此种商品的成本会较低。这也就是后定选择权(Chooser Options)设计的本意。Banker Trust 曾在 1990 年发行以油价及德国 DAX 指数为标的物的后定选择权。后定选择权的评价是由 Rubinstein (1992)所介绍。

### 二、后定选择权的评价

我们仍然沿用 Black-Scholes 的假设及股价的 Ito 随机过程。后定选择权  $W^*$  在选择时点  $t$  的现金流量为:

$$W^* = \max[C^*(K, T-t, T), P^*(K, T-t, T); t] \quad (1)$$

此处:

$C^*$  = 欧式买权在时点  $t$  的价值, 履约价  $K$

$P^*$  = 欧式卖权在时点  $t$  的价值, 履约价  $K$

$t$  = 持有人在到期前择选是买权或卖权的时点,  $t < T$

$T-t$  = 从择选时点  $t$  至到期日  $T$  的时间长度

因买卖权平价关系在选择权期间的任一时点都成立:

$$C^* = P^* + S^* e^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \quad (2)$$

此处:  $q$  代表标的股连续支付股息率  $q$ ; 符号  $*$  代表时点  $t$ 。

将(2)代入(1)得

$$\begin{aligned} W^* &= \max[C^*(K, T-t, T), C^*(K, T-t, T) \\ &\quad - S^* e^{-q(T-t)} + Ke^{-r(T-t)}; t] \\ &= C^*(K, T-t, T) + \max[Ke^{-r(T-t)} - S^* e^{-q(T-t)}, 0; t] \quad (3) \end{aligned}$$

公式(3)说明后定选择权是由两个选择权组合而成:

1. 第一个选择权是到期日  $T$  的买权  $C^*(K, T-t, T)$ , 履约价为  $K$ , 标的股价  $S^*$ 。

2. 第二个选择权是卖权, 标的股的到期股价为  $S^* e^{-q(T-t)}$ , 履约价为  $Ke^{-r(T-t)}$ , 到期日为  $t$ 。

因此, 根据 Black-Scholes 评价模型, 后定选择权的现在价格为: (现在时点设定为零)

$$W = Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) + Ke^{-rt}N(-d_2') - Se^{-qt}N(-d_1') \quad (4)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$



$$d_1' = \frac{\ln(Se^{-q}/Ke^{-r}) + (\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{t}$$

评价公式(4)内的最后两项是卖权在期初的价值,  $t$  是择选时刻。因此, 若择选时刻  $t$  愈长, 卖权的价值愈大, 因此后定选择权的价值也愈大。当  $t$  等于  $T$  时, 后定选择权其实包括买权及卖权, 两者的到期日同样是  $T$ , 后定选择权完全成为下跨式, 其价值等于下跨式的价值。又当  $t = 0$ , 卖权价值为零, 则后定选择权变成买权。以上论点可由 Rubinstein (1992) 的实证得到证明如下:

输入资料:  $S = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = \ln 1.1$ ,  $q = \ln 1.05$ ,  $T = 1$  年

$t$	后定选择权
0	13.39 (买权价值)
0.1	15.17
0.2	16.50
0.5	19.28
1	22.46 (下跨式的价值)

### 三、多期定点后定选择权

前一节的分析是在到期前单点、择选买权或卖权。其结果也可延伸至多点择选买权或卖权。令  $t_1, t_2, \dots, t_n, (t_n \leq T)$  为在选择权有效期内的  $n$  个择选时点。则多点后定选择权的现金流量可表示如下:

$$\begin{aligned} W_m^* &= \sum_{i=1}^n \max[C^*(K, T-t_i, T), P^*(K, T-t_i, T); t_i] \quad (5) \\ &= \sum_{i=1}^n C^*(K, T-t_i, T) + \sum_{i=1}^n \max[0, Ke^{-r(T-t_i)} - S^* e^{-q(T-t_i)}; t_i] \end{aligned}$$

(利用买卖权平价关系, 公式(2))

由(5)得知,多点后定选择权是由下列买权及卖权组合而成:

1.  $n$  个相同到期日  $T$ , 相同履约价  $K$  及相同标的股价  $S^*$  的买权。  
( $n$  个相同的买权)。

2.  $n$  个卖权:不同到期日  $t_i$ , 不同履约价  $Ke^{-r(T-t_i)}$ , 且标的股价也不同  $S^*e^{-q(T-t_i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

由此,由单点后定选择权评价公式(4),我们可将多点后定选择权的评价模型( $W_n$ )求解如下:

$$W_n = n[Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)] \\ + \sum_{i=1}^n [Ke^{-rt_i}N(-d'_{2i}) - Se^{-qt_i}N(-d'_{1i})] \quad (6)$$

此处:

$$d'_{1i} = \frac{\ln(Se^{-qt_i}/Ke^{-rt_i}) + (\sigma^2/2)t_i}{\sigma\sqrt{t_i}} \\ = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)t_i}{\sigma\sqrt{t_i}} \\ d'_{2i} = d'_{1i} - \sigma\sqrt{t_i}$$

若持有人可在合约有效期内任一时点都可择选买权或卖权,则形成美式后定选择权。其评价可由(6)求得,即将(6)内卖权的和( $\sum_{i=1}^n$ )改换成对  $t_i$  的积分,  $t_i$  的积分上下限由 0 至  $T$ , 而且(6)式内的  $n$  改为  $T$ , 即可求解得美式后定选择权的评价模型。

#### 四、复杂型后定选择权

以上后定选择权的到期日相同,履约价也相同。但也可松绑此条件,让到期日不同,履约价也不同。也就是,投资人所选择的买权及卖权各有不同的到期日  $T_1$  及  $T_2$ , 及不同的履约价  $K_1$  及  $K_2$ 。则此种后定选择权的到期现金流量  $W_c^*$  为

$$W_c^* = \max[C^*(K_1, T_1), P^*(K_2, T_2); t] \quad (7)$$

此处:

$C^*(K_1, T_1)$  代表买权在到期日  $T_1$  的价值( $K_1$  是履约价)

$P^*(K_2, T_2)$  代表卖权在到期日  $T_2$  的价值( $K_2$  是履约价)

复杂型后定选择权的评价过程很复杂,其中涉及买权的买权(A Call on A Call,买权是标的)与卖权的买权(A Call on A put,卖权是标的)评价的求解。Rubinstein (1994)已有推导评价模型,重述如下,以做参考:

$$\begin{aligned} W_c = & S e^{-qT_1} N_2(d'_1, y_1, \rho_1) - K_1 e^{-rT_1} N_2(d'_1 - \sigma\sqrt{t}, y_1 - \sigma\sqrt{T_1}; \rho_1) \\ & - S e^{-qT_2} N_2(-d'_1, -y_2; \rho_2) \\ & + K_2 e^{-rT_2} N_2(-d'_1 + \sigma\sqrt{t}, -y_2 + \sigma\sqrt{T_2}; \rho_2) \end{aligned} \quad (8)$$

此处:

$$\begin{aligned} d'_1 &= \frac{\ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \\ y_1 &= \frac{\ln(S e^{-qT_1}/K_1 e^{-rT_1}) + \sigma^2 T_1/2}{\sigma\sqrt{T_1}} \\ y_2 &= \frac{\ln(S e^{-qT_2}/K_2 e^{-rT_2}) + \sigma^2 T_2/2}{\sigma\sqrt{T_2}} \\ \rho_1 &= \sqrt{t/T_1}, \rho_2 = \sqrt{t/T_2} \end{aligned}$$

$d'_1$  的  $X$  必须由下式求解:

$$\begin{aligned} & X e^{-q(T_1-t)} N(z_1) - K_1 e^{-r(T_1-t)} N(z_1 - \sigma\sqrt{T_1-t}) \\ & + X e^{-q(T_2-t)} N(-z_2) - K_2 e^{-r(T_2-t)} N(-z_2 + \sigma\sqrt{T_2-t}) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(可用 Newton-Raphson Method 或其他数值分析法求解  $X$ )

$$z_1 = \ln(X e^{-q(T_1-t)}/K_1 e^{-r(T_1-t)}) \div \sigma\sqrt{T_1-t} + \sigma\sqrt{T_1-t}/2$$

$$z_2 = \ln(X e^{-q(T_2-t)}/K_2 e^{-r(T_2-t)}) \div \sigma\sqrt{T_2-t} + \sigma\sqrt{T_2-t}/2$$

## 参 考 文 献

- M. Rubinstein, "Options For The Undecided", *From Black Scholes to Black Holes*, Chapter 28, *Risk* Publication (1992).

## 第十二章 极大值或极小值选择权

### 一、简介

在早期 Johnson (1981) 及 Stultz (1982) 曾求解, 以两种资产为标的物的最大值与最小值选择权 (Options on the Maximum or the Minimum of Two Risky Assets)。这种选择权可加以延伸至  $n$  种标的物的最大值或最小值选择权 ( $n > 2$ ), 但其数学的推演会更形复杂, 难以应付。为简化数学的复杂性, 我们可采用 Margrabe (1978) 互换选择权的评价方法以及 Martingale Pricing 的方法来简化求解评价过程的困难。本章的求解方法不同于 Johnson (1981) 的方法, 而是以 Martingale 评价方法完成求解。

### 二、最大值选择权的评价

Black-Scholes 所采用的标的物价格随机过程为:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1)$$

则 Black-Scholes 买权的评价模型为:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r}N(d_2) \quad (2a)$$

此处:

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2b)$$

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T} = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2c)$$

Black-Scholes 公式(2)也可以 Margrabe (1978)的方法求解如下:  
买权的到期现金流量为:

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

$$\therefore C_T/S_T = \max(1 - K/S_T, 0) \quad (3)$$

公式(3)代表  $(C_T/S_T)$  是卖权到期现金流量,标的物到期价格为  $K/S_T$ , 履约价为 1。该标的物在期初的价格是  $Ke^{-rT}/S$  (期初的时间设定为零,  $S$  代表期初股价)。按照 Black-Scholes 公式,该卖权的评价模型为:

$$\frac{C}{S} = 1 \cdot e^{0(r)} N(-d'_2) - (Ke^{-rT}/S) N(-d'_1) \quad (4)$$

或

$$C = SN(-d'_2) - Ke^{-rT} N(-d'_1) \quad (5a)$$

$$= SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (5b)$$

此处:

$$d'_2 = \frac{\ln(Ke^{-rT}/S) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln(K/S) - (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (5c)$$

$$= -\frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = -d_1$$

$$(\text{或 } -d'_2 = d_1)$$

$$d'_1 = d'_2 + \sigma \sqrt{T} = \frac{\ln(K/S) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$= -\frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = -d_2 \quad (5d)$$

$$(\text{或 } -d'_1 = d_2)$$

在以下的推导中,我们将以 Martingale 评价方法为主,附加(4)或(5)的延伸至  $n$  个标的。我们将以星号 \* 代表到期日。最大值选择权(或最大值买权)的到期现金流量  $C_{\max}^*$  为:

$$\begin{aligned} C_{\max}^* &= \max[\max(S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*) - K, 0], K = \text{履约价} \quad (6) \\ &= \max[\max_{1 \leq i \leq n} (S_i^* - K), 0] \end{aligned}$$

此处:  $\max_{1 \leq i \leq n} (S_i^* - K, 0)$  代表有一个  $(S_i^* - K)$  是最大值

$$= (S_i^* - K)I_A$$

此处:  $A = \{S_i^* > K \mid \text{有一个资产 } i, \text{ 其 } (S_i^* - K) \text{ 是最大}\}$

$I$  = 指标函数(Indicator Function)

在风险中立下,选择权的价格是其到期现金流量期望值的折现值,以公式如下:

$$\begin{aligned} C_{\max} &= e^{-rT} E(C_{\max}^*) = e^{-rT} E[(S_i^* - K)I_A] \\ &= e^{-rT} E(S_i^* I_A) - K e^{-rT} E(I_A) \end{aligned} \quad (7)$$

首先计算(7)内的第二项如下:

$$\begin{aligned} &- K e^{-rT} E^Q[I_{\{S_i^* > K \text{ for an asset } i\}}] \\ &= - K e^{-rT} P_r^Q[S_i^* > K \text{ for an asset } i] \\ &= - K e^{-rT} [1 - P_r^Q(\text{None of the } n \text{ assets for which } S_i^* > K)] \\ &= - K e^{-rT} [1 - P_r^Q(\text{all assets with } S_i^* \leq K)] \\ &= K e^{-rT} [1 - P_r^Q(S_1^* \leq K, S_2^* \leq K, \dots, S_n^* \leq K)] \end{aligned}$$

计算第  $i$  项如下:

$$\begin{aligned} \because S_i^* \leq K &\Rightarrow \ln S_i^* \leq \ln K \Rightarrow \ln S_i + \left(r - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i \Delta Z_i \leq \ln K \\ \therefore \frac{\Delta Z_i}{\sqrt{T}} &\leq \frac{\ln(K/S_i) - (r - \sigma_i^2/2)T}{\sigma_i \sqrt{T}} = - \underbrace{\frac{\ln(S_i/K) + (r - \sigma_i^2/2)T}{\sigma_i \sqrt{T}}}_{d_2(S_i, K, \sigma_i^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -d_2(S_1, K, \sigma_1^2) = d_1'(S_1, K, \sigma_1^2) \\
&\quad (\Delta Z_i = Z_{i,T} - Z_{i,0} = N(0, T)) \\
&= -Ke^{-rT} \left[ 1 - P_r \left( \frac{\Delta Z_1}{\sqrt{T}} \leq -d_2(S_1, K, \sigma_1^2), \frac{\Delta Z_2}{\sqrt{T}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \leq -d_2(S_2, K, \sigma_2^2), \dots, \frac{\Delta Z_n}{\sqrt{T}} \leq -d_2(S_n, K, \sigma_n^2) \right) \right] \\
&= -Ke^{-rT} [1 - N_n(-d_2(S_1, K, \sigma_1^2), -d_2(S_2, K, \sigma_2^2), \dots, \\
&\quad -d_2(S_n, K, \sigma_n^2); \rho_{12}, \rho_{13}, \dots)] \quad (8)
\end{aligned}$$

此处:  $d_2(S_i, K, \sigma_i^2) = \frac{\ln(S_i/K) + (r - \sigma_i^2/2)T}{\sigma_i\sqrt{T}} = -d_1'(S_i, K, \sigma_i^2)$

$\rho_{ij} = \text{Corr}(dS_i/S_i, dS_j/S_j) =$  资产  $i$  及  $j$  报酬率相关系数

$N_n(\cdot)$  代表多变量 ( $n$  个) 标准正态的累积概率。

对照(8)与(5a)[或(8)与(5)], 公式(8')[即(7)的第二项], 像似 Black-Scholes 公式(5a)内的第二项延伸至  $n$  个资产的情况。而(7)内的第一项像似(5a)内的第一项延伸至  $n$  个资产的情况。我们将在下文求解(7)的第一项。

$$e^{-rT}E(S_i^* I_A) = e^{-rT}S_i e^{rT}E[e^{-\frac{\sigma_i^2}{2}T + \sigma_i \Delta Z_T} I_A]$$

$$\left( \text{此处: } S_T = S_i \exp[(r - \sigma_i^2/2)T + \sigma_i \Delta Z_T] \right)$$

$$= S_i E^R[I_A] \quad (\text{using Girsanov Theorem and the expectation is taken under probability measure } R)$$

$$= S_i E^R[I_{|S_i^*| > K \text{ for one } i}] \quad (\text{共有 } n \text{ 项})$$

$$= S_1 E^R[I_{|S_1^*| > K, S_2^* < S_1^*, \dots, S_n^* < S_1^*}] \quad (S_1 = \max_{1 \leq j \leq n} S_j)$$

$$+ S_2 E^R[I_{|S_2^*| > K, S_1^* < S_2^*, S_3^* < S_2^*, \dots, S_n^* < S_2^*}] \quad (S_2 \text{ 是 } \max)$$

$$+ \dots$$

$$+ S_n E^R[I_{|S_n^*| > K, S_1^* < S_n^*, S_2^* < S_n^*, \dots, S_{n-1}^* < S_n^*}] \quad (S_n^* \text{ 是 } \max)$$



$$\begin{aligned}
&= S_1 P_r^R \left[ 1 - \frac{K}{S_1^*} > 0, 1 - \frac{S_2^*}{S_1^*} > 0, \dots, 1 - \frac{S_n^*}{S_1^*} > 0 \right] \\
&\quad (\text{all stock prices are measured in units of } S_1) \\
&+ S_2 P_r^R \left[ 1 - \frac{K}{S_2^*} > 0, 1 - \frac{S_1^*}{S_2^*} > 0, \dots, 1 - \frac{S_n^*}{S_2^*} > 0 \right] \\
&\quad (\text{all stock prices are measured in units of } S_2) \\
&+ \dots \\
&+ S_n P_r^R \left[ 1 - \frac{K}{S_n^*} > 0, 1 - \frac{S_1^*}{S_n^*} > 0, \dots, 1 - \frac{S_{n-1}^*}{S_n^*} > 0 \right] \\
&\quad (\text{all stock prices are measured in units of } S_n) \\
&= S_1 N_n \left[ -d_2'(x_1, 1, \sigma_1^2), -d_2'\left(\frac{S_2}{S_1}, 1, \sigma_{12}^2\right), \dots, \right. \\
&\quad \left. -d_2'\left(\frac{S_n}{S_1}, 1, \sigma_{1n}^2\right); \rho_{12}, \rho_{13}, \dots \right] \\
&+ S_2 N_n \left[ -d_2'(x_2, 1, \sigma_2^2), -d_2'\left(\frac{S_1}{S_2}, 1, \sigma_{12}^2\right), \dots, \right. \\
&\quad \left. -d_2'\left(\frac{S_n}{S_2}, 1, \sigma_{2n}^2\right); \rho_{2,12}, \rho_{2,23}, \dots \right] \\
&+ \dots \\
&+ S_n N_n \left[ -d_2(x_n, 1, \sigma_n^2), -d_2\left(\frac{S_1}{S_n}, 1, \sigma_{1n}^2\right), \dots, \right. \\
&\quad \left. -d_2\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}, 1, \sigma_{1n}^2\right); \rho_{1,12}, \rho_{1,13}, \dots \right]
\end{aligned}$$

此处:

$$x_1 = Ke^{-rT}/S_1, x_2 = Ke^{-rT}/S_2, \dots, x_n = e^{-rT}K/S_n$$

$$d_2'(x_1, 1, \sigma_1^2) = \frac{\ln x_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T}{\sigma_1 \sqrt{T}} = -\frac{\ln(S_1/K) + \left(r + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T}{\sigma_1 \sqrt{T}}$$

$$= -d_1(S_1, K, \sigma_1^2)$$

(利用(2b) 的观念)

$$d_2'(x_2, 1, \sigma_2^2) = -\frac{\ln(S_2/K) + \left(r + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T}{\sigma_2\sqrt{T}} = -d_1(S_2, K, \sigma_2^2)$$

(利用(2b) 的观念)

⋮

$$d_2'(x_n, 1, \sigma_n^2) = -\frac{\ln(S_n/K) + \left(r + \frac{\sigma_n^2}{2}\right)T}{\sigma_n\sqrt{T}} = -d_1(S_n, K, \sigma_n^2)$$

或 
$$d_2(x_i, 1, \sigma_i^2) = -\frac{\ln(S_i/K) + \left(r + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}}$$

$$= -d_1(S_i, K, \sigma_i^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

所以

$$d_2'\left(\frac{S_2}{S_1}, 1, \sigma_{12}^2\right) = \frac{\ln(S_2/S_1) - \frac{\sigma_{12}^2 T}{2}}{\sigma_{12}\sqrt{T}} = -\frac{\overbrace{\ln(S_1/S_2) + \sigma_{12}^2 T/2}^{d_1}}{\sigma_{12}\sqrt{T}}$$

$$= -d_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2)$$

$$\sigma_{12}^2 = \text{Var}[\ln(S_1^*/S_2^*)] = \text{Var}[\ln(S_2^*/S_1^*)]$$

$$d_2'\left(\frac{S_3}{S_1}, 1, \sigma_{13}^2\right) = -\underbrace{\frac{\ln(S_1/S_3) + \frac{\sigma_{13}^2 T}{2}}{\sigma_{13}\sqrt{T}}}_{d_1} = -d_1(S_1, S_3, \sigma_{13}^2)$$

$$\sigma_{13}^2 = \text{Var}[\ln(S_1^*/S_3^*)] = \text{Var}[\ln(S_3^*/S_1^*)]$$

⋮

$$d_2'\left(\frac{S_n}{S_1}, 1, \sigma_{1n}^2\right) = -\underbrace{\frac{\ln(S_1/S_n) + \frac{\sigma_{1n}^2 T}{2}}{\sigma_{1n}\sqrt{T}}}_{d_1} = -d_1(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2)$$

$$\sigma_{1n}^2 = \text{Var}[\ln(S_1^*/S_n^*)] = \text{Var}[\ln(S_n^*/S_1^*)]$$

$$\begin{aligned} d_2'\left(\frac{S_1}{S_2}, 1, \sigma_{12}^2\right) &= \frac{\ln(S_1/S_2) - \frac{\sigma_{12}^2 T}{2}}{\sigma_{12}\sqrt{T}} = -\frac{\ln(S_2/S_1) + \frac{\sigma_{12}^2 T}{2}}{\sigma_{12}\sqrt{T}} \\ &= -d_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2) \end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^2 = \text{Var}[\ln(S_2/S_1)] = \text{Var}[\ln(S_1^*/S_2^*)]$$

$$d_2'\left(\frac{S_3}{S_2}, 1, \sigma_{23}^2\right) = -\frac{\ln(S_2/S_3) + \frac{\sigma_{23}^2 T}{2}}{\sigma_{23}\sqrt{T}} = -d_1(S_2, S_3, \sigma_{23}^2)$$

$$\sigma_{23}^2 = \text{Var}[\ln(S_3^*/S_2^*)]$$

⋮

$$d_2'\left(\frac{S_n}{S_2}, 1, \sigma_{2n}^2\right) = \frac{\ln(S_2/S_n) + \frac{\sigma_{2n}^2 T}{2}}{\sigma_{2n}\sqrt{T}} = -d_1(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2)$$

$$\sigma_{2n}^2 = \text{Var}[\ln(S_n^*/S_2^*)]$$

相同的

$$\begin{aligned} d_2'\left(\frac{S_i}{S_n}, 1, \sigma_{in}^2\right) &= -\frac{\ln(S_n/S_i) + \frac{\sigma_{in}^2 T}{2}}{\sigma_{in}\sqrt{T}} \\ &= -d_1(S_n, S_i, \sigma_{in}^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

$$\sigma_{in}^2 = \text{Var}[\ln(S_n^*/S_i^*)]$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{-rT}E(S_i I_A) &= S_1 N_n[d_1(S_1, K, \sigma_1^2), d_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, \\ &\quad d_1(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), \rho_{1,12}, \rho_{1,13}, \dots] \\ &\quad + S_2 N_n[d_1(S_2, K, \sigma_2^2), d_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \dots, \\ &\quad d_1(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), \rho_{2,12}, \rho_{2,23}, \dots] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + S_n N_n[d_1(S_n, K, \sigma_n^2), d_1(S_n, S_1, \sigma_{1n}^2), \\ &\quad \dots, d_1(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n,n-1}^2), \rho_{n,1n}, \rho_{n,2n}, \dots] \quad (9) \end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^2 &= \text{Var}[\ln(S_i^*/S_j^*)] = \text{Var}[\ln S_i^* - \ln S_j^*] \\ &= \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\end{aligned}$$

$$\text{Cov}\left(\ln S_i^*, \ln \frac{S_i^*}{S_j^*}\right) = \text{Cov}(\ln S_i^*, \ln S_i^* - \ln S_j^*)$$

$$= \sigma_i^2 - \text{Cov}(\ln S_i, \ln S_j) = \sigma_i^2 - \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$\rho_{i, ij} = \frac{\text{Cov}(\ln S_i^*, \ln(S_i^*/S_j^*))}{\sigma_i\sigma_{ij}} = \frac{\sigma_i^2 - \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}{\sigma_i\sigma_{ij}} = \frac{\sigma_i - \rho_{ij}\sigma_j}{\sigma_{ij}}$$

$$\text{Cov}\left(\ln \frac{S_i^*}{S_k^*}, \ln \frac{S_i^*}{S_j^*}\right) = \text{Cov}(\ln S_i^* - \ln S_k^*, \ln S_i^* - \ln S_j^*)$$

$$= \text{Cov}(\ln S_i^*, \ln S_i^*) - \text{Cov}(\ln S_i^*, \ln S_j^*)$$

$$- \text{Cov}(\ln S_k^*, \ln S_i^*) + \text{Cov}(\ln S_k^*, \ln S_j^*)$$

$$= \sigma_i^2 - \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j - \rho_{ki}\sigma_k\sigma_i + \rho_{kj}\sigma_k\sigma_j$$

$$\rho_{i, jk} = \frac{\text{Cov}[\ln(S_i^*/S_k^*), \ln(S_i^*/S_j^*)]}{\sigma_{ik}\sigma_{ij}}$$

$$= \frac{\sigma_i^2 - \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j - \rho_{ki}\sigma_k\sigma_i + \rho_{kj}\sigma_k\sigma_j}{\sigma_{ik}\sigma_{ij}}$$

对照(9)与(5b)可知,公式(9)[即(7)的第一项]像似 Black-Scholes 公式(5b)内的第一项延伸至  $n$  个资产的情况。因此,极大值选择权(买权)的评价模型像似 Black-Scholes 买权评价模型延伸至  $n$  个标的资产的模型。最后,将(8)及(9)加在一起,即是极大值买权的评价模型表示如下:

$$\begin{aligned}C_{\max} &= S_1 N_n[d_1(S_1, K, \sigma_1^2), d_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, \\ &\quad d_1(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), \rho_{1, 12}, \rho_{1, 13}, \dots] \\ &\quad + S_2 N_n[d_2(S_2, K, \sigma_2^2), d_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \dots, \\ &\quad d_1(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), \rho_{2, 12}, \rho_{2, 23}, \dots]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots \\
& + S_n N_n [d_1(S_n, K, \sigma_{1n}^2), d_1(S_n, S_1, \sigma_{2n}^2), \cdots, \\
& d_1(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n, n-1}^2), \rho_{n, 1n}, \rho_{n, 2n}, \cdots] \\
& - Ke^{-rT} [1 - N_n(-d_2(S_1, K, \sigma_1^2), -d_2(S_2, K, \sigma_2^2), \cdots, \\
& -d_2(S_n, K, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \cdots)] \quad (10)
\end{aligned}$$

Johnson (1981) 及 Stultz (1982) 是以两个资产为标的物的最大值选择权, 他们的模型当然是 (10) 的一种特殊情况。将 (10) 内的  $n$  设定为  $n = 2$ , 则 (10) 立刻缩减成为他们的模型如下:

$$\begin{aligned}
C_{\max(2)} = & S_1 N_2 [d_1(S_1, K, \sigma_1^2), d_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \rho_{1, 12}] \\
& + S_2 N_2 [d_1(S_2, K, \sigma_2^2), d_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \rho_{2, 12}] \\
& - Ke^{-rT} N_2 [d_2(S_1, K, \sigma_1^2), d_2(S_2, K, \sigma_2^2), \rho_{12}] \quad (11)
\end{aligned}$$

此处:  $N_2(\cdot)$  代表二元数正态分布的累积概率。

### 三、最小值选择权的评价

第二节求解最大值选择权的方法可应用于求解最小值选择权 (Options on the Minimum of Several Assets) 的评价。最小值选择权的到期现金流量  $C_{\min}^*$  为:

$$\begin{aligned}
C_{\min}^* = & \min[\min(S_1^*, S_2^*, \cdots, S_n^*) - K, 0] \quad (12) \\
= & \min[(S_i^* - K)I_c]
\end{aligned}$$

此处:  $c = \{ \text{最小值资产 } i \text{ 满足条件 } S_i^* - K > 0 \}$

在风险中立下, 最小值选择权的价值为:

$$\begin{aligned}
C_{\min} = & e^{-rT} E(C_{\min}^*) = e^{-rT} E[\min(S_i^* - K)I_c] \\
= & e^{-rT} E[(S_i^* - K)I_c] \\
= & e^{-rT} E(S_i^* I_c) - Ke^{-rT} E(I_c) \quad (13)
\end{aligned}$$

首先求解(13)内的第一项(与求解(8)相似):

$$\begin{aligned}
 e^{-rT}E(S_1^* I_c) &= S_1 E^R[I_c], \text{ using Girsanov Theorem} \\
 &= S_1 E^R[I_{\text{最小值资产, 满足条件 } S_1^* - K > 0}] \\
 &= S_1 P_r^R[S_1^* > K, S_2^* > S_1^*, \dots, S_n^* > S_1^*] \\
 &\quad (S_1^* = \min_{j=1, n} S_j^* \text{ (即 } S_1^* \text{ 是最小)}) \\
 &\quad + S_2 P_r^R[S_2^* > K, S_1^* > S_2^*, \dots, S_n^* > S_2^*] \\
 &\quad (S_2^* = \min_{j=1, n} S_j^*) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + S_n P_r^R[S_n^* > K, S_1^* > S_n^*, \dots, S_{n-1}^* > S_n^*] \\
 &\quad (S_n^* = \min_{j=1, n} S_j^*) \\
 &= S_1 P_r^R\left[1 - \frac{K}{S_1^*} > 0, 1 - \frac{S_2^*}{S_1^*} < 0, \dots, 1 - \frac{S_n^*}{S_1^*} < 0\right] \\
 &\quad (\text{以 } S_1^* \text{ 作计价单位}) \\
 &\quad + \\
 &\quad S_2 P_r^R\left[1 - \frac{K}{S_2^*} > 0, 1 - \frac{S_1^*}{S_2^*} < 0, \dots, 1 - \frac{S_n^*}{S_2^*} < 0\right] \\
 &\quad (\text{以 } S_2^* \text{ 作计价单位}) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + S_n P_r^R\left[1 - \frac{K}{S_n^*} > 0, 1 - \frac{S_1^*}{S_n^*} < 0, \dots, 1 - \frac{S_{n-1}^*}{S_n^*} < 0\right] \\
 &\quad (\text{以 } S_n^* \text{ 作计价单位}) \\
 &= S_1 N_n\left[-d_2'(x_1, 1, \sigma_1^2), d_2\left(\frac{S_2}{S_1}, 1, \sigma_{12}^2\right), \dots, \right. \\
 &\quad \left. d_2\left(\frac{S_n}{S_1}, 1, \sigma_{1n}^2\right), \rho_{1, 12}, \rho_{1, 13}, \dots\right] \\
 &\quad + S_2 N_n\left[-d_2'(x_1, 1, \sigma_2^2), d_2\left(\frac{S_1}{S_2}, 1, \sigma_{12}^2\right), \dots, \right. \\
 &\quad \left. d_2\left(\frac{S_n}{S_2}, 1, \sigma_{2n}^2\right), \rho_{2, 12}, \rho_{2, 13}, \dots\right] \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

$$+ S_n N_n \left[ -d'_2(x_n, 1, \sigma_n^2), d_2\left(\frac{S_1}{S_n}, 1, \sigma_{1n}^2\right), \dots, \right. \\ \left. d_2\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}, 1, \sigma_{n, n-1}^2\right), \rho_{n, 1n}, \rho_{n, 2n}, \dots \right]$$

此处: 有关  $(1 - K/S_i^*) > 0$  的求解是利用(4)的卖权观念求解, 而  $(1 - S_i^*/S_j^*) < 0$  是以买权的观念求解( $\because S_i^*/S_j^* - 1 > 0$ )。

$$d'_2(x_i, 1, \sigma_i^2) = \frac{\ln x_i - \sigma_i^2 T/2}{\sigma_i \sqrt{T}} = -\frac{\ln(S_i/K) + (r + \sigma_i^2 T/2)}{\sigma_i \sqrt{T}} \\ = -d_1(S_i, K, \sigma_i^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{(利用(4)第一项的观念 } N(-d'_2), \text{即求解卖权的观念)}$$

$$d_2\left(\frac{S_i}{S_1}, 1, \sigma_{1i}^2\right) = \frac{\ln(S_i/S_1) + (\sigma_{1i}^2/2)T}{\sigma_{1i} \sqrt{T}} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ = -\frac{\ln(S_1/S_i) - (\sigma_{1i}^2/2)T}{\sigma_{1i} \sqrt{T}} = -d'_1(S_1, S_i, \sigma_{1i}^2) \\ \text{(相当于(5a)及(5b)的第二项 } N(\cdot), -d_2 = d'_1)$$

$$d_i\left(\frac{S_i}{S_2}, 1, \sigma_{2i}^2\right) = \frac{\ln(S_i/S_2) + (\sigma_{2i}^2/2)T}{\sigma_{2i} \sqrt{T}} \quad (i \neq 2) \\ = -\frac{\ln(S_2/S_i) - (\sigma_{2i}^2/2)T}{\sigma_{2i} \sqrt{T}} = -d'_1(S_2, S_i, \sigma_{2i}^2)$$

其余类推

$$\therefore e^{-rT} E(S_i^* I_c) = S_1 N_n [d_1(S_1, K, \sigma_1^2), -d'_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, \\ -d'_1(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), \rho_{1, 12}, \rho_{1, 13}, \dots] \\ + S_2 N_n [d_1(S_2, K, \sigma_2^2), -d'_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \\ \dots, -d'_1(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), -\rho_{2, 12}, -\rho_{2, 23}, \dots] \\ + \dots \\ + S_n N_n [d_1(S_n, K, \sigma_n^2), -d'_1(S_n, S_1, \sigma_{n1}^2), \\ \dots, -d'_1(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n, n-1}^2), -\rho_{n, n1}, -\rho_{n, n2}, \dots] \\ (14)$$

完成(13)内第一项的求解后,第二项的求解比较容易,我们进行如下:

$$\begin{aligned}
 -Ke^{-rT}E(I_c) &= -Ke^{-rT}P_r(\text{最小值资产 } i \text{ 满足条件 } S_i - K > 0) \\
 &= -Ke^{-rT}P_r(S_1^* - K > 0, S_2^* - K > 0, \dots, S_n^* - K > 0) \\
 &= -Ke^{-rT}N_n[-d_1'(S_1, K, \sigma_1^2), -d_1'(S_2, K, \sigma_2^2), \dots, \\
 &\quad -d_1'(S_n, K, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \dots] \\
 &\quad (\text{利用(4)内的第二项 } N(-d_1') \text{ 的理由, 以及 } -d_1' = d_2) \\
 &= -Ke^{-rT}N_n[d_2(S_1, K, \sigma_1^2), d_2(S_2, K, \sigma_2^2), \dots, \\
 &\quad d_2(S_n, K, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \dots] \quad (15)
 \end{aligned}$$

最后将(14)及(15)加起来即是最小值选择权的评价模型如下:

$$\begin{aligned}
 C_{\min} &= S_1 N_n[d_1(S_1, K, \sigma_1^2), -d_1'(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, \\
 &\quad -d_1'(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), -\rho_{1,12}, -\rho_{1,13}, \dots] \\
 &\quad + S_2 N_n[d_1(S_2, K, \sigma_2^2), -d_1'(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \dots, \\
 &\quad -d_1'(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), -\rho_{2,12}, -\rho_{2,23}, \dots] \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + S_n N_n[d_1(S_n, K, \sigma_n^2), -d_1'(S_n, S_1, \sigma_{n1}^2), \dots, \\
 &\quad -d_1'(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n,n-1}^2), -\rho_{n,n1}, -\rho_{n,n2}, \dots] \\
 &\quad - Ke^{-rT} N_n[d_2(S_1, K, \sigma_1^2), d_2(S_2, K, \sigma_2^2), \dots, \\
 &\quad d_2(S_n, K, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \dots] \quad (16)
 \end{aligned}$$

若令  $n = 2$ , 则(16)变化成为 Stultz (1982)以两种资产为标的物的最小值选择权如下:

$$\begin{aligned}
 C_{\min(2)} &= S_1 N_n[d_1(S_1, K, \sigma_1^2), -d_1'(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), -\rho_{1,12}] \\
 &\quad + S_2 N_n[d_1(S_2, K, \sigma_2^2), -d_1'(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), -\rho_{2,12}] \\
 &\quad - Ke^{-rT} N_n[d_2(S_1, K, \sigma_1^2), d_2(S_2, K, \sigma_2^2), -\rho_{12}] \quad (17)
 \end{aligned}$$

## 四、特 性

### 1. 线性同质(Linear Homogeneity)



根据线性同质的定义,我们可观察到  $C_{\max}$  及  $C_{\min}$  对股价  $S_1, S_2, \dots, S_n$  及履约价  $K$  都具有线性同质的条件。因此,由 Euler 定理 (Euler's Equation) 下列公式成立:

$$C_{\max} = \frac{\partial C_{\max}}{\partial S_1} S_1 + \frac{\partial C_{\max}}{\partial S_2} S_2 + \dots + \frac{\partial C_{\max}}{\partial S_n} S_n + \frac{\partial C_{\max}}{\partial K} K \quad (18)$$

与

$$C_{\min} = \frac{\partial C_{\min}}{\partial S_1} S_1 + \frac{\partial C_{\min}}{\partial S_2} S_2 + \dots + \frac{\partial C_{\min}}{\partial S_n} S_n + \frac{\partial C_{\min}}{\partial K} K \quad (19)$$

2. 若所有股价及履约价都相等 ( $S_i = K, i = 1, 2, \dots, n$ ), 且到期日很长 ( $T \rightarrow \infty$ ), 则  $C_{\max}$  内的  $d_1$  趋近  $\infty$ , 而  $d_2$  趋近 0, 所以  $N_u[d_1 = \infty, \dots, d_1 = \infty] = 1$  及  $N_r[d_2 = 0, \dots, d_2 = 0] = 0$ 。故由(10):

$$C_{\max} = S_1 + S_2 + \dots + S_n \quad (20)$$

3. 在 Johnson (1981) 及 Stultz (1982) 的论文内已证明: 在 2 个标的物下

$$C_{\max(2)} + C_{\min(2)} = C(S_1, K, T) + C(S_2, K, T) \quad (21)$$

此处:  $C(S_i, K, T)$  代表一般买权, 标的股价为  $S_i$ , 履约价为  $K$ , 到期日  $T$ 。

虽然本章只介绍最大值与最小值买权, 同样的求解方法也可用来求解最大值与最小值卖权的评价模型(课堂作业)。

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973), p. 637—659.
- H. Johnson, "The Pricing of Complex Options", *Unpublished Manuscript August*, 1981.
- W. Margrabe, "The Value of An Option to Exchange one Asset for Another", *Journal of Finance*, 33 (March 1973), p. 177—186.

- R. Stultz, "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risk Assets: Analysis and Applications", *Journal of Financial Economics*, 10 (July 1982), p. 161—182.

## 第十三章 混合选择权(Compound Options)

### 一、定 义

一般选择权是以股票、债券、利率或外汇等作为标的物而衍生的选择权。但混合选择权却是以选择权作为标的物的选择权。可分为 4 种不同的混合选择权。

1. 买权的买权(A Call on A Call, CC):以买权为标的买权,其到期时现金流量  $CC_t$  为

$$CC_t = \max[0, \underbrace{PV_t[\max(0, S^* - k) | T]}_{\text{标的买权在 } t \text{ 的价值}}] - K \quad (1)$$

混合买权在到期日  $t$  的价值

此处:  $S^*$  = 到期时标的股价

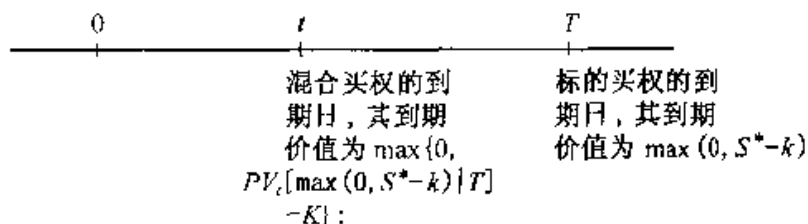
$k$  = 标的买权的履约价

$T$  = 标的买权的到期日

$K$  = 混合买权的履约价(买权的买权履约价)

$t$  = 混合买权的到期日( $t < T$ ),混合买权的到期日比标的买权的到期日短

$PV_t[\max(0, S^* - k) | T]$  代表标的买权在混合买权到期  $t$  的价格。若标的买权在  $t$  的价值大于  $K$ ,则混合买权有价值,持有人履约取得标的买权(其到期日  $T$ ,履约价  $k$ )。若在混合买权到期日  $t$ ,标的买权的价值小于或等于  $K$ ,则混合买权无价值,持有人不履约(即不取得标的买权)。



$$= \begin{cases} PV_t[\max(0, S^* - k) | T] (\text{履约取得标的买权}) & \text{若} \\ PV_t[\max(0, S^* - k) | T] > K \\ 0 (\text{不履约}), & \text{若不是} \end{cases}$$

2. 买权的卖权(A Put on A Call, PC), 以买权为标的卖权, 其到期时( $t$ )的现金流量为:

$$PC_t = \max[0, K - \underbrace{PV_t[\max(0, S^* - k) | T]}_{\substack{\text{标的买权在 } t \text{ 的价值} \\ \text{混合卖权在到期日 } t \text{ 的价值, 履约价 } K}}] \quad (2)$$

此处: 标的买权的到期日为  $T(>t)$ , 履约价为  $k$ 。

3. 卖权的买权(A Call on A Put, CP), 以卖权为标的买权, 其到期时( $t$ )的现金流量为

$$CP_t = \max[0, \underbrace{PV_t[\max(0, k - S^* | T)]}_{\substack{\text{标的卖权在 } t \text{ 的价值} \\ \text{混合买权在到期日 } t \text{ 的价值}}} - K] \quad (3)$$

4. 卖权的卖权(A Put on A Put, PP), 以卖权为标的卖权, 其到期时( $t$ )的现金流量为

$$PP_t = \max[0, K - \underbrace{PV_t[\max(0, k - S^* | T)]}_{\substack{\text{标的卖权在 } t \text{ 的价值} \\ \text{混合卖权在到期日 } t \text{ 的价值}}}] \quad (4)$$

因为买权及卖权到期时价值的决定刚好是  $S^*$ ,  $k$  及  $K$  正负符号的对换, 因此上面 4 种不同形式的到期现金流量可以一个综合格式表示如下:

$$\max\{0, \phi PV_t[\max(0, \eta S^* - \eta k | T) - \phi K]\} \quad (5)$$

- 此处:1. 若  $\phi = 1$  及  $\eta = 1$ , 则(5) = (1), 买权的买权。  
 2. 若  $\phi = 1$  及  $\eta = -1$ , 则(5) = (3), 卖权的买权。  
 3. 若  $\phi = -1$  及  $\eta = 1$ , 则(5) = (2), 买权的卖权。  
 4. 若  $\phi = -1$  及  $\eta = -1$ , 则(5) = (4), 卖权的卖权。

## 二、混合选择权的评价

在风险中立下,混合选择权的价格  $CO$  是到期日现金流量期望值的现值。以公式表如下:

$$CO = r^{-t} E \{ \max[0, \phi PV_t [\max(0, \eta S^* - \eta k | T) - \phi K]] \} \quad (6)$$

根据(6)求解出的评价有 4 种不同的混合选择权(即  $\phi = \pm 1$  及  $\eta = \pm 1$ )。只要求解出其中之一的评价,即可将  $\phi$  及  $\eta$  的  $\pm 1$  符号变动求解出其他 3 种混合选择权的评价。因此,为简单计,我们首先求解买权的买权评价模型( $\phi = 1 = \eta$ )。根据(6)买权的买权  $CC$  评价模型为:

$$CC = r^{-t} E \{ \max[0, PV_t [\max(0, S^* - k | T) - K]] \} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= r^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} \max[0, PV_t [\max(0, S^* - k | T) \\ &\quad - K]] f(u) du \\ &= r^{-t} \int_{\ln(X/S)}^{\infty} [C(Se^u, t) - K] f(u) du \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{此处: } f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{t}}} \exp \left[ - \left( \frac{u - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} \right)^2 / 2 \right] \quad (-\infty < u < \infty)$$

$C(Se^u, t) = PV_t [\max(0, S^* - k | T) - K]$ , 标的买权在时间  $t$  的价值

$$S^* = S(S^*/S) = Se^u (u = \ln(S^*/S))$$

$X$  是能使  $C(Se^u, t)$  等于  $K$  的标的股价( $S_t$ )。由此股价  $X$  我们可设定(8)的积分下限为  $\ln(X/S)$ ; 因此,只要股价大于  $X$ , 则公式(8)内的  $C(Se^u, t) - K > 0$ 。积分函数才不致是零,也就是买

权的买权才会有价值。

$r = 1 + \text{无风险利率}$

将 Black-Scholes 买权的公式代入(8)内的  $C(Se^u, t)$ , 则(8)可改写为

$$CC = r^{-t} \int_{\ln(X/S)}^{\infty} \underbrace{[Se^u d^{-(T-t)} N(Z_t) - kr^{-(T-t)} N(Z_t - \sigma\sqrt{T-t}) - K]}_{C(Se^u, t)} f(u) du$$

此处:

$d = 1 + \text{股息率}$

$$Z_t = \frac{\ln(S_t d^{-(T-t)} / kr^{-(T-t)}) + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

(即 Black-Scholes 公式内的  $d_1$ )

$$Z_t - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(S_t d^{-(T-t)} / kr^{-(T-t)}) - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

(即 Black-Scholes 公式内的  $d_2$ )

$$\begin{aligned} &= Sr^{-t} d^{-(T-t)} \int_{\ln(X/S)}^{\infty} e^u N(Z_t) f(u) du \\ &\quad - kr^{-T} \int_{\ln(X/S)}^{\infty} N_1(Z_t - \sigma\sqrt{T-t}) f(u) du \\ &\quad - r^{-t} K \int_{\ln(X/S)}^{\infty} f(u) du \quad (\text{将积分拆解成三部分}) \quad (9) \end{aligned}$$

我们首先对第一部分积分进行求解如下:

$$\int_{\ln(X/S)}^{\infty} e^u N_1(Z_t) f(u) du = \int_a^{\infty} e^{\mu t + v\sigma\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} N_1(Z_t) dv$$

此处:  $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{t}}} e^{-(\frac{u-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})^2/2}, -\infty < u < \infty$

$$\text{令 } v = \frac{u - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} \Rightarrow u = \mu t + v\sigma\sqrt{t} \Rightarrow \frac{du}{dv} = \sigma\sqrt{t}$$

$$\begin{aligned} \therefore Z_t &= \ln(Se^u d^{-(T-t)} / kr^{-(T-t)}) \div \sigma\sqrt{T-t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \\ &= (u + \ln(Sd^{-(T-t)} / kr^{-(T-t)})) \div \sigma\sqrt{T-t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

$$= (\mu t + v\sigma\sqrt{t}) + \ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)}) \div \sigma\sqrt{T-t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$\left( \text{同时, 当 } u = \ln(X/S), v = \frac{\ln(X/S) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = h \text{ (积分下限)}, \right.$$

$$\left. \therefore h < v < \infty \right)$$

$$= \int_h^\infty \frac{N_1(Z_t)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma^2}{2} - 2v\sigma\sqrt{t}) - \mu t} dv$$

$$= \int_h^\infty \frac{N(Z_t)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(v-\sigma\sqrt{t})^2/2} e^{\ln(r/d)^t} dv$$

$$(\text{令 } W = v - \sigma\sqrt{t} \Rightarrow dW = dv - \sigma\sqrt{t})$$

$$= (r/d)^t \int_{W^*}^\infty \frac{N(Z_t)}{\sqrt{2\pi}} e^{-W^2/2} dW \quad \left( W^* = \frac{\ln(X/S) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t} \right)$$

$$= (r/d)^t \int_{W^*}^\infty N(Z_t) f(W) dW \quad \left( f(W) = N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-W^2/2} \right)$$

此处:

$$\begin{aligned} N_1(Z_t) &= N \left[ \frac{\mu t + W\sigma\sqrt{t} + \sigma^2 t + \ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)}) + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] \\ &= N \left[ \frac{\overbrace{\ln(r/d)^t}^{\mu t} - \sigma^2/2 + W\sigma\sqrt{t} + \ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)}) + \sigma^2(T+t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] \\ &= N \left[ \frac{W\sigma\sqrt{t} + \ln(Sd^{-T}/kr^{-T}) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] \\ &= N \left[ \frac{W\sigma\sqrt{t}/\sigma\sqrt{T} + \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T}) + (\sigma^2 T)/2}{\sigma\sqrt{T}}}{\sigma\sqrt{T-t}/\sigma\sqrt{T}} \right] \\ &= N \left[ \frac{W\sqrt{\frac{t}{T}} + \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T}) + (\sigma^2 T)/2}{\sigma\sqrt{T}}}{\sqrt{(T-t)/T}} \right] \end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T}) + \sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T}} \\
 &= N\left[\frac{y + \left(\sqrt{\frac{t}{T}}\right)W}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{t}{T}}\right)^2}}\right] = N\left[\frac{y + \rho W}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] \quad \left(\rho = \sqrt{\frac{t}{T}}\right)
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \text{第一部分积分} &= Sr^{-t}d^{-(T-t)}(r/d)^t \int_{W^*}^{\infty} N_1\left[\frac{y + \rho W}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] f(W) dW \\
 &= Sd^{-T} \int_{-\infty}^{-W^*} N_1\left[\frac{y - \rho W}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] f(W) dW \\
 &\quad (\text{令 } W^* = -W)
 \end{aligned} \tag{10}$$

此处:

$$\begin{aligned}
 -W^* &= \frac{\ln(X/S) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t} \\
 &= -\frac{\ln(X/S) - \ln \overbrace{(r/d)^t}^{\mu t} + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t} \\
 &= -\frac{\ln(Xr^{-t}/Sd^{-t}) + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t} \\
 &= \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t}) - \sigma^2 t/2 + \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}} \\
 &= \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t}) + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \\
 &= \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} = x
 \end{aligned}$$

因此,

第一部分积分

$$= Sd^{-T} \int_{-\infty}^x N\left[\frac{y - \rho W}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] f(W) dW = Sd^{-T} N_2(x, y; \rho) \tag{11}$$

[从(10)至(11),我们采用二元标准正态分布累积概率公式如下:



$$\begin{aligned}
 N_2(h, k; \rho) &= \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-X^2/2} \left[ \int_{-\infty}^{k-\rho X/\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-W^2/2} dW \right] dX \\
 &= \int_{-\infty}^h N_1 \left( \frac{k-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) f(X) dX
 \end{aligned} \tag{12}$$

[详见 Geske (1976) 的附录(p. 80)]。

第二部分的积分(公式(9))我们进行如下:

$$\text{第二部分积分} = kr^{-T} \int_{\ln(X/S)}^{\infty} N(Z_t - \sigma\sqrt{T-t}) f(u) du$$

$$\text{此处: } f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} e^{-\left(\frac{u-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2/2}$$

首先,令

$$v = \frac{u - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad u = \mu t + v\sigma\sqrt{t} \Rightarrow \frac{du}{dv} = \sigma\sqrt{t}$$

$$\text{当 } u = \ln(X/S), \quad v = \frac{\ln(X/S) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = v^* \quad (\text{积分下限})$$

$$\text{当 } u = \infty, \quad v = \infty \quad (\text{积分上限})$$

同时,

$$\begin{aligned}
 &Z_t - \sigma\sqrt{T-t} \\
 &= [u + \ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)})] \div \sigma\sqrt{T-t} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \sigma\sqrt{T-t} \\
 &= \frac{\mu t + v\sigma\sqrt{t} + \ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)})}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \\
 &= \frac{\overbrace{\ln(r/d)^t}^{\mu t} - \sigma^2 t/2 + v\sigma\sqrt{t} + \ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)}) - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 &= \frac{v\sigma\sqrt{t} + \ln(Sd^{-T}/kr^{-T}) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 &= \frac{v(\sigma\sqrt{t}/\sigma\sqrt{T}) + \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T})}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}}{\sigma\sqrt{T-t}/\sigma\sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v\left(\sqrt{\frac{t}{T}}\right) + \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T})}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}/2}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
&= \frac{v(\sqrt{t/T}) + \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} - \sigma\sqrt{T}}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
&= \frac{v\rho + (y - \sigma\sqrt{T})}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad y = \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T})}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}/2
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
g(v) &= f(u) \left| \frac{du}{dv} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} e^{-v^2/2} \sigma\sqrt{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \sim N(0, 1)
\end{aligned}$$

经过以上变量转换后,

$$\begin{aligned}
\text{第二部分积分} &= kr^{-T} \int_{v^*}^{\infty} N\left[\frac{v\rho + (y - \sigma\sqrt{T})}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] g(v) dv \\
&\quad (g(v) = N(0, 1)) \\
&= kr^{-T} \int_{-\infty}^{-v^*} N\left[\frac{(y - \sigma\sqrt{T}) - v\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] g(v) dv
\end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}
-v^* &= -\frac{\ln(X/S) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = -\frac{\ln(X/S) - \ln(r/d)^t + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \\
&= -\frac{\ln(Xr^{-t}/Sd^{-t}) + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \\
&= \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t}) - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{2} \\
&= \underbrace{\frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}}}_x + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2} - \sigma\sqrt{t} = x - \sigma\sqrt{t}
\end{aligned}$$

$$\left\{ x = \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2} \right\}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{第二部分积分} &= kr^{-T} \int_{-\infty}^{x-\sigma\sqrt{t}} N\left[\frac{(y-\sigma\sqrt{T})-v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] g(v) dv \\ &= kr^{-T} N_2(x-\sigma\sqrt{t}, y-\sigma\sqrt{T}; \rho) \end{aligned} \quad (13)$$

最后,

$$\begin{aligned} \text{第三部分积分} &= r^{-T} K \int_{\ln(X/S)}^{\infty} f(u) du (\text{再次利用第二部分积分方法} \\ &\quad \text{获得下一等式}) \\ &= r^{-T} K \int_v^{\infty} g(v) dv = Kr^{-T} \int_{-\infty}^{x-\sigma\sqrt{t}} g(v) dv \\ &= Kr^{-T} \int_{-\infty}^{x-\sigma\sqrt{t}} g(v) dv = Kr^{-T} N(x-\sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \quad (14)$$

最后将已经求解出的 3 个积分部分(11)、(13)及(14)代入(9),即是买权的买权评价模型如下:

$$\begin{aligned} CC &= Sd^{-T} N_2(x, y; \rho) - kr^{-T} N_2(x-\sigma\sqrt{t}, y-\sigma\sqrt{T}; \rho) \\ &\quad - Kr^{-T} N(x-\sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{此处: } x = \frac{\ln(Sd^{-t}/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}/2, \quad y = \frac{\ln(Sd^{-T}/kr^{-T}) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\rho = \sqrt{t/T}$$

$x$  内的  $X$  是标的股价能使标的买权在时间  $t$  的价值  $C(Se^x, t)$  等于  $K$  [详见(8)]。因此,  $X$  是由下列等式求解:

$$Xd^{-(T-t)} N(Z_t) - kr^{-(T-t)} N(Z_t - \sigma\sqrt{T-t}) = K \quad (16)$$

此处:

$$Z_t = \frac{\ln(Sd^{-(T-t)}/kr^{-(T-t)})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \quad (17)$$

其他 3 种混合选择权可根据到期现金流量的正负  $S^*$ ,  $k$  及  $K$  符

号的定义对(15)进行调整即可获得评价模型如下:

### 买权的卖权评价模型(A Put on a Call, PC)

在(2)内,  $K$  为负值 ( $-K$ ), 标的买权的符号为负, 即  $-PV_t[\max(0, S^* - k | T)]$ , 刚与(1)内的对应项正负符号正好相反。因此, 将(15)内的相关项做正负号的对调。同时,  $N_2(\cdot)$  及  $N(\cdot)$  项内有  $X$  的部分, 其正负号也对调。结果如下:

$$PC = -Sd^{-1}N_2(-x, y; -\rho) + kr^{-T}N_2(-x + \sigma\sqrt{t}, y - \sigma\sqrt{T}; -\rho) \\ - Kr^{-t}N(-x + \sigma\sqrt{t}) \quad (18)$$

此处  $x$  内的  $X$  值与求解(16)的  $X$  值相同。

### 卖权的卖权评价模型(A Put on a Put)

因为都是卖权, 其到期现金流量(4)内的  $S^*$ ,  $k$  及  $K$  的正负符号正好与(2)的对应项正负号刚好相反。因此, 将(15)内的相关项做正负号的对调。同时  $N_2(\cdot)$  项内有  $y$  的部分, 正负号也对调。结果如下:

$$PP = Sd^{-T}N_2(x, -y, -\rho) - kr^{-T}N_2(x - \sigma\sqrt{t}, -y + \sigma\sqrt{T}; -\rho) \\ + Kr^{-t}N(x - \sigma\sqrt{t}) \quad (19)$$

此处:  $x$  内的  $X$  值是由求解(20)而得[与(16)的道理相同]:

$$-Xd^{-(T-t)}N(-Z_t) + kr^{-(T-t)}N(-Z_t + \sigma\sqrt{T-t}) - K = 0 \quad (20)$$

### 卖权的买权评价模型(A Call on A Put, CP)

卖权的买权到期现金流量(3)与卖权的卖权到期现金流量(4)的差别在于, (3)内的  $S^*$ ,  $k$ ,  $K$  正好与(4)内的对应项正负号刚好相反。因此, 将(19)内的相关项做正负号的对调。同时  $N_2(\cdot)$  及  $N(\cdot)$  项内的  $x$  及  $y$  部分的正负号也对调。结果如下:

$$CP = -Sd^{-T}N_2(-x, y, -\rho) + kr^{-T}N_2(-x + \sigma\sqrt{t}, -y + \sigma\sqrt{T}; \rho) \\ - Kr^{-t}N(-x + \sigma\sqrt{t}) \quad (21)$$

此处: $x$  内的  $X$  值与求解(20)的  $X$  值相同。

## 参 考 文 献

- R. Geske, "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics* (1979), p. 63—81.
- M. Rubinstein, "Double Trouble", *Risk*, (Dec. 1991/Jan. 1992), p. 73.

## 第十四章 外汇选择权——考量两国利率随机变动

### 一、简介

在第三章中,我们曾经利用 Merton 的选择权评价转换变成外汇选择权,并假设两国的无风险利率为固定不变(Nonstochastic)。虽然在极短期内,两国利率也许变动极小,但也无法完全确知不会变动。因此,若能将两国短期利率固定的假设加以松绑,并推导出外汇选择权评价模型会更切实际。据此 Grabbe(1983)首先完成此模型的介绍。最近 Amin 及 Jarrow(1991)根据远期利率的随机变动过程,完成更复杂、更完善的外汇选择权评价模型。

外汇选择权的集中市场起始于 1982 年底在美国宾城股价交易所(The Philadelphia Stock Exchange),目前已发展至多种主要外汇买权及卖权的交易市场(包括英镑、日币、瑞士法郎、马克、加币及澳币等等)。在世界其他地区也有外汇选择权的交易市场,诸如伦敦金融期货市场(LIFFE),新加坡商品交易所(SIMEX),东京国际期货交易所(TIFFE),澳洲悉尼期货交所等。除了上市交易的外汇选择权外,也有由银行替客户量身定制的外汇选择。这些是属于柜台式交易,其交易量也是非常庞大。

在第二节,我们首先介绍外汇买权及卖权之间的简单关系。第三节对欧式外汇选择权进行评价及求算其避险参数。第四节求算外汇买权的避险参数。第五节对美式外汇选择的相关问题作一些讨论。

## 二、外汇买权及卖权的关系

∴ 我们首先建立欧式及美式选择权之间的关系如下:

$$C(X_t, X, T) \geq c(X_t, X, T) \geq X_t B'(t, T) - XB(t, T) \quad (1)$$

此处:  $C(X_t, X, T)$  = 美式买权在时间  $t$  的价值

$c(X_t, X, T)$  = 欧式买权在时间  $t$  的价值

$X_t$  = 两国之间的汇率, 以每一单位外币的国内货币价值计价; 比如  $X_t = \text{Rmb/USD}$  或  $\text{NTD/USD}$

$B(t, T)$  = 本国(无风险)折价债券在时间  $t$  的价值; 在到期时支付一元。  $B(T, T) = 1$

$B'(t, T)$  = 外国(无风险)折价债券在时间  $t$  的价值; 在到期时支付一元。  $B(T, T) = 1$

$X$  = 买权及卖权的汇率履约价

证明

(1)式左边的关系正如一般选择权, 美式选择权因具有提前可履约的条件, 故含有提前履约的溢酬(Early Exercise Premium)。

$$\therefore C(X_t, X, T) \geq c(X_t, X, T)。$$

至于(1)式右边的关系建立, 我们首先建立下列两种策略:

甲: 购买一单位的欧式买权  $c(X_t, X, T)$

乙: 出售  $X$  单位的本国折现债券及买进一单位外国折现债券, 以本国货币计价为  $X_t B'(t, T)$ , 故总投资价值为:

$$X_t B'(t, T) - XB(t, T)$$

则在到期时( $T$ ), 甲乙两策略的价值分析如下:

到期时汇率情况:

$$\text{甲策略:} \quad \frac{X_T \leq X}{0} \quad \frac{X_T > X}{X_T - X > 0}$$

$$\text{乙策略: } \frac{X_T - X \leq 0}{\text{甲} \geq \text{乙}} \quad \frac{X_T - X > 0}{\text{甲} = \text{乙}}$$

所以,在到期时( $T$ ),甲策略的价值大于或等于乙策略的价值,因此在无套利机会下,任何时间 $t$ ,

$$c(X_t, X, T) \geq X_t B'(t, T) - XB(t, T) \quad (2)$$

也就是,

$$c(X_t, X, T) + XB(t, T) \geq XB'(t, T)$$

这是(1)式的右边关系式。

$$2. C(X_t, X, T) \geq \max[X_t - X, X_t B'(t, T) - XB(t, T), 0] \quad (3)$$

证明

美式外汇买权履约时的履约价值为 $X_t - X$ ;若不履约,其价值是欧式买权的价值,故

$$\begin{aligned} C(X_t, X, t) &\geq \max[X_t - X, c(X_t, X, t), 0] \\ &\geq \max[X_t - X, X_t B'(t, T) - XB(t, T), 0] \\ &\quad (\text{有(1)式的右边关系式(即(2)式)}) \end{aligned}$$

3. 利用利率均衡关系(Interest Rate Parity)

$$\frac{F_{t,T}}{X_t} = \frac{B'(t, T)}{B(t, T)}$$

比处: $F_{t,T}$  = 在时间 $t$ 观察的远期汇率,即在未来时间 $T$ 的即期汇率

(4)

(1)式可改写成为

$$C(X_t, X, T) \geq c(X_t, X, T) \geq B(t, T)[F_{t,T} - X] \quad (5)$$

(将(4)内的 $X_t B'(t, T)$ 代入(1)式的右边关系即是(5))

公式(5)将美式买权及欧式买权的价值下限( $B(t, T)[F_{t,T} - X]$ )以远期汇率 $F_{t,T}$ 及汇率履约价 $X$ 的价差表示之。

4. 欧式外汇买权及卖权的平价关系(Foreign Currency Put-Call Parity)

$$c(X_t, X, T) = p(X_t, X, T) + X_t B'(t, T) - XB(t, T) \quad (6a)$$



此处:  $p(X_t, X, T)$  = 欧式外汇卖权, 汇率履约价  $X_t$ , 到期日  $T$ 。

证明

建立下列两种策略:

甲策略: 买进一单位欧式买权  $c(X_t, X, T)$

乙策略: (1) 买进一单位欧式卖权  $p(X_t, X, T)$ ,

(2) 买进一单位外国折价债券, 以本国货币计价为  $X_t B'(t, T)$

(3) 出售  $X$  单位的本国折价债券,  $XB(t, T)$  则

$$\text{总投资价值} = p(X_t, X, T) + X_t B'(t, T) - XB(t, T)$$

在到期时( $T$ ), 甲乙两策略的价值比较分析如下:

到期时汇率情况:

$$\text{甲策略: } \frac{X_T \leq X}{0} \quad \frac{X_T > X}{X_T - X > 0}$$

$$\text{乙策略: } \frac{(X - X_t) + X_T - X = 0}{\text{甲} = \text{乙}} \quad \frac{X_T - X > 0}{\text{甲} = \text{乙}}$$

故在到期时, 甲 = 乙。在无套利机会环境下, 在任何时间  $t$ , 甲 = 乙, 这也就是(6)式。

若将利率均衡关系内的  $X_t B'(t, T)$  代入(6a), 则(6a)可以远期汇  $F_{t,T}$  的相关式表示之:

$$c(X_t, X, T) = p(X_t, X, T) + B(t, T)[F_{t,T} - X] \quad (6b)$$

5. 以本国货币计价的外币买权  $c(X_t, X, T)$  相当于本国货币卖权  $p'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$ , 但其履约价为买权履约价的倒数  $\frac{1}{X}$ 。

以公式表该买权及卖权的关系如下:

$$c(X_t, X, T) = X_t X p'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right) \quad (7)$$

也就是, 外币买权  $c(X_t, X, T)$  等于本国货币卖权  $p'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$  乘以  $X_t X$ 。

[(7)式也适用于美式外汇选择权]。

证明

利用选择权对标的价格  $X_t$  及履约价  $X$  的线性同质性质 (Linear Homogeneity), 我们获得: 在任何时间  $t$ ,

$$\frac{1}{X_t X} c(X_t, X, T) = c\left(\frac{X_t}{X_t X}, \frac{X}{X_t X}, T\right) = c\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X_t}, T\right)$$

或

$$c(X_t, X, T) = X_t X c\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X_t}, T\right) = X_t X p'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$$

解释:  $c\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X_t}, T\right)$  的履约价是  $\frac{1}{X}$ , 它是以外币计价的每一单位本国货币  $\left(\frac{\text{US\$}}{\text{NT\$}}\right)$ ;  $\frac{1}{X_t}$  是每一单位本国货币的外币汇率价值。

当汇率  $X_t$  上升  $\left(\frac{1}{X_t}\right.$  下降  $\left.)\right)$ , 且上升高于履约汇率  $X$  (即  $\frac{1}{X_t}$  下降低于  $\frac{1}{X}$ ), 则  $c(X_t, X, T)$  成为价内, 同时  $c\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$  也是价内。它是价内是因为汇率  $\frac{1}{X_t}$  下降, 且低于履约  $\frac{1}{X}$ 。因此,  $c\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$  其实是外币卖权, 故可改称为  $p'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$ 。

注: 线性同质:  $\lambda$  为任一常数, 则

$$c(\lambda X_t, \lambda X, T) = \lambda c(X_t, X, T)$$

所以, 以本国货币计价的外币买权  $c(X_t, X, T)$  其实相当于本国货币卖权  $p'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$ , 但其履约价为买权履约价的倒数  $\left(\frac{1}{X}\right)$ 。这也就是(7)式所代表的意义。

6. 类似(7)式的关系: 以本国货币计价的外币卖权  $p(X_t, X, T)$  相当于本国货币买权  $c'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$ , 其履约汇率为卖权履约汇率的倒数  $\left(\frac{1}{X}\right)$ 。以公式表示此关系如下:

$$p(X_t, X, T) = X_t X c'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right) \quad (8)$$

也就是,外币卖权  $p(X_t, X, T)$  等于本国货币买权  $c'(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T)$  乘以  $X_t X$ 。

(也适用于美式选择权)

证明与(7)式证明相同原理:

$$\frac{1}{X_t X} p(X_t, X, T) = p\left(\frac{X_t}{X_t X}, \frac{X}{X_t X}, T\right) = p\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X_t}, T\right)$$

$$\therefore p(X_t, X, T) = X_t X p\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{X_t}, T\right) = X_t X c'\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right)$$

此处:  $p(\frac{1}{X}, \frac{1}{X_t}, T) = c'(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T)$ , 是外币买权

例:若  $X_t = \text{NT\$ } 31.5/\text{US\$}$ ,  $X = 31$ , 且  $c(X_t, X, T) = 2.83$  (美元买权的中国台币价值), 同时

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right) &= p\left(\frac{1}{31.5}, \frac{1}{31}, T\right) \\ &= p(0.03175, 0.032258, T) \\ &= 0.00289 \text{ US\$}/\text{NT\$}, \\ &\quad (\text{中国台币卖权的价值等于 } 0.00289 \text{ 美元}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } X_t X p\left(\frac{1}{X_t}, \frac{1}{X}, T\right) &= (31.5)(31)(0.00289) \\ &= 2.83 = c(X_t, X, T) \end{aligned}$$

### 三、欧式外汇买权及卖权的评价

假设外汇(以本国货币计价)变动的随机过程为:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_x dt + \sigma_x dW_x \quad (9a)$$

此处:  $\mu_x$  = 汇率瞬间报酬率的期望值

$\sigma_x$  = 汇率瞬间报酬率标准差

外国折价债券价格变动的随机过程为:

$$\frac{dB'}{B'} = \mu_{B'} dt + \sigma_{B'} dW_{B'} \quad (9b)$$

[外国利率的变动已隐含于外国折价债券价格的变动(9)式之内]

本国折价债券价格变动的随机过程:

$$\frac{dB}{B} = \mu_B dt + \sigma_B dW_B \quad (10)$$

[本国利率的变动已隐含于本国折价债券价格的变动(10)式之内]

令  $H_t = X_t B'_t$ , 代表以本国货币计价的外币折价债券。则利用 Itô Lemma,  $H_t$  的价格变动随机过程可表示为:

$$dH = \mu^*_H dt + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right) X \sigma_X dW_X + \left(\frac{\partial H}{\partial B'}\right) B' \sigma_{B'} dW_{B'} \quad (11a)$$

$$dH = \mu^*_H dt + (B'X) \sigma_X dW_X + (XB') \sigma_{B'} dW_{B'}$$

$$\frac{dH}{H} = \mu_H dt + \sigma_X dW_X + \sigma_{B'} dW_{B'} \quad (11b)$$

$$= \mu_H dt + \sigma_H dW_H \quad (11c)$$

此处:

$$\mu^*_H = \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial B'}\right) B' \mu_{B'} + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right) X \mu_X + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial X^2}\right) X^2 \sigma^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 H}{\partial B'^2} B'^2 \sigma_{B'}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial X \partial B'}\right) X B' \rho_{XB'} \sigma_X \sigma_{B'} \right]$$

$$= XB' \mu_{B'} + XB' \mu_X + XB' \rho_{XB'} \sigma_X \sigma_{B'}$$

$$= H(\mu_{B'} + \mu_X + \rho_{XB'} \sigma_X \sigma_{B'}), H = XB'$$

$$= H \mu_H$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = 0 = \frac{\partial^2 H}{\partial B'^2}, \frac{\partial H}{\partial B' \partial X} = 1 \right)$$

$$\mu_H = \mu^*_H / H = \mu_{B'} + \mu_X + \rho_{XB'} \sigma_X \sigma_{B'}, \rho_{XB'} = \text{Corr} \left( \frac{dX}{X}, \frac{dB'}{B'} \right)$$

$$\sigma_H^2 = \sigma_X^2 + \sigma_{B'}^2 + 2\rho_{XB'} \sigma_X \sigma_{B'}$$

### 求解外币买权的简单方法

首先,我们以比较简单的方法来求解欧式外汇买权的评价。欧式

外汇买权的定义为:汇率  $X_t$  为标的(每一单外币的本国货币价值),其履约价  $X$ (以本国货币计价的每一单位外币履约价)。故  $c(X_t, X, T)$  代表以  $X_t$  为标的、履约价  $X$ 、到期日  $T$  的欧式外汇买权。由(1)式的关系,美式(及欧式)买权的价值大于或等于  $X_t B'(t, T) - XB(t, T)$ 。我们可将买权的价值改成一般可适用的方程式:

$$c(X_t B'(t, T), B(t, T), X, T) = c(H_t, B(t, T), X, T)$$

因此,在到期时欧式买权的价值  $c_T$  可表示为:

$$c_T = \max[X_T B'(T, T) - XB(T, T), 0] \quad (12a)$$

利用线性同质关系,(12)式可改写为:

$$\frac{c_T}{XB(T, T)} = \max\left[\frac{X_T B'(T, T)}{XB(T, T)} - 1, 0\right] \quad (12b)$$

在以  $XB(t, T)$ (或  $XB(T, T)$ )做计价单位(Numeraire)后,买权的标的价格为相对价格  $X_t B'(t, T)/XB(t, T)$ ,且履约价为1。此外,在相对价格下,无风险利率为0。因此,利用 Black-Scholes 的欧式买权评价公式,该欧式外币买权的价值为(以本国货币计价):

$$\begin{aligned} \frac{c_t}{XB(t, T)} &= \left(\frac{X_t B'(t, T)}{XB(t, T)}\right) N(d_1) - 1 \cdot e^{0 \cdot \tau} N(d_2) \\ \therefore c_t &= X_t B'(t, T) N(d_1) - XB(t, T) N(d_2) \end{aligned} \quad (13)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln[X_t B'(t, T)/XB(t, T)] + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \sqrt{\tau}} \quad (\tau = T - t \text{ 买权的存续时间})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^\tau \text{Var} \left[ \frac{\left( \frac{dH_t}{H_t} \right)}{\left( \frac{dB}{B} \right)} \right] du \\ &= \int_0^\tau \frac{1}{\tau} [\sigma_H^2(u) + \sigma_B^2(u) - 2\rho_{HB}(u)\sigma_H(u)\sigma_B(u)] du, \text{ 或} \end{aligned}$$

$$= \sigma_H^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{HB}\sigma_H\sigma_B$$

(若  $\sigma_H(u) = \sigma_H^2$ ,  $\sigma_B(u) = \sigma_B^2$ ,  $\rho_{HB}(u) = \rho_{HB}$  固定不变)

### 以偏微分方法(pde)求解外币买权价值

我们首先应用 Itô Lemma 于  $c(H_t, B(t, T), X, T)$  如下:

$$\begin{aligned} dc &= \frac{\partial c}{\partial H}dH + \frac{\partial c}{\partial B}dB + \frac{\partial c}{\partial t}dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 c}{\partial H^2}dH^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial B^2}dB^2 + 2\frac{\partial^2 c}{\partial H\partial B}(dH)(dB)\right] \\ &= \frac{\partial c}{\partial H}dH + \frac{\partial c}{\partial B}dB + \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{1}{2}hdt \end{aligned} \quad (14)$$

此处:  $h = \frac{\partial^2 c}{\partial H^2}H^2\sigma_H^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial B^2}B^2\sigma_B^2 + 2\frac{\partial^2 c}{\partial H\partial B}HB\rho_{HB}\sigma_H\sigma_B$  (3 个二次偏微分项)

建构一个避险组合  $P$  如下:

1. 出售一单位买权  $c(H_t, B(t, T), X, T)$ , 利用出售买权所得。
2. 买进  $(\partial c/\partial H)$  单位的外国折价债券, 以本国货币计价。
3. 买进  $(\partial c/\partial B)$  单位的本国折价债券。

该组合  $P$  为零投资组合。

以公式表示  $P$  如下:

$$P = -c + \left(\frac{\partial c}{\partial H}\right)H + \left(\frac{\partial c}{\partial B}\right)B (= 0) \quad (15)$$

则

$$\begin{aligned} dP &= -dc + \left(\frac{\partial c}{\partial H}\right)dH + \left(\frac{\partial c}{\partial B}\right)dB \\ &= -\left(\frac{\partial c}{\partial H}\right)dH - \left(\frac{\partial c}{\partial B}\right)dB - \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)dt - \frac{1}{2}hdt + \left(\frac{\partial c}{\partial H}\right)dH \\ &\quad + \left(\frac{\partial c}{\partial B}\right)dB \\ &= -\left(\frac{\partial c}{\partial T} - \frac{1}{2}h\right)dT \end{aligned} \quad (16)$$

(令  $dT = -dt$ )

因为组合  $P$  是零投资组合,故  $dP = 0$  (其均衡报酬率应为零)。

∴ (16)式隐示

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{1}{2}h \quad (17a)$$

因此,所求解的欧式外汇买权除要能满足(15)及(17)式外,尚必须满足下列临界条件:

$$c(0, B(t, T), T) = 0 \quad (X_t = 0)$$

$$\text{以及} \quad c(X_T, B(T, T), T) = \max(0, X_T - X) \quad (17b)$$

若是求解美式买权,除上面条件外应另加一条件:

$$C(X_t B'(t, T), B(t, T), T) \geq \max(0, X_t - X)$$

能够满足(17)及(17b)条件的欧式买权其实是(13)式的买权  $c_t$ 。可对  $c_t$  作各项偏微分,而后代入各条件即可得证。

若将利率均衡关系  $X_t B'(t, T) = F_{t,T} B(t, T)$  代入(13),则  $c_t$  的评价是以远期外汇  $F_{t,T}$  作标的,其评价公式为:

$$c_t = B(t, T)[F_{t,T} N(d_1) - X N(d_2)] \quad (18)$$

此处:

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + \sigma_F^2 \tau / 2}{\sigma_F \sqrt{\tau}}, \quad \tau = T - t$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_F \sqrt{\tau}$$

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \int_0^\tau \frac{1}{u} \sigma_F^2(u) du, \quad \sigma_F^2(u) = \text{Var}\left(\frac{dF_u}{F_u}\right) \\ &= \sigma_F^2 \text{ (若 } \sigma_F^2(u) = \sigma_F^2, \text{ 固定不变)} \end{aligned}$$

同样的理由,欧式外汇卖权  $p_t$  可由买权  $c_t$  转换而得,即将  $c_t$  内的相关正负符互换(正如一般的买权及卖权正负符号互换):

$$p_t = XB(t, T)N(-d_2) - X_t B'(t, T)N(-d_1) \quad (19)$$

若以远期外汇  $F_{t,T}$  为标的, 则

$$p_t = B(t, T)[XN(-d_2) - F_{t,T}N(-d_1)] \quad (20)$$

#### 四、避险参数

一旦评价公式完成后, 避险参数可直接对  $c_t$  微分即可获得, 如下:  
(很容易可求解)

1. 外汇买权价格  $c_t$  相对于本国折价债券价格  $B(t, T)$  的关系:

$$\frac{\partial c_t}{\partial B_t} = -XN(d_2) \quad (21a)$$

2.  $c_t$  对外国折价债券价格  $B'(t, T)$  的关系:

$$\frac{\partial c_t}{\partial B'_t} = X_t N(d_1) \quad (21b)$$

3.  $c_t$  对以本国货币计价的外国折价债券价格  $H_t (= X_t B'(t, T))$  的关系:

$$\frac{\partial c_t}{\partial H_t} = N(d_1) \quad (21c)$$

4.  $c_t$  对履约汇率  $X$  的关系:

$$\frac{\partial c_t}{\partial X} = -B(t, T)N(d_2) \quad (21d)$$

5.  $c_t$  对即期汇率  $X_t$  的关系:

$$\frac{\partial c_t}{\partial X_t} = B'(t, T)N(d_1) \quad (21e)$$

6.  $c_t$  对远期汇率  $F_{t,T}$ :

$$\frac{\partial c_t}{\partial F_{t,T}} = B(t, T)N(d_1) \quad (21f)$$



7.  $c_t$  的 Vega: 先认定  $\sigma = \sqrt{\sigma^2 \tau} / \sqrt{\tau}$ , 再微分

$$\frac{\partial c_t}{\partial \sigma} = X_t B'(t, T) n(d_1) \quad (21g)$$

$$n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2}$$

8.  $c_t$  的 Theta:

$$\frac{\partial c_t}{\partial T} = \frac{XB'n(d_1)}{2\sigma\sqrt{\tau}} \sigma^2 > 0 \quad (21h)$$

$$\sigma^2 = \sigma_H^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{HB}\sigma_H\sigma_B$$

(21h)的解释应是,  $c_t$  的价值会随着剩余到期日(或存续时间)的缩短而下降(是正关系), 而不应解释  $c_t$  随到期日增长而增长; 后者的解释不适合此处的财务经济意义。此外, 由(14)

$$\begin{aligned} dc &= \left(\frac{\partial c}{\partial H}\right)dH + \left(\frac{\partial c}{\partial B}\right)dB + \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{1}{2}hdt \\ &= N(d_1)dH - XN(d_2)dB + \underbrace{\left(\frac{\partial c}{\partial T}dT - \frac{1}{2}h dT\right)}_{=0, \text{按(17), } dt=-dT} \\ &= N(d_1)dH - XN(d_2)dB \end{aligned} \quad (21i)$$

则  $dc < 0$ , 若  $dH/dB < XN(d_2)/N(d_1)$ 。也就是, 若外国折价债券价值的增减  $dH$  ( $H_t = X_t B'(t, T)$ ) 相对于本国债券价值的增减  $dB$  小于  $XN(d_2)/N(d_1)$  时, 则外汇买权  $c_t$  的价值下降。否则, 会增加。

## 五、美式外汇选择权

由第二节内的(1)式, 我们可知美式外汇买权的价值大于欧式买权价值  $c_t$  及(提前)履约价值  $(X_t - X)$  之最大者:

$$C(X_t, X, T) \geq \max(X_t - X, c(X_t, X, T)) \quad (22)$$

更详细的说明, 当提前履约价值  $(X_t - X)$  大于欧买权  $c_t$  的价值时, 当

然美式(外汇)买权的价值就会大于欧式买权  $c_t$  的价值。以更严谨的概率语言表示如下:

$$Pr[X_t - X > c_t] > 0 \quad (\text{当且仅当 } C(X_t, X, T) > c(X_t, X, T))$$

此外,由(22)可知,即期汇率  $X_t^*$  高于履约汇率  $X$ ,而且履约价值  $X_t^* - X$  高于欧式买权价值  $c_t$  时,则美式买权会被提前履约,且其价值可表示为:

$$C(X_t^*, X, T) = X_t^* - X > c_t \quad (23)$$

但美式选择权并无封闭解评价公式,可采用二元树解或其他数值方法求解。

至于美式外汇卖权(即本国货币卖权,以外币计价)也有类似于(23)的关系式:

$$P(X_t', X', T) = X_t' - X' > p_t \quad (24)$$

$X_t'$  是能使美式卖权提前履约的即期汇率(是以外币计价的每一单位本国货币)。

## 参 考 文 献

- K. I. Amin, and B. A. Jarrow, "Pricing Foreign Currency Options Under Stochastic Interest Rate", *Journal of International money and Finance* (1991), 10, p. 310—329.
- M. B. Garman, and S. W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance* (1983), 2, p. 231—237.
- J. O. Grabbe, "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and Finance* (1983), 2, p. 239—253.

## 第十五章 汇率连动远期契约

### 一、简介

从 1990 年代起至今,已有不少的远期契约及选择权是以外国资产为标的物,诸如外国股票、外国股票指数或其他标的物,但是远期契约及选择权是以本国货币计价或是在本国市场交易。比如说,日经指数的认售权证(Nikkei Index Put Warrants)是以日经指数为标的,但认售权证却是在加拿大多伦多市场及美国的美洲股票交易市场(AM-EX)挂牌上市。就美国投资者而言,日经指数是外国标的(以日圆计价),但其认售权证是在美国市场交易,以美元计价。又如摩根台股指数期货的标的物是中国台北股票指数(以台币计价),但期货是在新加坡交易,以美元计算。这些汇率连动期货(或远期契约)及选择权吸引许多国际投资人的兴趣,也因此引发不少大型证券商及商业银行发行此种所谓的交叉外汇远期契约或选择权(Cross-Currency Forward Contracts or Cross-Currency Options)。这种交叉外币的衍生性商品已经有持续增加的现象。

有关于外汇型的衍生性商品研究过去已有不少的论文,最近比较重要的论文,诸如 Dravid, Richardson 及 Sun(1998)对日经指数认售权证的评价及实证研究。又 Wei(1997)对交叉外币衍生性商品进行概括性的研究。Reiner(1992)对汇率连动选择权的评价及避险也有详细的介绍。因此,在本章中,我们首先对交叉外币远期契约的评价作介绍,并于下一章另行详细介绍汇率连动选择权。

## 二、风险中立与外汇及外国标的价格变动过程

外国标的价格及汇率变动的随机过程可分别表示如下:

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dz \quad (1)$$

$$\frac{dX}{X} = \mu_X dt + \sigma_X dW \quad (2)$$

此处:  $S$  = 外国标的物的价格

$X$  = 两国汇率, 是以本国货币计价的每一单位外币 (即每一单位外币的本国货币价值)

$\mu_S$  及  $\mu_X$  分别代表标的瞬间期望报酬率及汇率瞬间变动率

$\sigma_S$  及  $\sigma_X$  分别代表标的瞬间报酬率标准差及汇率瞬间变动标准差

$dz$  及  $dW$  分别是标的价格的布朗运动及汇率的布朗运动

(1)及(2)式是相对于原来概率分布下的随机变动过程 (即不是在风险中立下的随机过程)。若能将(1)及(2)式转换成在风险中立下的随机变动过程, 则在求算评价公式及避险方法上, 将会更简单。我们将利用 Wei(1997)的方法首先推导, 在风险中立 (或无偏好, Preference-free) 下的偏微分方程, 而后再倒推该偏微分方程所代表的风险中立下标的物及汇率的随机过程。

令  $f = f(S_t, X_t, t)$  代表任何一种交叉外币的衍生性商品价格, 利用 Itô Lemma 求算  $f$  的随机过程如下:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial X_t} (dS_t)(dX_t) \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) \mu_S S_t + \left( \frac{\partial f}{\partial X_t} \right) (\mu_X X_t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right) (S_t^2 \sigma_S^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \right) (X_t^2 \sigma_X^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial X_t} X_t S_t \sigma_{SX} \right] dt \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) S_t \sigma_s dz + \left( \frac{\partial f}{\partial X_t} \right) X_t \sigma_x dW \quad (3)$$

此处:  $\sigma_{sx} = \rho_{sx} \sigma_x \sigma_s = \text{Cov} \left( \frac{dS}{S}, \frac{dX}{X} \right)$

根据(3)式,以本国货币计价的外国标的资产价格的随机变动过程可求算如下:令

$G_t = X_t S_t =$  以本国货币计价的外国标的资产价格

则

$$\frac{\partial G}{\partial X_t} = S_t, \quad \frac{\partial G}{\partial S_t} = X_t, \quad \frac{\partial G^2}{\partial S_t \partial X_t} = 1, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} = 0 = \frac{\partial^2 G}{\partial X_t^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

将上面的偏微分代入(3)获得(以  $G$  替代  $f$ ):

$$\begin{aligned} dG_t &= (\mu_s X_t S_t + \mu_x X_t S_t + X_t S_t \sigma_{sx}) dt + X_t S_t \sigma_s dz + X_t S_t \sigma_x dW \\ \therefore \frac{dG_t}{G_t} &= (\mu_s + \mu_x + \sigma_{sx}) dt + \sigma_s dz + \sigma_x dW \end{aligned} \quad (4)$$

此处:  $G_t = X_t S_t$

因此,以本国货币计价的外国标的资产价格随机过程(4)式的漂浮项(The Drift)是外国标的资产及汇率变动漂浮项之和( $\mu_s + \mu_x$ )加上汇率及外国标的资产价格变动率的共方差 $\sigma_{sx}$ ,而其随机项是标的资产及汇率随机项之和( $\sigma_s dz + \sigma_x dW$ )。所以, $dG/G$ 像是外国标的价格及汇率随机过程之和 $\left[ \frac{dG_t}{G_t} = (1) + (2) \right]$ 。

再次,我们将寻求建立一个无风险组合  $H$ 。组合  $H$  包括  $\Delta$  单位的外国资产  $G(= X_t S_t, \text{以本国货币计价})$  以及一单位的交叉外币型衍生性商品  $f$ ;以公式表示如下:

$$H = f + \Delta G \quad (5)$$

$$\therefore dH = df + \Delta dG$$

$$= (3) + \Delta \cdot (4) \quad (\text{将(3)及(4)代入简化})$$

$$= h_t dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S} S + \Delta S X \right) \sigma_s dz + \left( \frac{\partial f}{\partial X} X + \Delta S X \right) \sigma_x dW \quad (6)$$

$h_t =$  包含所有  $dt$  项目

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu_s S + \frac{\partial f}{\partial X} \mu_x X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{sx} + \Delta S X (\mu_s + \mu_x + \sigma_{sx}) \end{aligned}$$

(为简单计,  $S_t$  及  $X_t$  的时间符号  $t$  予以省略)。

(6)式代表该组合的价格变动有两项随机项  $dz$  及  $dW$ 。要促使该组合成为无风险组合, 第一步骤是将  $dz$  项系数设定为零, 而后求出能使  $dz$  项消失的条件: 也就是

$$\Delta = -\frac{1}{X} \left( \frac{\partial f}{\partial S} \right) \quad (7)$$

也就是, 在建立组合  $H$  时, 若持有  $\Delta$  单位的外国资产[以(7)式计算  $\Delta$ ], 则外国资产的价格风险得以消除(即规避外国资产的价格风险), 因为如此选择的  $\Delta$ , 能使  $dH$  内的  $dz$  项目消除掉(成为零)。

因  $dz$  已消除, (6)式可改写如下:

$$dH_t = H_t \mu_h dt + H_t \sigma_h dW \quad (8)$$

此处:

$$\begin{aligned} \mu_h &= \left( \frac{1}{H_t} \right) h_t = \frac{1}{H_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu_s S + \frac{\partial f}{\partial X} \mu_x X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{sx} - \frac{\partial f}{\partial S} \mu_s S \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial S} S \mu_x - \frac{\partial f}{\partial S} S \sigma_{sx} \right] \\ &= \frac{1}{H_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \mu_x - \frac{\partial f}{\partial S} S \sigma_{sx} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{sx} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\sigma_h = \frac{1}{H_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right] \sigma_x \quad (10)$$

(8)式代表规避外国资产价格风险后, 组合  $H$  的价格随机变动过程。但组合  $H$  仍含有汇率变动的风险(以  $dW$  项代表之)。因此必须再寻

找条件加以消除汇率风险。

从财务经济理论,我们已知市场风险溢酬  $\lambda$  (Market Price of Risk) 是

$$\lambda = \frac{\mu - r_d}{\sigma} \quad (11)$$

此处:  $\mu$  = 资产的期望报酬率

$r_d$  = 本国无风险利率

$\sigma$  = 资产总风险(或标准差)

利用(11),投资于外币现钞的市场风险溢酬可表示为:

$$\lambda_x = \frac{\mu_f - r_d}{\sigma_x} \quad (12)$$

此处:符号  $f$  代表外国

$\sigma_x$  = 外币现钞的总风险(汇率风险)

$\mu_f$  = 外币现钞的期望报酬率

但是从本国观点(以本国货币计价),外币现钞的期望报酬率  $\mu_f$  是等于汇率变动的期望值  $\mu_x$  加上外国无风险利率  $r_f$ , 亦即  $\mu_f = \mu_x + r_f$ 。因此投资于外币现钞的市场风险溢酬可另表示为:

$$\lambda_x = \frac{\mu_x + r_f - r_d}{\sigma_x} \quad (13)$$

此外,就投资组合  $H$  而言,其市场风险溢酬是

$$\lambda_h = \frac{\mu_h - r_d}{\sigma_h} \quad (14)$$

在市场均衡下,市场风险溢酬必须相等:  $\lambda_x = \lambda_h$ 。因此

$$\begin{aligned} \frac{\mu_x + r_f - r_d}{\sigma_x} &= \frac{\mu_h - r_d}{\sigma_h} \\ &= \frac{\mu_h - r_d}{\frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \sigma_x} \quad (\text{利用(10)}) \\ \therefore (\mu_x - r_d + r_f) \left( \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) &= H_t (\mu_h - r_d) \quad (\text{将(9)的 } \mu_h \text{ 代入}) \end{aligned}$$

$$= H_t \left\{ \frac{1}{H_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \mu_x - \frac{\partial f}{\partial S} S \sigma_{sx} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{sx} \right] - r_d \right\}$$

抵消左右等式的  $\mu_x \left( \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right)$  项,并整理之,获得

$$(r_f - r_d) \left( \frac{\partial f}{\partial X} X - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial S} S \sigma_{sx} + A - \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) r_d$$

此处:

$$H_t = f + \Delta G = f - \left( \frac{-1}{X} \frac{\partial f}{\partial S} \right) (XS) = f - \frac{\partial f}{\partial S} S$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{sx}$$

= 三项二次偏微分之和

$$\therefore r_d f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} S (r_f - r_d + r_d - \sigma_{sx}) + \frac{\partial f}{\partial X} X (r_d - r_f) + A$$

再简化之,我们获得一个偏微分方程式(随机变动项已消除)如下:

$$r_d f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} S (r_f - \sigma_{sx}) + \frac{\partial f}{\partial X} X (r_d - r_f) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{sx} \quad (15)$$

(15)式说明,任何  $S_t$  及  $X_t$  的衍生性商品  $f(S_t, X_t)$  一定会满足(15)式的偏微分方程。 $f(S_t, X_t)$  可包括交叉外币的远期契约与选择权(或称汇率连动的远期契约与选择权),以及其他  $S_t$  与  $X_t$  的衍生性商品。在(15)式的偏微分方程中,  $\mu_s$  及  $\mu_x$  已消失,且是由无风险利率  $r_d$  及  $r_f$  所取代。因此(15)式是风险中立下的偏微分方程,而且并不受投资人风险厌恶程度的影响(Preference-free)。此外,在风险中立下,能够满足(15)式的外国资产价格及汇率的变动随机过程应是

$$\frac{dS}{S} = (r_f - \sigma_{sx}) dt + \sigma_s dz \quad (16a)$$



$$\frac{dX}{X} = (r_d - r_f)dt + \sigma_x dW \Rightarrow \mu_x^* = r_d - r_f \quad (17)$$

若考虑外国资产支付连续股利率  $q$  的情况下, 则(16)可改写成

$$\frac{dS}{S} = (r_f - q - \sigma_{sx})dt + \sigma_s dz \Rightarrow \mu_s^* = r_f - q - \sigma_{sx} \quad (16b)$$

其次, 我们可利用(16b)及(17)求出, 在风险中立下, 以本国货币计价的外国资产随机过程  $dG/G$ 。由(4)及(16b)与(17), 我们立即可获得

$$\begin{aligned} \frac{dG}{G} &= \frac{d(X_t S_t)}{X_t S_t} = [(r_f - q - \sigma_{sx}) + (r_d - r_f) + \sigma_{sx}]dt + \sigma_s dz + \sigma_x dW \\ &= (r_d - q)dt + \sigma_s dz + \sigma_x dW \end{aligned} \quad (18)$$

此处:  $\mu_s^* = r_f - q - \sigma_{sx}$

$\mu_x^* = r_d - r_f$  (在风险中立下)

因此, 在风险中立下, 外国资产  $S_t$ 、汇率  $X_t$  与以本国货币计价的外国资产  $G_t (= X_t S_t)$  都可以(16b), (17)及(18)分别代表它们的随机过程。同时, 任何涉及  $S_t$ ,  $X_t$  及  $G_t$  的衍生性商品评价分析都是以(16b), (17)及(18)做基础。在本章及以后的章节中都会利用到。

此外, 根据(16'), (17)及(18)我们可分别求解外国标的价格, 汇率及  $X_t S_t$  的成长动态过程, 及其未来的期望值。以(16')而言, 首先以 Itô Lemma 求解:

$$d \ln S_t = (r_f - q - \sigma_{sx} - \sigma_s^2/2)dt + \sigma_s dz \quad (19)$$

而后求出(19)式的积分解如下:

$$\begin{aligned} \int_t^T d \ln S_u &= (r_f - q - \sigma_{sx} - \sigma_s^2/2)(T-t) + \sigma_s \int_t^T dz_u \\ \therefore \ln(S_T/S_t) &= (r_f - q - \sigma_{sx} - \sigma_s^2/2)(T-t) + \sigma_s \Delta Z_T, \\ \Delta Z_T &= Z_T - Z_t \\ \therefore S_T &= S_t e^{(r_f - q - \sigma_{sx} - \sigma_s^2/2)(T-t) + \sigma_s \Delta Z_T} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\therefore E(S_T) = S_t e^{(r_f - q - \sigma_{sx})(T-t)} \quad (21)$$

此处:  $E(e^{\sigma_s \Delta Z_T}) = e^{\sigma_s^2(T-t)/2}$

同样的,我们可对  $X_t$  求解,获得

$$X_T = X_t e^{(r_d - r_f - \sigma_x^2/2)(T-t) + \sigma_x \Delta W_T}, \Delta W_T = W_T - W_t \quad (22)$$

$$\therefore E(X_T) = X_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} \quad (23)$$

利用(18)求解:由 Itô Lemma 得知

$$d \ln G_t = (r_d - q - \sigma_G^2/2)dt + \sigma_G dW_G$$

此处:

$$\begin{aligned} \sigma_G^2 &= \text{Var}(dG_t/G_t) = \text{Var}(\ln S_t X_t) = \text{Var}(\ln S_t + \ln X_t) \\ &= (\sigma_s^2 + \sigma_x^2 + 2\sigma_{sx})(T-t) \end{aligned}$$

$$\sigma_G dW_G = \sigma_s dz + \sigma_x dw \quad (\text{以另一方式表示之})$$

$$\therefore G_T = X_T S_T = X_t S_t e^{(r_d - q - \sigma_G^2/2)(T-t) + \sigma_G \Delta W_G} \quad (24)$$

$$E(X_T S_T) = X_t S_t e^{(r_d - q)(T-t)} \quad (25)$$

此处:

$$E(e^{\sigma_G \Delta W_G}) = e^{\sigma_G^2(T-t)/2}$$

或

$$\begin{aligned} E(e^{\sigma_s \Delta Z_T + \sigma_x \Delta W_T}) &= e^{\sigma_s^2(T-t)/2 + \sigma_x^2(T-t)/2 + \rho_{sx}\sigma_s\sigma_x(T-t)} \\ &= e^{[\sigma_s^2 + \sigma_x^2 + 2\sigma_{sx}](T-t)/2} = e^{\sigma_G^2(T-t)/2} \\ (\sigma_G \Delta W_G &= \sigma_s \Delta Z_T + \sigma_x \Delta W_T, \sigma_{sx} = \rho_{sx}\sigma_s\sigma_x) \end{aligned}$$

### 三、汇率连动远期契约的评价

在本节中,我们将对下列 4 种不同类型的汇率连动远期契约进行评价:

1. 到期现金流量  $f_1^*$  (或报酬)为:

$$f_1^* = X_T(S_T - K) \quad (26)$$

此处:  $f_1^*$  = 第一类型汇率连动远期契约的到期现金流量

$X_T$  = 在远期契约到期时的汇率,它代表每一单位外币的本国货币价值

$S_T$  = 到期日外国标的资产的价格

$K$  = 远期契约的履约价,以外币计价

$f_1^*$  是到期时外国远期契约交割价格 ( $S_T - K$ ), 以当时的即期汇率  $X_T$  转换成本国货币价值。

2. 到期现金流量  $f_2^*$  为:

$$f_2^* = \bar{X}(S_T - K) \quad (27)$$

此处:  $\bar{X}$  = 期初已约定的汇率(固定)。

$f_2^*$  是到期时外国远期契约交割价格 ( $S_T - K$ ), 以期初已约定的固定汇率  $\bar{X}$  转换成本国货币价值。例如,  $f_2^*$  是日经 225 指数期货在芝加哥商品交易市场(CME)的交割价值。日经 225 指数期货的规格是日经 225 指数价位乘以固定 5 美元 ( $= \bar{X}$ )。第二类型亦即所谓担保型远期契约(Guaranteed-Exchange-Rate Forward Contracts), 因为只要远期契约的交割价值 ( $S_T - K$ ) 大于零, 转换成本国货币价值是以固定汇率行之, 故无汇率兑换损失的风险。

3. 到期现金流量  $f_3^*$  为:

$$f_3^* = \bar{X}S_T - X_TK \quad (28)$$

第三类型远期契约的交割方式不同于前两种类型。

在到期时, 外国标的价格  $S_T$  是以固定汇率( $\bar{X}$ )转换成本国货币价值:  $\bar{X}S_T$ , 而履约价却以到期时的浮动汇率( $X_T$ )转换成本国货币之履约价( $X_TK$ )。因此, 此类型远期契约的到期交割价值可能是正值, 也可能是负值 ( $\bar{X}S_T - X_TK \gtrless 0$ )。

4. 到期现金流量  $f_4^*$  为:

$$f_4^* = X_TS_T - \bar{X}K \quad (29)$$

第四类型的远期契约是在到期时以当时的浮动汇率  $X_T$ , 将外国标的价格  $S_T$  转换成本国货币价值 ( $X_TS_T$ ), 但履约价却以固定汇率转换成本国货币价值 ( $\bar{X}K$ )。因此如同第三类型, 其到期交割价值可能是正值, 也可能是负值 ( $X_TS_T - \bar{X}K \gtrless 0$ )。

在风险中立下, 任何衍生性商品的价值是其到期现金流量期望值

的折现值。我们将根据此风险中立的评价理论来评价上述 4 种类型的汇率连动远期契约。

### 1. 第一类型: 汇率连动远期契约评价

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-r_d(T-t)} E[X_T(S_T - K)] \\ &= e^{-r_d(T-t)} [E(X_T S_T) - KE(X_T)] \end{aligned}$$

此处:  $E(X_T S_T) = X_t S_t e^{(r_d - q)(T-t)}$ , 由(25)

$X_t S_t$  是以本国货币计价, 故  $X_t S_t$  是以  $(r_d - q)$  成长

$$E(X_T) = X_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} \quad (\text{由(23)})$$

$T - t =$  剩余到期日(存续时间)

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-r_d(T-t)} [X_t S_t e^{(r_d - q)(T-t)} - K X_t e^{(r_d - r_f)(T-t)}] \\ \therefore f_1 &= X_t [S_t e^{-q(T-t)} - K e^{-r_f(T-t)}] \end{aligned} \quad (30)$$

### 2. 第二类型: 汇率连动远期契约评价

$$\begin{aligned} f_2 &= e^{-r_d(T-t)} E[\bar{X}(S_T - K)] \\ &= e^{-r_d(T-t)} \bar{X} [E(S_T) - K] \\ &= e^{-r_d(T-t)} \bar{X} [S_t e^{(r_f - q - \sigma_x)(T-t)} - K] \end{aligned}$$

此处: 根据(16b),  $S_t$  是以  $(r_f - q - \sigma_x)$  成长

$$\begin{aligned} E(S_T) &= S_t e^{(r_f - q - \sigma_x)(T-t)} \\ \therefore f_2 &= \bar{X} [S_t e^{(r_f - q - \sigma_x - r_d)(T-t)} - K e^{-r_d(T-t)}] \end{aligned} \quad (31)$$

### 3. 第三类型: 汇率连动远期契约评价

$$\begin{aligned} f_3 &= e^{-r_d(T-t)} E[\bar{X} S_T - X_T K] \\ &= e^{-r_d(T-t)} [\bar{X} E(S_T) - K E(X_T)] \\ &= e^{-r_d(T-t)} [\bar{X} S_t e^{(r_f - q - \sigma_x)(T-t)} - K X_t e^{(r_d - r_f)(T-t)}] \\ \therefore f_3 &= \bar{X} S_t e^{(r_f - q - \sigma_x - r_d)(T-t)} - K X_t e^{-r_f(T-t)} \end{aligned} \quad (32)$$

### 4. 第四类型: 汇率连动远期契约评价

$$f_4 = e^{-r_d(T-t)} E[X_T S_T - \bar{X} K]$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-r_d(T-t)} [X_t S_t e^{(r_d - q)(T-t)} - \bar{X}K] \\
 &= X_t S_t e^{-q(T-t)} - \bar{X}K e^{-r_d(T-t)} \quad (33)
 \end{aligned}$$

### 各类型远期契约的远期价格

因远期契约的期初价值为零,因此我们可利用以上各类型远期契约的评价公式求解远期价格,它也就是交割时的履约价  $K$ 。我们分别求解如下:

1. 第一类型:远期契约的远期价格  $F_1$  (即履约价):令

$$\begin{aligned}
 f_1 &= X_t [S_t e^{-q(T-t)} - K e^{-r_f(T-t)}] = 0 \quad (K = F_1) \\
 \therefore F_1 &= S_t e^{(r_f - q)(T-t)} \quad (\text{由上式解出 } F_1 (= K)) \quad (34)
 \end{aligned}$$

2. 第二类型:远期契约的远期价格  $F_2$  (即履约价):

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \bar{X} [S_t e^{(r_f - q - \sigma_x - r_d)(T-t)} - K e^{-r_d(T-t)}] = 0 \quad (K = F_2) \\
 \therefore F_2 &= S_t e^{(r_f - q - \sigma_x)(T-t)} \quad (\text{由上式解出 } F_2 (= K)) \quad (35)
 \end{aligned}$$

3. 第三类型:远期契约的远期价格  $F_3$ :

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \bar{X} S_t e^{(r_f - q - \sigma_x - r_d)(T-t)} - K X_t e^{-r_f(T-t)} = 0 \quad (F_3 = K) \\
 \therefore F_3 &= \left( \frac{\bar{X}}{X_t} \right) S_t e^{(2r_f - q - \sigma_x - r_d)(T-t)} \quad (36)
 \end{aligned}$$

4. 第四类型:远期契约的远期价格  $F_4$ :

$$\begin{aligned}
 f_4 &= X_t S_t e^{-q(T-t)} - \bar{X}K e^{-r_d(T-t)} = 0 \\
 \therefore F_4 &= \left( \frac{X_t}{\bar{X}} \right) S_t e^{(r_d - q)(T-t)} \quad (37)
 \end{aligned}$$

在下一章中,我们将会介绍汇率连动选择权的评价及其相关的问题。正如汇率连动的远期契约,汇率连动选择权也可分为四大类型。我们将会对各类型选择权(买权及卖权)进行求解评价模型及避险参数的求算。

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, p. 637—659.
- J. N. Bodurtha, and G. R. Courtadon (1987). "Tests of an American Option Pricing Model on the Foreign Currency Options Market", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 2, p. 153—167.
- P. P. Boyle, (1988). "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 1, p. 1—12.
- J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Options Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, p. 229—264.
- E. Derman, P. Karasinski and J. S. Wecker (1990). "Understanding Guaranteed Exchange Rate Contracts in Foreign Stock Investments", *International Equity Strategies*, June, Goldman Sachs.
- A. Dravid, M. Richardson, and T. Sun (1993). "Pricing Foreign Index Contingent Claims: An Application to Nikkei Put Warrants", *The Journal of Derivatives*, Fall, p. 33—51.
- M. B. Garman, and S. W. Kohlhagen (1983). "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2, p. 231—237.
- J. O. Grabbe, (1983). "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and finance*, 2, p. 239—253.
- J. M. Harrison, and S. R. Pliska (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, p. 215—260.
- E. Reiner, (1992). "Quanto Mechanics", *Risk*, March, p. 59—63.
- M. Rubinstein, (1991). "Two into One", *Risk*, May.
- J. Z. Wei, "Valuing Derivatives Linked to Foreign Assets", Chapter 5, *Frontiers in Derivatives*, Edited by A. Konishi and R. Dattatreya, Irwin Professional Publishing, (1997).

## 第十六章 汇率连动选择权(Quanto Options)

### 一、4 种不同汇率连动

汇率连动选择权(Quanto Options)是由 Reiner(1992)所介绍。投资人对 foreign 投资股票时,除了关心外国股价风险外,也很关切汇率变动的风险。因此,投资人可同时对外国股价风险及汇率风险进行避险,或考虑规避其中之一风险。此外,尚有不少在外国上市交易的本国金融商品,诸如,在新加坡上市交易的日本 Nikkei 指数期货,在加拿大多伦多(Toronto)交易的日本 Nikkei 指数认购权证,在美洲交易所(AMEX)上市的日本 Nikkei 认购及认售权证,台积电及联电在美国上市的 ADR 等等。这些金融商品的标的物都是在当地国交易,但其衍生性商品却在外国上市交易,以外币计价。因此,这些汇率连动的选择权评价更形重要。根据到期日的现金流量,汇率连动的选择权可划分下列几种:

$$1. C_1^* = X^* \max(S'^* - K', 0) \quad (\text{浮动汇率买权的到期现金流})$$

此处: $C_1^*$  = 到期时,以国内货币计价(Rmb 或 NT\$)的外国股票(欧式)买权

$X^*$  = 到期时汇率,以本国货币计价的每一单位外币(如美元 \$),  
Rmb/\$ (或 NT\$/\$)

$S'^*$  = 到期时外国股票价格(以外币计价 \$)

$K'$  = 履约价(以外币 \$ 计价)

注:符号'代表外国(或以外币计价),而\*代表到期日。

这种选择权是在到期时,以外币计算买权的价值,而后再以当时的汇率转换成本国货币值的买权。因此,投资人重视外国股价风险,但对汇率风险的态度持平(投资人也许认为在买权有效期内,汇率应是稳定,或变动不大,或许外币会升值)。

$$2. C_2^* = \max(S' \cdot X^* - K, 0)$$

第二种买权是外国股价及履约价都是以本国货币计价。 $S' \cdot X^*$  是到期时外国股票的本国货币价值, $K$  是以本国货币计价的履约价。因此,投资人希望在外国股价及汇率双重变动下,能从外国买权获得正报酬率或进行避险,即  $S' \cdot X^* > K$ 。

$$3. C_3^* = \bar{X} \max(S' - K', 0) \quad (\text{固定汇率买权的到期现金流量})$$

$\bar{X}$  = 期初预先约定的汇率(固定)

这种买权与第一种买权不同之处在于,到期时是以预先约定的汇率  $\bar{X}$  将外国股票买权价值  $(S' - K')$  转换成以本国货币计价的买权。

$$4. C_4^* = S' \cdot \max(X^* - K, 0)$$

这是一种汇率买权  $[\max(X^* - K, 0)]$ , 并连动外国股票价格  $(S')$ 。因此,  $C_4^*$  是股价连动的外汇买权(以本国货币计价)。孚信银行(Bankers Trust)曾发行过此种买权。

以上 4 种不同汇率连动外国股票买权可分别满足不同投资人的需求。在以下几节中,我们将分别介绍这四种买权的评价及避险比率。

## 二、浮动汇率选择权:第一种汇率连动选择权

为求解此种买权的评价模型,我们首先介绍国际金融理论的一个基本定理:单一价格定理(Law of One Price,简称 LOP)。LOP 告诉我们,以同一种货币计价的相同商品(或衍生性商品)在全世界各地的价格一定相等。比如说,以美元计价的奔驰车,不管在(自由贸易)世界任何一个地方的美元价格一定相同。就实证结果而言,只有在长期观察下才会成立,但短期内不成立。此外,在物价及汇率稳定的短时期内,该定理成立的可能性大。在此,我们只是利用它来求解评价模型比较



容易。

### 买权评价模型及避险比率

从该买权的到期现金流量  $C_1^* = X^* \max(S'^* - K', 0)$  可知,  $\max(S'^* - K', 0)$  其实是外国股票买权的到期日现金流量。我们可利用 Merton(加股息)的评价模型来评估该买权的价值,再引用 LOP, 将它的 Merton 模型价值乘以现在的汇率  $X$  必相等于以本国计价的买权。因此,该买权的最后评价模型为:

$$\begin{aligned} C_1 &= X[S'e^{-qt}N(d_1) - K'e^{-r_f t}N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t})] \\ &= XS'e^{-qt}N(d_1) - K'Xe^{-r_f t}N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t}) \end{aligned} \quad (1)$$

此处:  $C_1$  = 以本国货币计价该买权的现在价值

$t$  = 买权的存续时间(尚余到期日)

$q$  = 外国股票的连续现金股利率

$X$  = 现在汇率(以本国货币计价的每一元外币)

$r_f$  = 外国无风险利率

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S'e^{-qt}}{K'e^{-r_f t}}\right) + \sigma_S \sqrt{t}}{\sigma_S \sqrt{t}} = \frac{\ln(S'/K') + \left(r_f - q + \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t}{\sigma_S \sqrt{t}}$$

$$d_1 - \sigma_S \sqrt{t} = \frac{\ln\left(\frac{S'}{K'}\right) + \left(r_f - q - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t}{\sigma_S \sqrt{t}} = d_2$$

公式(1)的严谨数学求解方法可参见附录--。

根据(1),Delta 比率为:

$$\Delta_S = \frac{\partial C_1}{\partial (XS')} = e^{-qt}N(d_1)$$

应持有  $\Delta_S$  股的外国标的股,以规避发行一单位的买权。

同时应借入的本国货币金额为:

$$B = -K'Xe^{-r_f t}N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t})$$

负值代表借款。

若以外币计价的借款  $B'$ , 则为:

$$B' = X'B = -K'e^{-r't}N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t})$$

也就是, 借入  $B$  元(或  $B'$  元外币), 用之购进  $\Delta_S$  股的外国标的股票, 以达成避险。

因此, 该买权可由  $\Delta_S$  股加借款  $B$ (或  $B'$ ) 复制, 也就公式(1)的含义:

$$C_1 = (XS')\Delta_S + B \text{ (复制买权 } C_1 \text{ 的组合)}$$

### 卖权评价模型及避险比率

若是卖权, 其到期现金流量为:

$$p_1^* = X^* \max(K' - S'^*, 0)$$

其评价模型可将(1)内的  $S'$ ,  $K'$ ,  $d_1$  及  $d_1 - \sigma_S \sqrt{t}$  转换成负值的  $-S'$ ,  $-K'$ ,  $-d_1$  及  $-(d_1 - \sigma_S \sqrt{t})$  即是卖权评价模型如下:

$$p_1 = K'Xe^{-r't}N(-d_1 + \sigma_S \sqrt{t}) - XS'e^{-q't}N(-d_1) \quad (2)$$

此外,  $\Delta_{p_1} = \frac{\partial p_1}{\partial (XS')} = -e^{-q't}N(-d_1)$ , 应放空  $\Delta_{p_1}$  股的外国股票来规避发行一单位卖权的风险。同时应贷放的本国现金为  $B = K'Xe^{-r't}N(-d_1 + \sigma_S \sqrt{t})$ 。或贷放  $B' = Ke^{-r't}N(-d_1 + \sigma_S \sqrt{t})$  的外国现金 ( $B' = X'B$ ,  $X'X = 1$ )。所以, 卖权可由  $\Delta_{p_1}$  及  $B$  复制:  $p_1 = B + (XS')\Delta_{p_1}$ 。

## 三、第二种汇率联动选择权

### 买权评价模型及避险比率

我们将以求解互换选择权(Exchange Options)的评价方法来求解第二种买权的评价模型如下(将  $C_2^*$  乘以  $X'^*$  改换成  $C_2'^*$  表示如下):

$$C_2'^* = \max(S'^* - KX'^*, 0) \Rightarrow \frac{C_2'^*}{S'^*} = \max\left(1 - \frac{KX'^*}{S'^*}, 0\right) \quad (3a)$$

这正是一个欧式卖权的到期现金流量,标的物的到期价格为  $KX'^*/S'^*$ , 且履约价为 1。该标的物的现在价格可表示为  $KX'e^{-rt}/S'$  ( $= Ke^{-rt}/S'X$ , 以本国货币计价,故以  $r$  折现)。

根据(2)及互换选择权的评价理论,该卖权的现在价格为:

$$\frac{C'_2}{S'} = 1 \cdot e^{-rt} N(-y_1 + \sigma_{SX'} \sqrt{t}) - (KX'e^{-rt}/S') N(-y_1)$$

$$\therefore C'_2 = S' N(-y_1 + \sigma_{SX'} \sqrt{t}) - KX'e^{-rt} N(-y_1) \quad (3b)$$

此处:我们引用互换选择权的理论:在完全市场下,若所有资产都转换,以股价  $S'$  作为计价单位(即  $C'_2/S'^*$  及  $KX'^*/S'^*$ ),则结果的借贷利率为零。因此,折现因子  $e^{-rt} = 1$ 。

$$y_1 = \frac{\ln(KX'e^{-rt}/S')}{\sigma_{SX'} \sqrt{t}} + \frac{\sigma_{SX'} \sqrt{t}}{2} \quad (4)$$

在考量连续股息  $q$  之下,(3b)可改写为:

$$C'_2 = S'e^{-qt} N(-y_2 + \sigma_{SX'} \sqrt{t}) - KX'e^{-rt} N(-y_2) \quad (5)$$

此处:

$$\begin{aligned} -y_2 &= -\left[ \frac{\ln(KX'e^{-rt}/S'e^{-qt})}{\sigma_{SX'} \sqrt{t}} + \frac{\sigma_{SX'} \sqrt{t}}{2} \right] \\ &= \frac{\ln(S'e^{-qt}/KX'e^{-rt})}{\sigma_{SX'} \sqrt{t}} - \frac{\sigma_{SX'} \sqrt{t}}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -y_2 + \sigma_{SX'} \sqrt{t} &= -(y_2 - \sigma_{SX'} \sqrt{t}) \\ &= \frac{\ln(S'e^{-qt}/KX'e^{-rt})}{\sigma_{SX'} \sqrt{t}} + \frac{\sigma_{SX'} \sqrt{t}}{2} = X_2(\text{令}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{SX'}^2 &= \text{Var}[(dS'/S')/(dX'/X')] = \text{Var}(d\ln S'/d\ln X') \\ &= \sigma_S^2 + \sigma_{X'}^2 - 2\rho_{SX'}\sigma_S\sigma_{X'} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma_S^2 = \text{Var}(dS'/S') = \text{Var}(d\ln S')$$

$$\sigma_{X'}^2 = \text{Var}(dX'/X') = \text{Var}(d\ln X')$$

$$\rho_{SX'} = \text{Corr}(dS'/S', dX'/X')$$

将公式(5)以本国货币计价(即乘以汇率  $X$ )即是以本国货币计价的第二种买权评价模型如下:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_2'X \\ &= S'Xe^{-qt}N(X_2) - Ke^{-rt}N(X_2 - \sigma_{SX'}\sqrt{t}) \end{aligned} \quad (9)$$

此处:

$$X_2 = \frac{\ln(S'e^{-qt}/KX'e^{-rt})}{\sigma_{SX'}\sqrt{t}} + \frac{\sigma_{SX'}\sqrt{t}}{2} \quad (10)$$

$$X_2 - \sigma_{SX'}\sqrt{t} = -y_2 = \frac{\ln(S'e^{-qt}/KX'e^{-rt})}{\sigma_{SX'}\sqrt{t}} - \frac{\sigma_{SX'}\sqrt{t}}{2} \quad (11)$$

$$\sigma_{SX}^2 = \sigma_S^2 + \sigma_X^2 + 2\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X = \sigma_{S'X'}^2$$

$$\left(\because \text{Var}\left(\frac{dX'}{X'}\right) = \text{Var}\left[\frac{d(1/X')}{(1/X')}\right] = \text{Var}\left(\frac{dX}{X}\right) \quad \text{及}\right.$$

$$\text{Cov}\left(\frac{dS'}{S'}, \frac{dX'}{X'}\right) = -\text{Cov}\left(\frac{dS'}{S'}, \frac{dX}{X}\right), \quad X' = \frac{1}{X}$$

$$\rho_{SX'} = -\rho_{SX} \text{ (容易证明)}$$

根据(9), Delta 比率为

$$\Delta_{S'} = \frac{\partial C_2}{\partial (S'X)} = e^{-qt}N(X_2)$$

应持有  $\Delta_{S'}$  股的外国标的股,以规避发行一单位的(外国)买权。

同时应借入的本国现金为

$$B = Ke^{-rt}N(X_2 - \sigma_{SX'}\sqrt{t})$$

(借入  $B$  元,并购进  $\Delta_{S'}$  股以避险)。因此,此买权可由  $\Delta_{S'}$  股的外国标的股加上借款  $B$ ,得以复制,以公式表则为:

$$C_2 = (S'X)\Delta_{S'} + B \text{ (复制组合)}$$

### 卖权评价模型及避险比率

若是卖权,其到期现金流量为  $p_2^* = \max(KX'^* - S'^*, 0)$ , 其评价模型可将(9)的  $S'$ ,  $K$ ,  $X_2$  及  $X_2 - \sigma_{SX}\sqrt{t}$  转换成负值的  $-S'$ ,  $-K'$ ,  $-X_2$  及  $-(X_2 - \sigma_{SX}\sqrt{t})$  即成为卖权的评价公式如下:

$$p_2 = Ke^{-r}N(-X_2 + \sigma_{SX}\sqrt{t}) - S'Xe^{-rt}N(-X_2) \quad (12)$$

此外,  $\Delta_{p_2} = \frac{\partial p_2}{\partial(S'X)} = -e^{-rt}N(-X_2)$ , 应放空  $\Delta_{p_2}$  股的外国股票来规避发行一单位卖权的风险。

同时应贷放的本国现金为

$$B = Ke^{-r}N(-X_2 - \sigma_{SX}\sqrt{t})$$

或应贷放的外国现金为

$$B' = X'Ke^{-r}N(-X_2 + \sigma_{SX}\sqrt{t})$$

外币现金 ( $B' = X'B$ )。所以,卖权可由  $\Delta_{p_2}$  及  $B$  复制:  $p_2 = (S'X)\Delta_{p_2} + B$ 。

## 四、固定汇率选择权:第三种汇率连动选择权

### 买权的评价及 Delta

第三种买权的到期现金流量为

$$C_3^* = \bar{X}\max(S'^* - K', 0) \quad (13)$$

将之转化成外币计价:

$$\begin{aligned} C_3' &= X'^* C_3^* = \bar{X}X'^* \max(S'^* - K', 0) \\ &= \bar{X}X' \left( \frac{X'^*}{X'} \right) \cdot \max \left[ S' \left( \frac{S'^*}{S'} \right) - K', 0 \right] \\ &= \bar{X}X' \left( \frac{X' + dX'}{X'} \right) \cdot \max \left[ S' \left( \frac{S' + dS'}{S'} \right) - K', 0 \right] \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{X}X' \left(1 + \frac{dX'}{X'}\right) \cdot \max \left[ S' \left(1 + \frac{dS'}{S'}\right) - K', 0 \right] \\
&= \bar{X}X'e^v \cdot \max [S'e^u - K', 0]
\end{aligned} \tag{14b}$$

此处:  $v = \ln \left(1 + \frac{dX'}{X'}\right)$ , 连续复利的汇率变动率

$u = \ln \left(1 + \frac{dS'}{S'}\right)$ , 连续复利的股票报酬率

在风险中立环境下, 该买权的现在价值是其到期现金流量期望值的折现值(以本国无风险利率  $r$  折现), 表示如下:

$$\begin{aligned}
C_3' &= e^{-rt} \bar{X}X'E[e^v \max(S'e^u - K', 0)] \\
&= e^{-rt} \bar{X}X' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^v \max(S'e^u - K', 0) f(u, v) du dv \right\} \\
&= e^{-rt} \bar{X}X' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln(\frac{K'}{S'})}^{\infty} e^v (S'e^u - K') f(u, v) du dv \right\}
\end{aligned} \tag{15}$$

此处:

$$-\infty < v < \infty, \ln\left(\frac{K'}{S'}\right) < u < \infty$$

$f(u, v) = u$  及  $v$  的二元正态分布(Bivariate Normal Distribution)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sigma_S\sigma_{X'}\sqrt{1-\rho_{SX'}^2}} \\
&\exp \left\{ \frac{-1}{2[1-\rho_{SX'}^2]} \left[ \left( \frac{u-\mu_1}{\sigma_S\sqrt{t}} \right)^2 - 2\rho_{SX'} \left( \frac{u-\mu_1}{\sigma_S\sqrt{t}} \right) \left( \frac{v-\mu_2}{\sigma_{X'}\sqrt{t}} \right) + \left( \frac{v-\mu_2}{\sigma_{X'}\sqrt{t}} \right)^2 \right] \right\} \\
&\mu_1 = r_f - q - \sigma_S^2/2 \quad (\because du = (r_f - q - \sigma_S^2/2)dt + \sigma_S dW) \\
&\mu_2 = r_f - r - \sigma_{X'}^2/2 \quad (\because dv = (r_f - r - \sigma_{X'}^2/2)dt + \sigma_{X'} dZ) \\
&\rho_{SX'} = \text{Corr}(dS'/S', dX'/X') \\
&= -\text{Corr}(dS'/S', dX/X) = -\rho_{SX} \\
&\sigma_{SX} = -\sigma_{SX'}
\end{aligned}$$

将上面的双重积分分成两部分如下:

$$\begin{aligned}
C_3' &= e^{-rt} \bar{X}X' \left\{ S' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln(\frac{K'}{S'})}^{\infty} e^{u+v} f(u, v) du dv \right. \\
&\quad \left. - K' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln(\frac{K'}{S'})}^{\infty} e^v f(u, v) du dv \right\}
\end{aligned}$$

$$= e^{-rt} \bar{X} X' [S' e^{(r_f - q)t} \exp(\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(X_3) - K' N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})]$$

$$\therefore C_3' = \bar{X} X' \left[ S' \left( \frac{e^{r_f}}{e^r} \right)^t e^{-qt} \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(X_3) - K' e^{-rt} N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t}) \right] \quad (16a)$$

$$= \bar{X} X' [S' e^{-(r+q-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - r_f)t} N(X_3) - K e^{-rt} N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})] \quad (16b)$$

$$\sigma_{SX} = \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X$$

此处:第一个双重积分 =  $e^{(r_f - q)t} \exp(\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(X_3)$  (详见附录二的注解)

第二个双重积分 =  $N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})$  (详见附录二的注解)

$$X_3 = \frac{\ln(S' e^{-qt} / K' e^{-rt}) - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t}{\sigma_S \sqrt{t}} + \frac{\sigma_S \sqrt{t}}{2} \quad (16c)$$

再将(16)的  $C_3'$  转换成以本国货币计价的固定汇率买权如下:

$$C_3 = X C_3' = \bar{X} \left[ S' e^{-qt} \left( \frac{e^{r_f}}{e^r} \right)^t \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(X_3) - K' e^{-rt} N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t}) \right] \quad (17a)$$

$$= \bar{X} [S' e^{-(r+q+\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - r_f)t} N(X_3) - K' e^{-rt} N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})] \quad (17b)$$

该买权  $C_3$  的 Delta 为

$$\Delta_S = \frac{\partial C_3}{\partial (XS')} = \left( \frac{\bar{X}}{X} \right) e^{-qt} \left( \frac{e^{r_f}}{e^r} \right)^t \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(X_3)$$

应买进  $\Delta_S$  股的外国标的股票,以规避发行一单位买权的风险。

同时,应借入的本国现金为:

$$B = -\bar{X} K' e^{-rt} N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})$$

所以,该买权  $C_3$  的复制组合为:

$$(XS')\Delta_S + B (= C_3)$$

其实公式(17)的评价也可利用 Martingale Pricing 方法更简易, 详见附录二的求解。

买权  $C_3$  的经济意义如下:

在  $C_3$  的评价中, 外国标的股价  $S'$  已经两国利率差距加以调整  $[(e^{r_f}/e^r)^t]$ , 利率差距反映于两国汇率的变动。因此, 在  $C_3$  的评价中, 汇率变动对评价的影响是透过汇率对外国标的股  $S'$  的调整  $(e^{r_f}/e^r)^t$ 。此外, 汇率变动与股价变动间的关系对评价  $C_3$  的影响是透过两者的相关系数反映于  $\exp(\rho_{S'X}\sigma_{S'}\sigma_X t)$  内。

### 卖权的评价及 Delta

由  $C_3$  的评价公式(17), 卖权的评价模型如下:

$$p_3 = \bar{X} \left[ K' e^{-rt} N(-X_3 + \sigma_{S'} \sqrt{t}) - S' e^{-qt} \left( \frac{e^{r_f}}{e^r} \right)^t \right. \\ \left. \times \exp(-\rho_{S'X} \sigma_{S'} \sigma_X t) N(-X_3) \right] \quad (18a)$$

$$= \bar{X} [K' e^{-rt} N(-X_3 + \sigma_{S'} \sqrt{t}) - S' e^{-(r+q+\sigma_{S'X} r_f)t} N(-X_3)] \quad (18b)$$

所以

$$\Delta_{p_3} = \frac{\partial p_3}{\partial (XS')} = - \left( \frac{\bar{X}}{X} \right) e^{-qt} \left( \frac{e^{r_f}}{e^r} \right)^t \\ \times \exp(-\rho_{S'X} \sigma_{S'} \sigma_X t) N(-X_3) \\ = - \left( \frac{\bar{X}}{X} \right) e^{-(r+q+\sigma_{S'X} r_f)t} N(-X_3)$$

应放空  $\Delta_{p_3}$  股的外国标的股, 以规避发行一单位卖权的风险。

同时应贷放的本国现金为

$$B = \bar{X} K' e^{-rt} N(-X_3 + \sigma_{S'} \sqrt{t})$$

所以该卖权的复制组合为

$$(XS')\Delta_{p_3} + B (= p_3)$$



## 五、第四种汇率联动选择权

### 买权的评价及 Delta

第四种买权的到期现金流量为:

$$\begin{aligned} C_4^* &= S'^* \max(X^* - K, 0) \quad (K = \text{汇率履约价}) \\ &= S'^* X^* \cdot \max\left(1 - \frac{K}{X^*}\right) \quad (\text{利用线性同质关系}) \\ &= S'^* \left(\frac{1}{X'^*}\right) \max(1 - KX'^*, 0) \quad \left(X^* = \frac{1}{X'^*}\right) \end{aligned}$$

∴ 以外币计价的现金流量  $C_4'$  为:

$$\begin{aligned} C_4' &= C_4^* X'^* = S'^* \max(1 - KX'^*, 0) \\ &= KS'^* \max\left(\frac{1}{K} - X'^*, 0\right) \end{aligned} \quad (19)$$

根据(19),我们将利用第三种卖权的评价模型来评价  $C_4'$ 。首先,第三种卖权的到期现金流量为:[由(14)转化成为卖权而来]。

$$p_3' = \bar{X}X'^* \max(K' - S'^*, 0) \quad (20)$$

比较(19)及(20)可知,只要将(19)内的  $K$ ,  $S'^*$ ,  $\frac{1}{K}$  及  $X'^*$  分别对换(20)内的  $\bar{X}$ ,  $X'^*$ ,  $K'$  及  $S'^*$  即可利用第三种卖权  $p_3'$  的评价模型来评价第四种买权  $C_4'$ 。为方便计,变量的对换表如下:

(19)	对换	(20)
$K$	$\longrightarrow$	$\bar{X}$
$S'^* (S')$	$\longrightarrow$	$X'^* (X')$
$\frac{1}{K}$	$\longrightarrow$	$K'$
$X'^* (X')$	$\longrightarrow$	$S'^* (S')$
$q$	$\longrightarrow$	$r$
$r$	$\longrightarrow$	$q$

因此,以外币计价的第三种卖权评价模型可由(18)乘以  $X'$  转化为:

$$p'_3 = p_3 X' = X' \bar{X} \left[ K' e^{-rt} N(-X_3 + \sigma_S \sqrt{t}) - S' e^{-qt} \left( \frac{e^{rt}}{e^r} \right)^t \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(-X_3) \right] \quad (21)$$

根据  $p'_3$  以及上面的变量对换结果即是  $C'_4$  如下:

$$C'_4 = KS' \left[ \left( \frac{1}{K} \right) e^{-rt} N(-X_3^* + \sigma_{X'} \sqrt{t}) - X' e^{-qt} \left( \frac{e^{rt}}{e^r} \right)^t \times \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) \cdot N(-X_3^*) \right] \quad (22)$$

$$= S' e^{-qt} N(X_4) - KX'S' e^{-qt} \left( \frac{e^{rt}}{e^r} \right)^t \times \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) \cdot N(X_4 - \sigma_X \sqrt{t}) \quad (23a)$$

$$= S' e^{-qt} N(X_4) - KX'S' e^{-(r+q+\sigma_{SX}-r_f)t} \cdot N(X_4 - \sigma_X \sqrt{t}) \quad (23b)$$

此处:

$$\begin{aligned} -X_3^* + \sigma_{X'} \sqrt{t} &= - \left[ \frac{\ln(X' e^{-rt} / (1/K) e^{-rt'}) + \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t}{\sigma_{X'} \sqrt{t}} + \frac{\sigma_{X'} \sqrt{t}}{2} \right] \\ &\quad + \sigma_{X'} \sqrt{t} \\ &= \frac{\ln(X e^{-rt'} / K e^{-rt}) + \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t}{\sigma_X \sqrt{t}} + \frac{\sigma_X \sqrt{t}}{2} \\ &= X_4 \quad (\text{令 } \sigma_X = \sigma_{X'}) \end{aligned} \quad (24)$$

$X_4$  是将(16b)的  $X_3$  加以变量对换,而且将  $S'$  对换成  $X'$  时,  $q$  也应同时对换成  $r$ 。

$$\begin{aligned} -X_3^* &= - \left[ \frac{\ln(X' e^{-rt} / (1/K) e^{-rt'}) - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t}{\sigma_{X'} \sqrt{t}} + \frac{\sigma_{X'} \sqrt{t}}{2} \right] \\ &= \frac{\ln(X e^{-rt'} / K e^{-rt}) + \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t}{\sigma_X \sqrt{t}} + \frac{\sigma_X \sqrt{t}}{2} - \sigma_X \sqrt{t} \\ &= X_4 - \sigma_X \sqrt{t} \end{aligned} \quad (25)$$

将(23)乘以汇率  $X$  即成为以本国货币计价的  $C_4$ :

$$C_4 = C_4'X = XS'e^{-qt}N(X_4) - KS'e^{-qt}\left(\frac{e^{rf}}{e^r}\right)^t \times \exp(-\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X t)N(X_4 - \sigma_X\sqrt{t}) \quad (26a)$$

$$= XS'e^{-qt}N(X_4) - KS'e^{-(r+q+\sigma_{SX}^{-r}r_f)t}N(X_4 - \sigma_X\sqrt{t}) \quad (26b)$$

注:  $C_4$  也可以附录二的 Martingale Pricing 方法求解, 读者应以之作为作业练习。

所以

$$\text{Delta}(\Delta_S) = \frac{\partial C_4}{\partial (XS')} = e^{-qt}N(X_4)$$

应买进  $\Delta_S$  股的外国标的股, 同时应借入的本国现金为:

$$B = -KS'e^{-qt}\left(\frac{e^{rf}}{e^r}\right)^t \exp(-\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X t)N(X_4 - \sigma_X\sqrt{t}) \\ = -KS'e^{-(r+q+\sigma_{SX}^{-r}r_f)t}N(X_4 - \sigma_X\sqrt{t})$$

或以外币计价为:

$$B' = BX' = -KX'S'e^{-qt}\left(\frac{e^{rf}}{e^r}\right)^t \exp(-\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X t)N(X_4 - \sigma_X\sqrt{t}) \\ = -K'S'e^{-(r+q+\sigma_{SX}^{-r}r_f)t}N(X_4 - \sigma_X\sqrt{t})$$

### 卖权的评价模型及 Delta

$$p_4 = KS'e^{-qt}\left(\frac{e^{rf}}{e^r}\right)^t \exp(-\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X t)N(-X_4 + \sigma_X\sqrt{t}) \\ - XS'e^{-qt}N(-X_4) \quad (27a)$$

$$= KS'e^{-(r+q+\sigma_{SX}^{-r}r_f)t}N(-X_4 + \sigma_X\sqrt{t}) - XS'e^{-qt}N(-X_4) \quad (27b)$$

$$\Delta p_4 = \frac{\partial p_4}{\partial (XS')} = -e^{-qt}N(-X_4) \quad (\text{放空})$$

$$B = KS'e^{-qt}\left(\frac{e^{rf}}{e^r}\right)^t \exp(-\rho_{SX}\sigma_S\sigma_X t)N(-X_4 + \sigma_X\sqrt{t}) \quad (\text{贷放}) \\ = KS'e^{-(r+q+\sigma_{SX}^{-r}r_f)t}N(-X_4 + \sigma_X\sqrt{t})$$

## 参 考 文 献

- A. Dravid, M. Richardson, and T. Sun, "Pricing Foreign Index Contingent Claims: An Application to Nikkei Index Warrants", *The Journal of Derivatives*, Fall 1993, 33—51.
- J. Hull, and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models", *The Journal of Derivatives*, Winter 1994, 37—48.
- E. Reiner, "Quanto Mechanics", From Black-Scholes to Black Holes, *Risk Publication*, Chapter 22.

## 附 录 一

浮动汇率买权的评价如下:

$$C_1 = e^{-rt} E[X^* \max(S'^* - K', 0)] \quad (A1)$$

$$= e^{-rt} E[X^* (S'^* - K') I_{|S'^*| > K'}]$$

$$= e^{-rt} E[X^* S'^* I_{|S'^*| > K'}] - e^{-rt} K' E[X^* I_{|S'^*| > K'}] \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= E[X^* S'^* I_{|S'^*| > K'}] = E\left\{X \text{ 即 } \left[\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)t + \sigma_X \Delta W_x\right] S' \right. \\ &\quad \times \exp\left[\left(r_f - q - \rho_{SX}\sigma_S\sigma_X - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S \Delta W_S\right] I_{|S'^*| > K'} \Big\} \\ &\quad (\text{利用附录二内的(B6) 及(B7)}) \\ &= XS' \exp\left[\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)t + \left(r_f - q - \rho_{SX}\sigma_S\sigma_X - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t\right] \\ &\quad \times E[e^{\sigma_X \sqrt{t} Z_1 + \sigma_S \sqrt{t} Z_2}] I_{\left\{\sigma_S \sqrt{t} Z_2 > \ln\left(\frac{K'}{S'}\right) - \left(r_f - q - \rho_{SX}\sigma_S\sigma_X - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t\right\}} \end{aligned}$$

此处:

$$\Delta W_x = \sqrt{t} Z_1 \sim N(0, t), Z_1 \sim N(0, 1)$$

$$\Delta W_S = \sqrt{t} Z_2 \sim N(0, t), Z_2 \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= XS' \exp \left[ \left( r - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \frac{1}{2} \sigma_X^2 - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t \right] \\ &\quad \times E \left[ e^{iZ_1 + dZ_2} I_{|aZ_1 + bZ_2 \geq k|} \right] \end{aligned} \quad (A3)$$

此处:

$$\begin{aligned} c &= \sigma_X \sqrt{t}, \quad d = \sigma_S \sqrt{t}, \quad a = 0, \quad b = \sigma_S \sqrt{t} \\ k &= \left( \ln \left( \frac{K'}{S'} \right) - \left( r - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t \right) \\ \therefore A &= XS' \exp \left[ \left( r - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \frac{1}{2} \sigma_X^2 - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t \right] \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{c^2 + d^2 + 2\rho_{SX}cd}{2} \right] \\ &\quad \times N \left[ \frac{ac + bd + \rho_{SX}(ad + bc) - k}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\rho_{SX}ab}} \right] \end{aligned} \quad (A4)$$

[(A3)的期望值等于(A4)的第二个指数函数。David, Richardson and Sun (1993)附录的定理(Lemma)]。

将(A3)内的  $a, b, c, d$  及  $k$  值代入(A4)简化:

$$\begin{aligned} A &= XS' \exp \left[ \left( r - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \frac{1}{2} \sigma_X^2 - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t + (\sigma_X^2 + \sigma_S^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X) \frac{t}{2} \right] N \left( \frac{-\ln(K'/S') + (r_f - q + \sigma_S^2/2)t}{\sigma_S \sqrt{t}} \right) \\ &= XS' e^{(r-q)t} N(d_1) \end{aligned} \quad (A5)$$

此处:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S'/K') + (r - q + \sigma_S^2/2)t}{\sigma_S \sqrt{t}} \\ &= \frac{\ln(S' e^{-qt} / K' e^{-r_f t})}{\sigma_S \sqrt{t}} \end{aligned}$$

再次(A2)内的期望值求算如下:

$$\begin{aligned} B &= E[X^* I_{|S^* > K'|}] = E \left[ X \exp \left[ \left( r - r_f - \frac{1}{2} \sigma_X^2 \right) t + \sigma_X \Delta W_X \right] \right. \\ &\quad \left. \times I_{|S' \exp((r_f - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \frac{1}{2} \sigma_S^2/2)t + \sigma_S \Delta W_S) > K'|} \right] \end{aligned} \quad (A6)$$

(利用附录二内的(B6)及(B7))

$$= X \exp \left[ \left( r - r_f - \frac{1}{2} \sigma_X^2 \right) t \right] E \{ e^{\sigma_X \sqrt{t} Z_1} I_{|\sigma_S \sqrt{t} Z_2| \geq k^*} \}$$

(此处  $k^* = \ln(K'/S') - (r_f - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \sigma_S^2/2)t$ )

$$\therefore B = X \exp \left[ \left( r - r_f - \frac{\sigma_X^2}{2} \right) t \right] E \{ e^{aZ_1 + dZ_2} I_{|az_1 - bz_2| \geq k^*} \}$$

此处  $d = 0$ ,  $c = \sigma_X \sqrt{t}$ ,  $a = 0$ ,  $b = \sigma_S \sqrt{t}$

再同样利用求解(A3)期望值的公式求解上等式的期望值)

$$\begin{aligned} &= X \exp[(r - r_f - \sigma_X^2/2)t] \exp[(\sigma_X^2 t + 0)/2] \\ &\quad \times N \left( \frac{0 + \rho_{SX}(0 + \sigma_S \sigma_X t) - \ln(K'/S') + (r_f - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X - \sigma_S^2/2)t}{\sqrt{\sigma_S^2 t}} \right) \\ &= X e^{(r - r_f)t} N \left( \frac{\ln(S'/K') + (r_f - q - \sigma_S^2/2)t}{\sigma_S \sqrt{t}} \right) \\ &= X e^{(r - r_f)t} N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t}) \end{aligned} \quad (A7)$$

将(A5)及(A7)代入(A2):

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-rt} X S' e^{(r-q)t} N(d_1) - e^{-rt} K' X e^{(r-r_f)t} N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t}) \\ &= X S' e^{-qt} N(d_1) - K' X e^{-r_f t} N(d_1 - \sigma_S \sqrt{t}) \end{aligned}$$

这就是(1)式。

## 附 录 二

以 Martingale Pricing 方法评价固定汇率买权(第三种汇率联动选择权)如下:

外国股价以当地国货币计价的价格变动过程为:

$$\frac{dS'}{S'} = (r_f - q)dt + \sigma_S dW_S^Q \quad (B1)$$

汇率变动过程为

$$\frac{dX}{X} = (r - r_f)dt + \sigma_X dW_X^Q \quad (B2)$$

此处:  $X =$  以本国货币计价的每一单位外币, 即汇率

$Q =$  在风险中立下的概率测度

根据 Hull 及 White(1994, P. 39) 或 Dravid, Richardson 及 Sun(1998, (3)式), 以本国投资人观点下的外国股价变动程式(B1)可改写为:

$$\frac{dS'}{S'} = (r_f - q - \rho\sigma_S\sigma_X)dt + \sigma_S dW_S^Q \quad (B3)$$

(或参见汇率连动远期契约一章, 公式(16b))

利用 Itô Lemma 及(B2)与(B3),  $\ln S'$  及  $\ln X$  的变动过程可表示为:

$$d\ln S' = \left(r_f - q - \rho\sigma_X\sigma_S\sigma_X - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)dt + \sigma_S dW_S^Q \quad (B4)$$

$$d\ln X = \left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)dt + \sigma_X dW_X^Q \quad (B5)$$

由积分求解(Integral Solutions)(B4)及(B5)获得

$$S'^* = S' \exp\left[\left(r_f - q - \rho\sigma_X\sigma_S\sigma_X - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S \Delta W_S^t\right] \quad (B6)$$

$$X^* = X \exp\left[\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)t + \sigma_X \Delta W_X^t\right] \quad (B7)$$

而且

$$\ln S'^* \sim N\left[\ln S' + \left(r_f - q - \rho\sigma_X\sigma_S\sigma_X - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t, \sigma_S^2 t\right] \quad (B8)$$

$$\ln X^* \sim N\left[\ln X + \left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_X^2\right)t, \sigma_X^2 t\right] \quad (B9)$$

在 Martingale Pricing 之下,

$$\begin{aligned} C_3 &= e^{-r} E^Q[\bar{X} \max(S'^* - K', 0)] \\ &= e^{-r} \bar{X} E^Q[(S'^* - K') I_{|S'^* > K'|}] \\ &= e^{-r} \bar{X} E^Q[S'^* I_{|S'^* > K'|}] - e^{-r} \bar{X} K' E^Q[I_{|S'^* > K'|}] \end{aligned} \quad (B10)$$

(B10)内的第二期望值求解如下:

$$E^Q[I_{|S'^* > K'|}] = P_r^Q(\ln S'^* > \ln K')$$

$$\begin{aligned}
&= P_r^Q \left[ -\frac{\Delta W_S^Q}{\sqrt{t}} \leq \frac{\ln(S' e^{-qt}/K' e^{-rt}) - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t - \frac{1}{2} \sigma_S^2 t}{\sigma_S \sqrt{t}} \right] \\
&= N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})
\end{aligned} \quad (B11)$$

此处:

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta W_S^Q}{\sqrt{t}} &\sim N(0, 1) \\
X_3 &= \frac{\ln(S' e^{-qt}/K' e^{-rt}) - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t + \frac{1}{2} \sigma_S^2 t}{\sigma_S \sqrt{t}}
\end{aligned} \quad (B12)$$

(B10)内的第一期望值求算如下:

$$\begin{aligned}
E^Q[S' \cdot I_{|S' \cdot > K'|}] &= S' e^{(r_f - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X)t} E^Q[\zeta_T I_{|S' \cdot > K'|}] \\
&\quad (\text{此处 } \zeta_T = e^{-\sigma_S^2/2 + \sigma_S \Delta W_S^Q}) \\
&= S' e^{(r_f - q)t} e^{-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t} E^R[I_{|S' \cdot > K'|}] \\
&= S' e^{(r_f - q)t} e^{-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t} P_r^R(S' \cdot > K') \\
&= S' e^{(r_f - q)t} e^{-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t} N(X_3)
\end{aligned} \quad (B13)$$

此处:在  $R$  测度下,  $dW^R = dW^Q + \sigma_S dt$

$$S' \cdot = S' \exp \left[ \left( r_f - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X + \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) t + \sigma_S \Delta W_S^R \right]$$

或

$$d \ln S' \cdot = \left( r_f - q - \rho_{SX} \sigma_S \sigma_X + \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) dt + \sigma_S dW_S^R$$

将(B11)及(B13)代入(B1)简化即是(17)。

若再乘以  $X'$  即成为(16)。

注:(16)式内的两个积分其实也是上面 Martingale Pricing 的求解:

$$\begin{aligned}
&S' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln(K'/S')}^{\infty} e^{u+v} f(u, v) du dv \\
&= E^Q[S' \cdot I_{|S' \cdot > K'|}] = S' e^{(r_f - q)t} \exp(-\rho_{SX} \sigma_S \sigma_X t) N(X_3) \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln(K'/S')}^{\infty} e^v f(u, v) du dv = E^Q[I_{|S' \cdot > K'|}] = N(X_3 - \sigma_S \sqrt{t})
\end{aligned}$$



## 第十七章 美式汇率连动选择权

### 一、简介

在前一章,我们对4种不同类型欧式汇率连动选择权的评价、避险参数(Delta)及其复制组合已做了很详细的分析。但汇率连动选择权一般是属于美式,因此提前履约的可能存在,我们不能使用前一章欧式汇率连动选择权的评价模型来评价美式选择权。在本章中,我们将介绍如何利用偏微分方程式及树解方式求解美式汇率连动选择权。

### 二、提前履约的可能性

在标的物支付连续股利率 $q$ 下,美式选择权都会有被提前履约的可能。我们从选择权的理论已知,当美式选择权(买权或卖权)的内涵价值(Intrinsic Value,或称执行价值 Exercise Value)大于其对应的欧式选择权(买权或卖权)时,则美式选择权会被提前履约,以第一类型的美式汇率连动选择权而言,其提前履约条件可以公式表示如下:

$$AC_{1t} \geq \max[X_t(S'_t - K'), C_{1t}] \quad (1)$$

此处: $AC_{1t}$  = 美式第一类型汇率连动买权

$X_t(S'_t - K')$  = 美式第一类型汇率连动买权在时间 $t$ 的内涵价值  
(执行价值)

$C_{1t}$  = 欧式第一类型汇率连动买权在时间  $t$  的价值

= 前一章的公式(1)

$$= X_t S'_t e^{-qt} N(d_1) - K' X_t e^{-rt} N(d_1 - \sigma_{S'} \sqrt{t}) \quad (2)$$

$S'$  = 外国标的价格,  $X$  = 以本国货币计价的每一单位外币  
(汇率)

$X' = 1/X$ , 其他符号与前一章相同

由(1)式可知,  $AC_{1t}$  被提前履约的条件是

$$X_t (S'_t - K') > C_{1t} \quad (3)$$

[若  $X_t (S'_t - K') = C_{1t}$ , 则  $AC_{1t} = C_{1t}$ , 欧式与美式买权相同, 不会被提前履约]。

$$\therefore X_t (S'_t - K') > X_t S'_t e^{-qt} N(d_1) - K' X_t e^{-rt} N(d_1 - \sigma_{S'} \sqrt{t})$$

(利用(2))

当  $S'_t$  是很大时 ( $S'_t \rightarrow \infty$ ), 则  $N(d_1) \rightarrow 1$  及  $N(d_1 - \sigma_{S'} \sqrt{t}) \rightarrow 1$

$\therefore S'_t - K' > S'_t e^{-qt} - K' e^{-rt}$ , (就很大的  $S_t$  而言)

$$S'_t (1 - e^{-qt}) > K (1 - e^{-rt})$$

或

$$S'_t > K (1 - e^{-rt}) / (1 - e^{-qt}) = s'_t \quad (4)$$

所以根据(3)及(4), 我们可确知会有一个很大的  $S_t$  能使(4)成立 ( $S'_t > s'_t$ )。因之(3)也会成立。以概率表示则为:

$$P_t [X_t (S'_t - K') > C_{1t}] > 0 \quad (5)$$

既然其概率大于零, 则该美式买权有被提前履约的可能。而(1)是其评价基础。

至于美式第二类型汇率连动买权  $AC_{2t}$ , 其提前履约条件的条件为:

$$AC_{2t} \geq \max(S'_t - KX'_t, C_{2t}) \quad (6)$$

此处:  $C_{2t}$  = 第一章的(9)式

= 欧式第二类型汇率连动买权在时间  $t$  的价值

$S'_t - KX'_t$  = 美式第二类型汇率连动买权在时间  $t$  的执行价值

正如第一类型,我们可证明(6)存在的概率大于零:

$$S'_t - KX'_t > C_{2t} = S'_t X e^{-q} N(X_2) - K e^{-r} N(X_2 - \sigma_{SX} \sqrt{t})$$

∴ 就很大的  $S'_t$  而言

$$S'_t - KX'_t > S'_t X e^{-q} - K e^{-r}$$

$$\therefore S'_t > K(X'_t - e^{-r}) / (1 - X e^{-q}) = s''_t \quad (7)$$

所以由(7), 一定有一个很大的  $S'_t$ , 能使(7)成立 ( $S'_t > s''_t$ ), 因此(6)也会成立。也就是

$$P_r[S'_t - KX'_t > C_{2t}] > 0 \quad (8)$$

故美式第二类买权有被提前履约的可能。

类似的, 我们可证明其他两类型美式买权被提前履约的概率大于零, 也就是有被提前履约的可能。

### 三、美式第一类型汇率连动买权(或卖权)

在汇率连动远期契约一章中, 我们已经推导出在风险中立下, 任何汇率及外国标的物的衍生性商品定会满足下列偏微分方程式(pde): 并考量  $q$  的存在

$$\begin{aligned} r_d f = & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} S(r_f - \sigma_{SX} - q) + \frac{\partial f}{\partial X} X(r_d - r_f) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} X^2 \sigma_X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} X S \sigma_{SX} \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式的偏微分方程式涉及两个状况变量(State Variables)  $S_t$  及  $X_t$ 。在求解时比较困难。若能将(9)式转换成只有一个状况变量, 正如 Black-Scholes 的 pde, 则求解自然比较容易, 而且也可以 CRR 的多元树(Binomial Tree)求解美式选择权。

美式第一类型汇率连动买权的到期日现金流量为:

$$f(S_T, X_T, T) = X_T \max(S_T - K, 0) \quad (10a)$$

此处:  $X_T =$  到期日汇率

$S_T =$  到期时外国标的物的价格

$K =$  履约价(以外币计价)

在到期前,任何时间  $t$  提前履约的条件为:

$$f(S_t, X_t, t) \geq X_t(S_t - K) \quad (10b)$$

由(10a)及(10b),我们可改写该美式买权的价格如下:

$$f(S_t, X_t, t) = X_t g(S_t, t) \quad (10c)$$

此处:根据(10b)可知  $g(S_t, t)$  只是  $S_t$  及  $t$  的函数,与  $X_t$  无关。因此,

我们只要求解  $g(S_t, t)$ ,即可获得最后答案  $f(S_t, X_t, t)$ ,它是

$g(S_t, t)$  乘以  $X_t$ 。

因此(9)式内的偏微分项为:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = g, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial X} = \frac{\partial g}{\partial S}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = X_t \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial S_t} = X_t \frac{\partial g}{\partial S_t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = X_t \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2}$$

将之代入(9)式获得:

$$r_f X_t g = X_t \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) + \frac{\partial g}{\partial S_t} X_t S_t (r_f - q) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} X_t S_t^2 \sigma_s^2$$

(注意:  $f = X_t g$ ,  $\sigma_{SX}$  被消掉)。

此处:因为  $g(S_t, t)$  代表单纯外国标的物的衍生性商品,左方的无风险

利率是外国的无风险利率  $r_f$ 。

除以  $X_t$ ,并简化之:

$$r_f g = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial S_t} S_t (r_f - q) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} (S_t^2 \sigma_s^2) \quad (11)$$

(11)式是风险中立下单一变量( $S_t$ )的偏微分方程式,其对应的外国标的的价格随机变动过程为:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_f - q)dt + \sigma_s dZ \quad (12)$$

故(11)式连同下列两个临界条件:

$$g(S_T, T) = \max(0, S_T - K) \quad (\text{到期条件}) \quad (13a)$$

$$g(S_t, t) \geq S_t - K \quad (\text{提前履约条件}) \quad (13b)$$

即可用来求解  $g(S_t, t)$ , 而后再乘以  $X_t$  即是美式第一类型汇率连动买权的评价 [ $X_t g(S_t, t) = f(S_t, K, t)$ ]。若以二元树求解时, 则计算的参数为:

$$u = e^{\sigma_s \sqrt{\Delta t}} \quad (d = 1/u)$$

$$p = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d} \quad (\Delta t = T/N, \text{分割成 } N \text{ 个小时段 } \Delta t)$$

$$r_f = \text{无风险(折现)利率}$$

$$q = \text{股利率}$$

利用上面的参数就可建立二元树, 而后再求解美式买权。详见 Chriss (1997, pp. 251—260), 如何在分布现金股利下建立二元树。

注: 若求解美式第一类型卖权时, 其临界条件应改为:

$$g(S_T, T) = \max(0, K - S_T)$$

$$g(S_t, t) \geq K - S_t$$

#### 四、美式第二类型汇率连动买权(或卖权)

其到期日现金流量为:

$$\begin{aligned} f(S_T, X_T, T) &= \max(S_T - KX_T', 0) \\ &= \left(\frac{1}{X_T}\right) \max(y_T - K, 0) \end{aligned} \quad (14a)$$

此处:  $K$  = 本国货币价计的履约价

$S_T$  = 外国标的到期价格

$X_T'$  = 到期日汇率 = 每单位本国货币的外币价值 =  $1/X_T$

$y_T = S_T/X_T' = X_T S_T$

在到期前的提前履约条件为:

$$\begin{aligned} f(S_t, X_t, t) &\geq S_t - KX_t' \\ &= \left(\frac{1}{X_t}\right)(y_t - K) \quad \left(y_t = \frac{S_t}{X_t} = X_t S_t\right) \end{aligned} \quad (14b)$$

根据(14a)及(14b),我们可改写该美式买权的价格为:

$$f(S_t, X_t, t) = \left(\frac{1}{X_t}\right)g(y_t, t) \quad (14c)$$

求解(14c)的各项偏微分如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{X_t} \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial y_t} \frac{\partial y_t}{\partial S_t} = \frac{1}{X_t} \frac{\partial g}{\partial y_t} X_t = \frac{\partial g}{\partial y_t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \right) = \frac{\partial}{\partial y_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \right) \frac{\partial y_t}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} X_t \\ \frac{\partial f}{\partial X_t} &= \frac{\partial f}{\partial y_t} \frac{\partial y_t}{\partial X_t} = \left( \frac{1}{X_t} \right) \frac{\partial g}{\partial y_t} S_t = \frac{\partial g}{\partial y_t} \left( \frac{S_t}{X_t} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} &= \frac{\partial}{\partial X_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \frac{S_t}{X_t} \right) = \frac{\partial}{\partial y_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \frac{S_t}{X_t} \right) \frac{\partial y_t}{\partial X_t} = \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} \frac{S_t^2}{X_t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_t \partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \frac{S_t}{X_t} \right) = \frac{\partial}{\partial y_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \frac{S_t}{X_t} \right) \frac{\partial y_t}{\partial S_t} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial y_t} \left( \frac{\partial g}{\partial y_t} \right) \left( \frac{S_t}{X_t} \right) + \frac{\partial g}{\partial y_t} \frac{\partial}{\partial y_t} \left( \frac{S_t}{X_t} \right) \right] X_t \\ &= \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} \left( \frac{S_t}{X_t} \right) + \frac{\partial g}{\partial y_t} \left( \frac{1}{X_t^2} \right) \right] X_t \quad (S_t = y_t / X_t) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} S_t + \frac{\partial g}{\partial y_t} \left( \frac{1}{X_t} \right) \end{aligned}$$

将上面各项偏微分代入(9)式:

$$\begin{aligned} r_d \left( \frac{1}{X_t} \right) g &= \left( \frac{1}{X_t} \right) \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y_t} S_t (r_f - \sigma_{SX} - q) + \frac{\partial g}{\partial y_t} \left( \frac{S_t}{X_t} \right) \\ &\quad \times X_t (r_d - r_f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} X_t S_t^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} \frac{S_t^2}{X_t} X_t^2 \sigma_X^2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} X_t S_t^2 \sigma_{SX} - \frac{\partial g}{\partial y_t} S_t \sigma_{SX}$$

两边乘以  $X_t$  (同时注意  $y_t = X_t S_t$ ) 获得:

$$\begin{aligned} r_d g &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y_t} y_t (r_f - \sigma_{SX} - q) + \frac{\partial g}{\partial y_t} y_t (r_d - r_f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} y_t^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} y_t^2 \sigma_X^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} y_t^2 \sigma_{SX} + \frac{\partial g}{\partial y_t} y_t \sigma_{SX} \\ \therefore r_d g &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y_t} y_t (r_d - q) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y_t^2} y_t^2 (\sigma_S^2 + \sigma_X^2 + 2\sigma_{SX}) \quad (15) \end{aligned}$$

注:(14a)式也可以本国货币计价的现金流量表示如下:

$$f(S_T, X_T, T) = \max[X_T S_T - K, 0]$$

而后进行各项偏微分,再代入(9)也可获得相同的(15)式。

(15)式是风险中立下单一变量  $y_t$  的偏微分方程式,其对应的标的价格随机变动过程为:

$$\frac{dy_t}{y_t} = (r_d - q)dt - (\sigma_S^2 + \sigma_X^2 + 2\sigma_{SX})^{1/2} dW_y \quad (16)$$

因此,(15)式连同下列两个临界条件:

$$g(y_T, T) = \max(y_T - K, 0) \quad (17a)$$

$$g(y_t, t) \geq y_t - K \quad (17b)$$

其余不变。只要能求解  $g(y_t, t)$ ,而后再乘以  $\left(\frac{1}{X_t}\right)$  即是美式第二类型汇率连动买权的评价  $\left[\left(\frac{1}{X_t}\right)g(y_t, t) = f(S_t, X_t, t)\right]$ 。

若要以二元树评价,则计算  $y_t$  二元树的参数为:

$$u = e^{\sigma_S^* \sqrt{\Delta t}}$$

$$\sigma_S^* = (\sigma_S^2 + \sigma_X^2 + 2\sigma_{SX})^{1/2}$$

$$d = 1/u$$

$$p = \frac{e^{r_d \Delta t} - d}{u - d} \quad (\text{股利率为 } q, \text{由(16)得知, } r_d \text{ 为无风险(折现)利})$$

率,由(15)的左边得知)

于建立二元树后,再求解该美式买权。详见 Chriss(1997, pp. 251—260),如何在现金股利下建立二元树:以  $r_d$  作为风险利率。

注:若求解美式第二类型卖权时,其临界条件应改为:

$$g(y_T, T) = \max(K - S_T, 0)$$

$$g(y_t, t) \geq K - S_t$$

其余不变。

## 五、美式第三类型汇率连动买权(或卖权)

其到期日现金流量为:

$$f(S_T, K, T) = \bar{X} \max(S_T - K, 0) \quad (18a)$$

$\bar{X}$  = 期初约定的固定汇率

在到期前任何时间  $t$  的提前履约条件为:

$$f(S_t, K, t) \geq \bar{X}(S_t - K) \quad (18b)$$

根据(18a)及(18b),我们可改写该美式买权的价格为:

$$f(S_t, K, t) = \bar{X} g(S_t, t) \quad (18c)$$

只要能求解出  $g(S_t, X)$ ,而后再乘以  $\bar{X}$  即可获得该美式买权的价格。而且  $g(S_t, t)$  与汇率无关。因此在(9)式中,只要涉及  $X_t$  的项目都以零来处理。此外,其相关的偏微分项计算如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \bar{X} \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial S_t} = \bar{X} \frac{\partial g}{\partial S_t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = \bar{X} \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2}$$

将以上之偏微分代入(9)式获得:

$$r_d(\bar{X}g) = \bar{X} \frac{\partial g}{\partial t} + \bar{X} \frac{\partial g}{\partial S_t} S_t (r_f - \sigma_{sx} - q) + \frac{1}{2} \bar{X} \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma_s^2$$



$$\therefore r_d g = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial S_t} S_t (r_f - \sigma_{SX} - q) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 g}{\sigma S_t^2} S_t^2 \sigma_S^2 \quad (19a)$$

(19a)式可改写为:

$$r_d g = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial S_t} S_t (r_d - q^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma_S^2 \quad (19b)$$

$$\text{此处: } q^* = r_d - r_f + \sigma_{SX} + q \quad (19c)$$

= 在单一变量  $S_t$  环境下调整后的股利率

(19b)式是风险中立下单一变量  $S_t$  的偏微分方程式,其对应的标的价格随机变动过程为:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_d - q^*)dt + \sigma_S dZ \quad (20)$$

此处:标的物支付的股利率为  $q^*$ ,而不是  $q$ 。

因此,(19b)式连同下列两个临界条件:

$$g(S_T, T) = \max(0, S_T - K) \quad (21a)$$

$$g(S_t, t) \geq S_t - K \quad (21b)$$

可用来求解  $g(S_t, t)$ ,而后再乘以  $\bar{X}$  即是美式第三类型汇率连动买权的评价 [ $\bar{X}g(S_t, t) = f(S_t, K, t)$ ]。

若以二元树求解时,则计算的参数为:

$$u = e^{\sigma_S \sqrt{\Delta t}} \quad (d = 1/u)$$

$$p = \frac{e^{r_d \Delta t} - d}{u - d}$$

此外,  $q^* = r_d - r_f + \sigma_{SX} + q$  为调整后的标的物连续股利率,详见 Chriss (1997, pp. 251—260),如何在分布股利下建立二元树。

注:若求解美式(第三类型)卖权时,其临界条件应改为:

$$g(S_T, T) = \max(0, K - S_T)$$

$$g(S_t, t) \geq K - S_t$$

## 六、美式第四类型汇率连动买权(或卖权)

其到期口现金流量为:

$$f(S_T, X_T, T) = S_T \max(X_T - K, 0) \quad (22a)$$

此处:  $K =$  履约汇率。

到期前提前履约条件为:

$$f(S_t, X_T, t) \geq S_t(X_t - K) \quad (22b)$$

根据(22a)及(22b),我们可改写该美式买权的价值为:

$$f(S_t, X_T, t) = S_t g(X_t, t) \quad (22c)$$

故可先求解  $g(X_t, t)$ , 而后再乘以  $S_t$  即是该美式买权的价格。相关的偏微分求解如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= S_t \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial X_t} = S_t \frac{\partial g}{\partial X_t}, \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} = S_t \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2} \\ \frac{\partial f}{\partial S_t} &= g, \frac{\partial f}{\partial S_t^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial X_t} = \frac{\partial}{\partial X_t}(g) = \frac{\partial g}{\partial X_t} \end{aligned}$$

将上面的各项偏微分代入(9)式获得:

$$\begin{aligned} r_d(S_t g) &= S_t \frac{\partial g}{\partial t} + g S_t (r_f - \sigma_{SX} - q) + S_t \frac{\partial g}{\partial X_t} X_t (r_d - r_f) \\ &\quad + \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2} S_t \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 + \frac{\partial g}{\partial X_t} X_t S_t \sigma_{SX} \end{aligned}$$

除以  $S_t$  并整理后获得:

$$\begin{aligned} (r_d - r_f + \sigma_{SX} + q)g &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial X_t} X_t (r_d - r_f + \sigma_{SX}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \end{aligned} \quad (23)$$

(23)式是风险中立下单一变量  $X_t$  的偏微分方程式,其对应的汇率随机变动过程为:

$$\begin{aligned}\frac{dX_t}{X_t} &= (r_d - r_f + \sigma_{SX})dt + \sigma_X dW_X \\ &= [(r_d - r_f + \sigma_{SX} + q) - q]dt + \sigma_X dW_X\end{aligned}\quad (24)$$

此外,由(23)可知,在该单一变量  $X_t$  环境下的无风险(折现)利率为  $(r_d - r_f + \sigma_{SX} + q)$ 。因此,(23)式连同下列两个临界条件:

$$\begin{aligned}g(X_T, T) &= \max(X_T - K, 0) \\ g(X_t, t) &\geq (X_t - K)\end{aligned}$$

可用来求解  $g(X_t, t)$ ,而后再乘以  $S_t$  即得美式第四类型买权的评价  $[S_t g(X_t, t) = f(S_t, K, t)]$ 。

若以二元树求解时,建立汇率二元树的参数如下:

$$u = e^{\sigma_X \sqrt{\Delta t}} \quad (d = 1/u)$$

$$p = \frac{e^{r^* \Delta t} - d}{u - d}$$

$$r^* = r_d - r_f + \sigma_{SX} + q = \text{无风险利率(不可单独只用 } r_d \text{ 或 } r_f)$$

注:求解美式第四类型卖权时,其临界条件应改为:

$$\begin{aligned}g(X_T, T) &= \max(K - X_T, 0) \\ g(X_t, T) &\geq K - X_t\end{aligned}$$

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, p. 637—659.
- J. N. Bodurtha, and G. R. Courtadon (1987). "Tests of an American Option Pricing Model on the Foreign Currency Options Market", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 2, p. 153—167.
- Pp. Boyle, (1988). "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, 1, p. 1—12.

- N. A. Chriss, *Black-Scholes and Beyond: "Option Pricing Models"*, Irwin Professional Publishing (1997).
- J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Options Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, p. 229—264.
- E. Derman, , P. Karasinski, and J. S. Wecker (1990). *International Equity Strategies*, June, Goldman Sachs.
- A. Dravid, M. Richardson, and T. Sun (1993). "Pricing Foreign Index Contingent Claims: An Application to Nikkei Put Warrants", *The Journal of Derivatives*, Fall, p. 33—51.
- M. B. Garman, and S. W. Kohlhagen (1983). "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2, p. 231—237.
- J. O. Grabbe, (1983). "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and Finance*, 2, p. 239—253.
- J. M. Harrison and S. R. Pliska (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, p. 215—260.
- E. Reiner, (1992). "Quanto Mechanics", *Risk*, March, p. 59—63.
- M. Rubinstein, (1991). "Two into One", *Risk*, May.
- J. Z. Wei, (1997). "Valuing Derivatives Linked to Foreign Assets", Chapter 5, *Frontiers in Derivatives*. Edited by A. Konishi and R. Dattatreya, Irwin Professional Publishing.

## 第十八章 平均汇率选择权

### 一、简介

在汇率避险方面,有些公司只要能够确保平均汇率能在某一水准之上或之下,即可达到无汇兑的损失,不影响成本,因此,在汇率避险时,要求以平均汇率计算。以欧式平均汇率买权(European Average-Rate Call Options)而言,若在到期时,平均汇率高于履约汇率,则避险者(或买权持有人)可获利,并可抵消外汇短部位的损失。而欧式平均卖权则可保护避险者消除汇率下跌低于平均汇率的损失。因平均汇率的波动度低于汇率本身的波动度,因此,平均汇率选择权的权利金(或成本)低于(单一)汇率选择权的权利金。因此,采用平均汇率选择权的避险成本较低。

因平均汇率的概率分布不是对数正态分布,因此,对平均汇率选择权的评价无法诉诸于公式解(或封闭解)。一般以近似解替代,简述如下:

1. Monte Carlo 模拟测试:很费时,成本高[Boyle (1977), Kemna and Vorst (1990), Corwin, Boyle and Tan (1996)]。

2. 二元树解 [Binomial Trees & Lattices, Hull and White (1993), Neave and Turnbull (1993)]。

3. 偏微分方程式方法(The PDE Approaches)。Dewynne and Wilmott (1995), Alziary, Decamps, and Koehl (1997)。

4. 近似公式解(Turnbull and Wakeman (1991), Vorst (1992))。

以上的评价方法中,近似公式解最简单,成本最低。只要近似公式

解的准确度合理,则在实用方面会比其他方法优异。此外,由近似公式解,避险参数(Delta, Gamma, Vega)的公式解也可获得,对即时风险控制管很有用处。在近似公式解方法中,Turnball 及 Wakeman (1991)利用统计理论的 Edgeworth 数列(Edgeworth Series)将算术平均的概率分布加以展开,而后以对数正态分布加以逼近,求解平均选择权的价值。但 Levy (1992)采用更直接的方法,以对数正态分布来近似算术平均的概率分布(或称 Wilkinson Approximation),而后求解算术平均选择权的封闭式评价模型。其方法准确,且在实务上计算容易。在本章我们将介绍此种方法。算术平均选择权也称为亚洲选择权(Asian Options)。

## 二、算术平均选择权的平价关系(Put-Call Parity)

首先令  $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$  为  $(n+1)$  个观察时点,其对应观察汇率(或股价)为  $S(t_0), S(t_1), \cdots, S(t_n)$ 。则在时间  $t$  已知(或已实现)的平均值为

$$\bar{S}_t = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) \quad (1)$$

此处:  $t_m \leq t, 0 \leq m \leq n$  若  $t < t_0, \bar{S}_t = 0$

根据(1)的定义,在到期时  $t_n$  的平均值为:

$$\bar{S}_T = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S(t_i) \quad (2)$$

在时间  $t$ , 平均值  $\bar{S}_t$  内的汇率  $S(t_0), S(t_1), \cdots, S(t_m)$  已实现,因此已经知道,故我们可将  $\bar{S}_t$  折解成两部分:一部分为已知的平均值,另一部分则是未来尚未实现的平均值(仍呈现随机行为),表示如下:

$$\bar{S}_t = \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i)}_{\text{已知部分}} + \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^n S(t_i)}_{\text{未知部分}} \quad (3)$$

未实现的平均值可另行表示为:

$$m(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=m-1}^n S(t_i) = \bar{S}_T - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) \quad (4)$$

外汇平均买权的到期现金流量为:

$$C_T = \max(\bar{S}_T - K, 0) = \max[m(t) - K^*, 0] \quad (5)$$

此处:  $K$  为履约汇率

$$K^* = K - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i)$$

外汇平均卖权的到期现金流量为:

$$P_T = \max(K - \bar{S}_T, 0) = \max[K^* - m(t), 0] \quad (6)$$

平均选择权的评价关系证明如下:

假设组合甲包括:持有一单位的平均汇率  $\bar{S}_t$  及一单位的平均汇率卖权  $P_t$ , 并借款  $e^{-r\tau}K$ ,  $\tau = T-t$ ; 组合乙包括:持有一单位的平均汇率买权  $C_t$ 。则在到期时( $t_n$ )两组合的价值计算如下:

$$\begin{array}{ll} \text{组合} & \begin{array}{l} \bar{S}_T \geq K \\ \bar{S}_T < K \end{array} \\ \text{甲} & \begin{array}{l} \bar{S}_T + \max(K - \bar{S}_T, 0) - K \\ = \bar{S}_T + 0 - K = \bar{S}_T - K \end{array} \\ & \begin{array}{l} \bar{S}_T + (K - \bar{S}_T) - K = 0 \end{array} \\ \text{乙} & \begin{array}{l} \max(\bar{S}_T - K, 0) = \bar{S}_T - K \\ \therefore \text{甲} = \text{乙} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \\ \therefore \text{甲} = \text{乙} \end{array}$$

因此,为避免无风险套利的存在,在任何时刻下平均汇率的买卖权平价关系应成立如下:

$$C_t = \bar{S}_t + P_t - Ke^{-r\tau} \quad (7a)$$

或

$$C_t - P_t = \bar{S}_t - Ke^{-r\tau} \quad (7b)$$

买卖权的价差  $(\bar{S}_t - Ke^{-r\tau})$  可以另一方式表示如下:

$$C_t - P_t = e^{-r\tau} \left\{ \frac{m+1}{n+1} \bar{S}_t + \frac{S_t e^{\lambda(t_m+h-t)}}{n+1} \frac{1 - e^{\lambda(n-m)h}}{1 - e^{\lambda h}} - K \right\} \quad (8)$$

此处:  $\lambda = r - r_f$  (两国利率差距)

$r_f$  = 外国无风险利率

$h = t_i - t_{i-1}$  = 分割时段间距

$S_t$  = 在时间  $t$  的汇率(每单位外币的本国货币价值)

$t_{m-1} < t \leq t_m, \tau = t_n - t$

若  $t < t_0$ , 则(8)成为

$$C_t - P_t = e^{-r_f \tau} \left\{ \frac{S_t e^{\lambda(t_0 + h - t)}}{n+1} \frac{1 - e^{\lambda(n-m)h}}{1 - e^{\lambda h}} = K \right\} \quad (9)$$

证明

令组合  $A$  包括一单位长部位的(平均汇率)买权及一单位短部位的(外汇平均)卖权。则组合  $A(C_t - P_t)$  的到期价值可由(7b)表示如下:

$$C_t - P_t = \bar{S}_\tau - K = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) - K \quad (10)$$

在时间  $t(t \leq t_m, 0 \leq m \leq T)$ , 未来即期汇率  $S(t_i), i = m+1, m+2, \dots, t_n$ , 为未知数。为规避汇率风险, 在时间  $t$  应分别出售  $e^{-r(t_n - t_i)} / (n+1)$  单位的远期契约, 其到期日分别为  $t_i, i = m+1, m+2, \dots, t_n$ 。这些远期契约的避险交易值为零(在时间  $t$ )。则在日后每一到期日  $t_i, e^{-r(t_n - t_i)} / (n+1)$  单位的远期契约交割价值为

$$\frac{e^{-r(t_n - t_i)}}{n+1} [F_t(t_i) - S(t_i)] \quad (11)$$

此处:  $F_t(t_i)$  = 在时间  $t$  的远期汇率、到期日为  $t_i$

$$= e^{(r-r_f)(t_i - t)} S(t) \quad (12)$$

$S(t_i)$  = 在(未来)时间  $t_i$  的即期汇率

这些远期契约所有交割价值的现值(在时间  $t$  的价值应为零), 即是公式(11)总和之现值:

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^n [F_t(t_i) - S(t_i)] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^n [e^{(r-r_f)(t_i - t)} S(t) - S(t_i)] \quad (\text{利用(12)}) \end{aligned} \quad (13)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{S(t)}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e^{(r-f)(t_i-t)} - \frac{1}{n+1} \sum_{i=m+1}^n S(t_i) \\
&= \frac{S(t)}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e^{(r-f)(t_i-t)} - \left( \bar{S}_T - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) \right) \quad (\text{利用(3)}) \\
\therefore \bar{S}_T &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) + \frac{S(t)}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e^{(r-f)(t_i-t)} \quad (14)
\end{aligned}$$

将(14)代入买权及卖权的到期E价差公式(9)获得:

$$C_T - P_T = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) + \frac{S(t)}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e^{(r-f)(t_i-t)} - K \quad (15)$$

在风险中立及无套利下,该价差(15)在任何一时点 $t(0 < t < t_n)$ 即是平均汇率买权及卖权的平价关系:

$$C_t - P_t = e^{-r\tau} \left\{ \frac{m-1}{n+1} \bar{S}_t + \frac{S(t)}{n+1} \sum_{i=m+1}^n e^{(r-f)(t_i-t)} - K \right\} = V_t \quad (16)$$

(利用(1) 及  $\tau = t_n - t$ )

其实,公式(16)的右边代表在时间 $t$ 我们所建立避险组合的价值。我们将以 $V_t$ 代表它。 $V_t$ 内的第二项可进一步简化,以利计算如下:

重写:

$$\sum_{i=m+1}^{t_n} e^{(r-f)(t_i-t)} = e^{-\lambda t} \sum_{i=m+1}^{t_n} e^{\lambda t_i} \quad (\lambda = r - r_f) \quad (17a)$$

令

$$X = \sum_{i=m+1}^{t_n} e^{\lambda t_i} = \sum_{i=0}^{n-m-1} e^{\lambda(t_{m+1} + ih)} \quad (t_i = t_{m+1} + ih) \quad (17b)$$

$$\therefore e^{\lambda n} X = \sum_{i=1}^{n-m} e^{\lambda(t_{m+1} + ih)} \quad (17c)$$

$$X - e^{\lambda h} X = e^{\lambda t_{m+1}} - e^{\lambda(t_{m+1} + (n-m)h)}$$

(= (a) 的第一项减(b) 的最后一项)

$$\begin{aligned}
X(1 - e^{\lambda h}) &= e^{\lambda(t_m + h)} - e^{\lambda[(t_m + h) + (n-m)h]} \\
&= e^{\lambda(t_m + h)} [1 - e^{\lambda(n-m)h}]
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=m+1}^{t_0} e^{\lambda t_i} = X = \frac{e^{\lambda(t_m+h)} [1 - e^{\lambda(n-m)t}]}{1 - e^{\lambda h}} \quad (t_{m-1} = t_m + h) \quad (18)$$

将(18)代入(17a),而后再代入(16)即是公式(8)的买卖权平价关系。  
若  $t < t_0$ , 则  $t_m = t_0$ , (8)变成(9)。

### 三、评价模型

我们首先求解欧式平均汇率买权的评价模型。令汇率的变动随机过程是几何布朗过程(Geometric Brownian Motion)如下:

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dW, \quad \alpha = r - r_f \quad (19)$$

此处:  $S$  代表每一外币单位的本国货币价值(即期汇率)

由(18), 汇率本身的变动过程为:

$$S_t = S \exp[(r - r_f - \sigma^2/2)t + \sigma W_t] \quad (W_0 = 0) \quad (20)$$

则  $\ln S_t$  是正态分布, 其期望值为  $\ln S + (r - r_f - \sigma^2/2)t$ , 方差为  $\sigma^2 t$ 。

在风险中立下, 买权的价值是未来期望现金流量的现值, 以公式表示如下:

$$\begin{aligned} C &= e^{-rt} E[\max(\bar{S}_T - K, 0)] \\ &= e^{-rt} E[\max(m(t) - K^*, 0)] \end{aligned} \quad (21)$$

此处:

$$K^* = K - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m S(t_i) = K - \frac{\bar{S}_t(m+1)}{n+1} \quad (22)$$

$m(t)$  = 尚未实现的平均值, 是随机变量

要求解(21)内的期望值, 我们必须首先知道  $m(t)$  的真正概率分布。  
 $m(t)$  是  $(n-m+1)$  个相关的(Correlated)股价之平均值, 其概率分布是  $(n-m+1)$  个对数正态变量之和(或平均数)。对数正态变量之和并无公式解(或封闭解)的概率分布。因此, 我们无法由(21)直接求解

期望值。但可以近似概率分布的方法求解。由统计学的理论及实证得知,对数正态变量之和的概率分布可寻找另一个已知的对数正态分布来替代(或逼近),并可获得合理的近似值。因此,我们可令  $\ln m(t)$  的概率分布为正态分布,其期望值为  $\mu(t)$ ,且方差为  $v(t)^2$ 。然后根据对数正态分布的性质求解  $\mu(t)$  及  $v(t)$ 。由数理统计得知,若  $m(t)$  是对数正态分布,则其动差  $m_i$  可表示为:

$$m_i = E[m(t)^i] = e^{i\mu(t) + \frac{1}{2}i^2v(t)^2} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

令  $i = 1$  及  $2$ , 则

$$\text{第一动差: } m_1 = e^{\mu(t) + \frac{1}{2}v(t)^2} [= E(m(t))]$$
 (23a)

$$\text{第二动差: } m_2 = e^{2\mu(t) + 2v(t)^2} [= E(m(t)^2)]$$
 (23b)

由(23a)及(23b)求解  $\mu(t)$  及  $v(t)$ :

$$\mu(t) = 2\ln E(m(t)) - \frac{1}{2}\ln E(m(t)^2)$$
 (24a)

$$v(t)^2 = \ln E(m(t)^2) - 2\ln E(m(t))$$
 (24b)

此处:  $\mu(t) = E(\ln m(t))$  及  $v(t)^2 = \text{Var}(\ln m(t))$

一旦  $\mu(t)$  及  $v(t)^2$  求解后,我们可回到(21)求解平均汇率买权的评价,并利用 Black-Scholes 模型求解之,如下:

$$\begin{aligned} C &= e^{-rt} E[\max(m(t) - K^*, 0)] \\ &= m_0(t) N(d_1) - K^* e^{-rt} N(d_2) \\ &\quad (m_0(t) \text{ 代表在时间 } t \text{ 时 } m(t) \text{ 的价值(现值)}) \\ &= e^{-rt} [e^{rt} m_0(t) N(d_1) - K^* N(d_2)] \\ \therefore C &= e^{-rt} [E(m(t)) N(d_1) - K^* N(d_2)] \end{aligned}$$
 (25)

此处:

$$\begin{aligned} E(m(t)) &= e^{rt} m_0(t) \\ d_1 &= \frac{\ln[E(m(t))/K^*] + v^2(t)/2}{v(t)} \\ &= \frac{\mu(t) + v^2(t) - \ln K^*}{v(t)} \end{aligned}$$
 (26a)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v(t)} \left[ -\ln K^* + 2\ln E(m(t)) - \frac{1}{2} \ln E(m(t)^2) \right. \\
&\quad \left. + \ln E(m(t)^2) - 2\ln E(m(t)) \right] \\
&= \frac{1}{v(t)} \left[ \frac{1}{2} \ln E(m(t)^2) - \ln K^* \right] \quad (26b)
\end{aligned}$$

$$d_2 = d_1 - v(t) \quad (27)$$

平均汇率卖权可根据买权及卖权平价关系(7)求解如下:

$$\begin{aligned}
P_t &= e^{-rt} E[\max(K - \bar{S}_T, 0)] \\
&= e^{-rt} E[\max(K^* - m(t), 0)]
\end{aligned}$$

根据平价关系(7):

$$\begin{aligned}
P_t &= C_t - m_0(t) + e^{-rt} K^* \\
&= e^{-rt} [E(m(t))N(d_1) - K^*N(d_2)] - m_0(t) + e^{-rt} K^* \\
&= e^{-rt} [E(m(t))N(d_1) - K^*N(d_2) - e^{rt}m_0(t) + k^*] \\
\therefore P_t &= e^{-rt} [E(m(t))(N(d_1) - 1) - K^*(N(d_2) - 1)] \quad (28)
\end{aligned}$$

另一方式求解  $P_t$  可根据(25), 将(25)内  $E(m(t))$ ,  $K^*$ ,  $d_1$  及  $d_2$  的正负符号对调亦可获得(28)如下:

$$\begin{aligned}
P_t &= e^{-rt} [-E(m(t))N(-d_1) + K^*N(-d_2)] \\
&= e^{-rt} [E(m(t))(N(d_1) - 1) - K^*(N(d_2) - 1)]
\end{aligned}$$

此处:  $N(-d_1) = 1 - N(d_1)$ 。

## 参 考 文 献

- B. Alziary, J. Decamps, and P. Koehl, "A P. D. E. Approach to Asian Options: Analytical and Numerical Evidence", *Journal of Banking and Finance*, 21 (1997), p. 613—640.
- P. Boyle, "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4(1977), p. 323—338.
- A. Carverhill, and L. Clewlow, "Flexible Convolution", *RISK*, 5 (April 1990), p. 25—29.

- J. Corwin, P. Boyle, and K. Tan, "Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance", *Management Science*, 42 (June 1996), p. 926—938.
- J. Dewynne, and P. Wilmott, "Asian Options and Linear Complementarity Problems", *Advances in Futures and Options Research*, 8, (1995), p. 145—173.
- J. Hull, and A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path Dependent Options", *Journal of Derivatives*, 1 (Fall 1993), p. 21—31.
- I. Karatzas, and S. E. Shreve, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", 2nd ed. New York, NY: Springer-Verlag (1992).
- A. Kemna, and A. Vorst, "A Pricing Method for Options Based on Average Values", *Journal of Banking and Finance*, 14(1990), p. 113—129.
- E. Levy, "Pricing European Average Rate Currency Options", *Journal of International Money and Finance*, 11(1992), p. 474—491.
- E. Levy, and S. Turnbull, "Average Intelligence", *RISK*, 5 (Feb. 1992), p. 53—59.
- S. Turnbull, and L. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (1991), p. 377—389.
- T. Vorst, "Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options", *International Review of Financial Analysis*, 1(3,1992), p. 179—193.
- "Averaging Options", In *The Handbook of Exotic Options*, L. Nelken, ed. Homewood, IL: Irwin (1996), p. 175—199.

## 第十九章 亚洲选择权：倒数 Gamma 概率分布及封闭解模型

### 一、简介

亚洲选择权的标的价格是标的股的算术平均价格,而不是标的股到期时的单一价格。在 Black-Scholes 环境下,标的股的价格是假设对数正态分布(或 Geometric Brownian Motion)。标的股的算术平均价是对数正态变量(相等权值)之和。对数正态变量之和的概率分布并不呈现对数正态分布。因此,我们无法利用 Black-Scholes 的方法来评价亚洲选择权。而且,评价也很困难,无法获得确切封闭解。过去已有许多文献提出评价亚洲选择权的数值分析方法,诸如利用 Monte Carlo 模拟,二项式模型,偏微分法等等。这些数值方法都是很复杂且费时;同时,避险参数(Delta, Gamma, Vega)根本无公式解,在风险控管方面很不适合。有鉴于此,有些学者诸如 Turnbull and Wakeman (1991), Levy (1992), Vorst (1992,1996)均有试图推导出近似封闭解的评价模型,其评价准确性也不差,且对避险参数也提供了方便的公式解。

最近,Milesky 及 Posner (1998a)提供另一种较准确的封闭解模型。他们首先证明对数正态变量(相等权值)之和的极限概率分布是倒数 Gamma 概率分布(The Reciprocal Gamma Distribution)。在有限时间下(A Finite Time Period),该相等权值之和的概率分布可以倒数 Gamma 概率分布来代表,而后亚洲选择权之价值是未来到期时现金流量期望值的现值(在风险中立下)。期望值是以倒数 Gamma 概率分布

来计算。因此,亚洲选择权的评价可以封闭解公式来代表,而且选择权的 Delta 及 Gamma 也可以简易的公式来计算,甚是方便。Milesky 及 Posner(1999)的实证结果证明他们的方式在计算方面更快,且其准确性至少不比以前已发表的方法低;在许多的情况下都显示比较准确。在本章中我们将详细介绍该评价模型。

## 二、股价算术平均值的定义及性质

首先我们假设,在风险中立下,股价的变动过程是几何布朗运动(Geometric Brownian Motion):

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

此处: $S_t$  代表在时间  $t$  的股价

$\sigma$  = 标的股报酬率的波动度

$q$  = 连续股利率

$W_t$  = 代表推动股价变动的随机因子

$r$  = 无风险利率

股价的动态变动过程也可以(1)的积分解(Integral Solution)来表示如下:

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right] \quad (2)$$

此处:  $S_0$  = 期初股价,  $W_0 = 0$  期初布朗运动值,设定为零。

假设亚洲选择权的到期日为  $T$ ,在有效期  $T$  内,股价算术价格总和可根据预先固定时点  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n (\leq T)$  的股价计算,表示如下:

$$a_{[t, \tau_j, T]} = \frac{1}{S_t} \sum_{i=j}^n S_{\tau_i} \quad (3)$$

此处:  $a_{[t, \tau_j, T]}$  = 股价算术总和是从大于现在时点  $t$  的第一个时点  $\tau_j$  开始计算至到期日  $T$ 。 $t$  也可能是第一个观察的时点

$\tau_j$  (即  $t = \tau_j$ )。

公式(3)内的股价算术总和〔有  $(n-j+1)$  个价格〕是以现在股价  $S_t$  作为衡量单位(或以  $S_t$  作为计价单位)。

在连续观察股价之下,连续计算股价的算术总和可表示如下:

$$\begin{aligned} a_{[t, \tau]} &= \frac{1}{S_t} \int_t^{\tau} S_u du = \frac{1}{S_t} \int_t^{\tau} S_t \exp \left[ \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) u + \sigma W_u \right] du \\ &= \int_t^{\tau} \exp \left[ \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) u + \sigma W_u \right] du \end{aligned} \quad (4)$$

此处:在连续股价下,(3)内的和  $(\sum)$  变成为积分符号。

根据(3)及(4),我们可分别计算股价算术平均如下:在间断观察时点下,股价平均值为

$$\begin{aligned} A_{[t, \tau_j, \tau]} &= \frac{1}{n-j+1} \sum_{i=j}^n S_{\tau_i} \\ &= \frac{S_t}{n-j+1} a_{[t, \tau_j, \tau]} \quad (\text{利用(3)}) \end{aligned} \quad (5)$$

在连续时间下,股价算术平均值为

$$\begin{aligned} A_{[t, \tau]} &= \frac{1}{T-t} \int_t^{\tau} S_u du = \frac{S_t}{T-t} \int_t^{\tau} \exp \left[ \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) u + \sigma W_u \right] du \\ &= \frac{S_t}{T-t} a_{[t, \tau]} \end{aligned} \quad (6)$$

在现在时点  $t$  之前的股价算术平均已知(因已实现),但在  $t$  之后的平均值是尚未实现,因此是未知。故股价算术总和可分解成两部分,表示如下:

$$a_{[0, \tau_{j-1}, \tau]} = \frac{t}{T} a_{[0, \tau_{j-1}, t]} + \frac{T-t}{T} a_{[0, \tau_j, \tau]} \quad (7)$$

此处:0 代表算术平均计算的起点为零点,现在时点  $t$  介于  $\tau_{j-1}$  及  $\tau_j$  之间(即  $t_{j-1} < t < \tau_j$ )。因此时点  $t$  以前的算术(平均)总和已实现,以  $a_{[0, \tau_{j-1}, \tau]}$  表示。但  $t$  以后的算术(平均)总和从  $\tau_j$  起尚未实现,以  $a_{[0, \tau_j, \tau]}$  表示。



在连续时间下, 股价算术平均数的期望值(或称第一动差)可经由公式(6)求解如下:

$$\begin{aligned}
 E[A_{[t, T]}] &= \int_{\Omega} A_{[t, T]} dQ \quad (Q \text{ 代表 Brownian Motion (1) 的概率测度}) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{S_t}{T-t} \int_t^T \exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t) + \sigma \Delta W_u\right] du dQ \\
 &\quad (\text{利用(5)及(4), 再利用 Fubini 定理的积分顺序可互换性, 获得下等式, 详见 Arnold(1974, P. 15)}) \\
 &= \frac{S_t}{T-t} \int_t^T e^{(r-q-\sigma^2/2)(u-t)} \left( \int_{\Omega} e^{\sigma \Delta W_u} dQ \right) du \\
 &\quad (\Delta W_u = W_u - W_t) \\
 &= \frac{S_t}{T-t} \int_t^T e^{(r-q-\sigma^2/2)(u-t)} e^{\sigma^2(u-t)/2} du \\
 &\quad \left( \text{此处因 } \Delta W_u \sim N(0, (u-t)) \Rightarrow \int_{\Omega} e^{\sigma \Delta W_u} dQ = e^{\sigma^2(u-t)/2} \right) \\
 &= \frac{S_t}{T-t} \int_t^T e^{(r-q)(u-t)} du = \frac{S_t}{T-t} \left[ \frac{e^{(r-q)(u-t)}}{r-q} \right]_t^T \\
 &= \frac{S_t}{(T-t)(r-q)} [e^{(r-q)(T-t)} - 1]
 \end{aligned}$$

所以

$$E[A_{[t, T]}] = \begin{cases} \frac{S_t [e^{(r-q)(T-t)} - 1]}{(T-t)(r-q)}, & r \neq q \\ S_t, & r = q \text{ (见以下证明)} \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

公式(8)的算术平均值的期望值成立条件为  $r \neq q$ 。但若  $r = q$  时, 则其期望值应以微分法则 L'Hopital Rule 求解如下:

令  $r - q = b$ , 则(8)的右边(RHS)为:

$$\begin{aligned}
 RHS &= \frac{S_t (e^{b(T-t)} - 1)}{(T-t)b} \quad (\text{当 } r = q, \text{ 即是 } b \rightarrow 0, \text{ 上下分子及分母接} \\
 &\quad \text{近零, 则先对分子及分母的 } b \text{ 微分}) \\
 &= \frac{S_t (e^{b(T-t)} (T-t))}{(T-t) \cdot 1} = \frac{S_t (T-t)}{T-t} \\
 &= S_t (\text{当 } b \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

故当  $r = q$ ,

$$E[A_{[t, \tau]}] = S_t$$

至于股价算术平均值的第二动差可以上面类似的方法求解,但因在本文中,并不用到,故省略之。可参见 Milesky 及 Posner(1999)的公式(8)。

### 三、Gamma 与倒数 Gamma 概率分布的关系

Gamma 概率分布函数的定义如下:

$$f(x | \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

此处:  $x = \text{Gamma 随机变量}, \alpha > 0, \beta > 0$

$$\Gamma(\alpha) = \text{Gamma 函数} = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy,$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \quad (\text{当 } \alpha > 1) \\ &= (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2) = (\alpha-1)! \end{aligned}$$

累积 Gamma(概率)分布  $F(x|\alpha, \beta)$  是

$$F(x | \alpha, \beta) = \int_0^x f(u | \alpha, \beta) du \quad (x \text{ 是一常数}(x > 0)) \quad (11)$$

该累积概率(11)可经由 IMSL (International Mathematical and Statistical Library)或其他统计电脑软体计算)。

Gamma 及倒数 Gamma 概率分布的对等关系证明如下:

$$1. F(x | \alpha, \beta) = F(x/\beta | \alpha, 1) \quad (12)$$

$$2. f(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} f(x/\beta | \alpha, 1) \quad (13)$$

$$3. f(x | \alpha, \beta) = \frac{x}{\beta(\alpha-1)} f(x | \alpha-1, \beta), \quad \forall \alpha > 1 \quad (14)$$

证明(12)如下:

$$\begin{aligned}
 F(x | \alpha, \beta) &= \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} X^{\alpha-1} e^{-X/\beta} dX \\
 &= \int_0^{x/\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (y\beta)^{\alpha-1} e^{-y} \beta dy \quad (\text{令 } y = X/\beta) \\
 &= \int_0^{x/\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)1^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = F(y | \alpha, 1) \\
 &= F(x/\beta | \alpha, 1)
 \end{aligned}$$

证明(13)如下:

$$\begin{aligned}
 f(x | \alpha, \beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \\
 &= \frac{1}{\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)1^\alpha} (x/\beta)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)/1} \quad (y = x/\beta) \\
 &= \frac{1}{\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)1^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y/1} = \frac{1}{\beta} f(x/\beta | \alpha, 1) \\
 &\quad \left( \text{此处 } f(x/\beta | \alpha, 1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)1^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y}, y = x/\beta \right)
 \end{aligned}$$

证明(14)如下:

$$\begin{aligned}
 f(x | \alpha, \beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \\
 &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \cdot \beta\beta^{\alpha-1}} x^{(\alpha-1)-1} x e^{-x/\beta} \\
 &= \frac{x}{\beta(\alpha-1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\beta^{\alpha-1}} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} \quad (\alpha > 1) \\
 &= \frac{x}{\beta(\alpha-1)} f(x | \alpha-1, \beta) \\
 &\quad \left( \text{此处 } f(x | \alpha-1, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\beta^{\alpha-1}} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} \right)
 \end{aligned}$$

以上 3 种对等关系(12),(13)及(14)证明后,累积倒数 Gamma 概率分布  $Fr(y|\alpha, \beta)$  可表示如下:

$$\begin{aligned}
 F_r(y | \alpha, \beta) &= P_r(Y \leq y), Y = 1/X, y = 1/x \\
 &\quad (\text{即 Gamma 变量 } x \text{ 的倒数})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P_r(1/Y \geq 1/y) = P_r(X \geq x) = 1 - P_r(X \leq x) \\
 &= 1 - F(x | \alpha, \beta) \quad (= 1 - (11)) \quad (15)
 \end{aligned}$$

倒数 Gamma 概率分布的求解可对(15)微分(对  $y$  微分):

$$\begin{aligned}
 f_r(y | \alpha, \beta) &= \frac{\partial}{\partial y} F_r(y | \alpha, \beta) = - \frac{\partial}{\partial y} F(x | \alpha, \beta) \\
 &= - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x f(x | \alpha, \beta) dx = - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{1/y} f(x | \alpha, \beta) dx \\
 &= - \left[ f(1/y | \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \right) \right] = \frac{f(1/y | \alpha, \beta)}{y^2} \\
 \therefore f_r(y | \alpha, \beta) &= \frac{f(1/y | \alpha, \beta)}{y^2} \quad (16)
 \end{aligned}$$

故倒数 Gamma 概率分布是 Gamma 概率分布  $f(1/y | \alpha, \beta)$  除以  $y^2$ ;  $y$  是倒数 Gamma 变量 ( $y = 1/x$ )。

注:(16)也可由(10)以转换变量法求解如下:

令  $y = 1/x$ , 则

$$dy = (-1/x^2) dx \Rightarrow \left| \frac{dx}{dy} \right| = x^2 = 1/y^2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f_r(y | \alpha, \beta) &= f(x | \alpha, \beta) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= f(1/y | \alpha, \beta) | 1/y^2 | = \frac{f(1/y | \alpha, \beta)}{y^2}
 \end{aligned}$$

一旦倒数 Gamma 概率分布求解后, 倒数 Gamma 变量  $Y = (1/X)$  的第  $i$  个动差  $m_i$  就可藉由 Gamma 概率分布(10)求解如下:

$$\begin{aligned}
 m_i &= E(Y^i) \\
 &= \frac{1}{\beta^i (\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - i)} \quad (\alpha > i, i = 1, 2, \cdots) \quad (17)
 \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}
 m_i &= E(Y^i) = E(1/x^i) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{(\alpha-i)-1} e^{-x/\beta} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha-i)}{\Gamma(\alpha) \beta^i} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha-i) \beta^{\alpha-i}} x^{(\alpha-i)-1} e^{-x/\beta} dx}_{\text{等于1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma(\alpha-i)}{\beta^i(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-i)\Gamma(\alpha-i)} \\
 &= \frac{1}{\beta^i(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-i)}
 \end{aligned}$$

第一及第二动差( $m_1$  及  $m_2$ ) 可用来求解参数  $\alpha$  及  $\beta$  如下:

$$\alpha = \frac{2m_2 - m_1^2}{m_2 - m_1^2}, \quad \beta = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1 m_2} \quad (18)$$

证明 由(17):

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{1}{\beta(\alpha-1)} \quad (i=1) \\
 m_2 &= \frac{1}{\beta^2(\alpha-1)(\alpha-2)} \quad (i=2)
 \end{aligned}$$

对上面两式求解  $\alpha$  及  $\beta$  即是(18)。

#### 四、评 价 模 型

Milesky 及 Posner(1998a)首先证明:具有相关的(Correlated)对数正态变量(股价)的无限总和  $a_{[0,T]}$  之极限概率分布是倒数 Gamma 概率分布  $f_r(\cdot | \alpha, \beta)$ 。以公式表示如下:

##### 定理 1

若公式(2)内,  $r - q - \sigma^2/2 < 0$ , 则

$$\begin{aligned}
 a_\infty &= \lim_{T \rightarrow \infty} a_{[0,T]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S_0} \int_0^T S_u du \right] \quad (\text{利用公式(4)}) \\
 &\sim f_r(\cdot | \alpha, \beta)
 \end{aligned} \quad (19)$$

此处:符号  $\sim$  代表无限总和  $a_\infty$  的极限概率分布是倒数 Gamma 概率分布  $f_r(\cdot | \alpha, \beta)$ ,

$$\alpha = \frac{2(q-r)}{\sigma^2} + 1, \quad \beta = \sigma^2/2 \quad (20)$$

定理 1 的结果也可以单纯的概率来表示如下:

$$\begin{aligned}
P_r(a_\infty \geq c) &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_r(a_{[0, T]} \geq c) \quad (c \text{ 是一常数}, c > 0) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} P_r\left(\frac{1}{a_{[0, T]}} \leq \frac{1}{c}\right) \\
&\quad (\text{此处 } 1/a_{[0, T]} \text{ 是 Gamma 变量}) \\
&= F(1/c \mid \alpha, \beta) \\
&= \int_0^{1/c} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\
&\quad (\alpha \text{ 及 } \beta \text{ 的定义是(20)})
\end{aligned} \tag{21}$$

也就是,无限总和  $a_\infty$  大于某一常数  $c$  的概率刚好等于累积 Gamma 概率分布(即公式(21)的右边)。

定理 1 的证明冗长,且复杂困难,已超出本书预定的水准,故略之。有兴趣的读者可参阅 Milesky 及 Posner(1998a, p. 418—420)。

定理 1 告诉我们可利用倒数 Gamma 概率分布来评价亚洲选择权。也就是,亚洲选择权到期时的期望现金流量可根据倒数 Gamma 概率分布来求算,而后折现求解亚洲选择权的价值。但亚洲选择权的到期日  $T$  是有限期(不是无限期),而且该选择权算术平均值的观察股价个数  $n$  也是有限(而不是无限)。因此,在有限期的到期日及观察股价的有限个数下,利用倒数 Gamma 概率分布来代表亚洲选择权算术平均值的概率分布是一种近似概率分布。虽是近似概率分布, Milesky 及 Posner(1998b, p. 60)的另一论文已证明:采用倒数 Gamma 概率分布来代表算术平均的概率分布更优于对数正态分布,即更接近算术平均的真正概率分布。Milesky 及 Posner(1998a, b)的实证研究已证明他们的评价模型准确度不比其他方法差。在许多情况下,他们的模型显示更准确,特别是到期日较长的亚洲选择。

一旦我们已知倒数 Gamma 概率分布可用来代表算平均的概率分布,亚洲选择权的评价模型就可顺利完成。以定理 2 表示之。

### 定理 2

在风险中立及无套利机会下,亚洲买权的评权模型为:

1. 当  $A_{[0, T], 1, 0} < (T/t)K$  时(即  $K' > 0$  时,见以下公式)

$$\begin{aligned}
C &= e^{-r(T-t)} E[\max(A_{[t, \tau_j, \tau]} - K, 0)] \\
&= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left[ \frac{1}{\beta(\alpha-1)} F(1/K' | \alpha-1, \beta) - K' F(1/K' | \alpha, \beta) \right]
\end{aligned} \quad (22)$$

此处:

$$K' = \frac{TK - tA_{[t, \tau_{j-1}, t]}}{T-t} > 0$$

$$\begin{aligned}
A_{[t, \tau_{j-1}, t]} &= \frac{S_t}{n-j+1} \sum_{i=j}^n S_{\tau_i} \quad [\text{公式(5)}] \\
&(\tau_{j-1} < t < \tau_j)
\end{aligned}$$

2. 当  $A_{[t, \tau_{j-1}, t]} \geq (T/t)K$  时,

$$C = e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left[ \frac{1}{\beta(\alpha-1)} - K' \right] \quad (23a)$$

$$= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \frac{1}{\beta(\alpha-1)} - e^{-r(T-t)} \left[ K - \frac{t}{T} A_{[t, \tau_{j-1}, t]} \right] \quad (23b)$$

证明如下:

首先,我们利用倒数 Gamma 概率分布求解算术平均的期望值:

$$\begin{aligned}
E[A_{[t, \tau_j, \tau]}] &= \int_c^\infty y f_r(y | \alpha, \beta) dy, \quad y = A_{[t, \tau_j, \tau]} \\
&\quad \left( \text{令 } x = 1/y \Rightarrow x \text{ 是 Gamma 变量,} \right. \\
&\quad \text{且 } dx = (-1/y^2) dy \Rightarrow \left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{1}{x^2} \Big) \\
&= \int_c^\infty \left( \frac{1}{x} \right) f_r(y | \alpha, \beta) \left| \frac{dy}{dx} \right| dx \\
&= \int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \right) f(x | \alpha, \beta) dx \\
&\quad \left( \text{因为 } f(x | \alpha, \beta) = f_r(y | \alpha, \beta) \left| \frac{dy}{dx} \right| \right) \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta(\alpha-1)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\beta^{\alpha-1}} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} dx}_{\text{等于1}} \\
&= \frac{1}{\beta(\alpha-1)} \quad (24)
\end{aligned}$$

当  $A_{[0, \tau_{j-1}, t]} < (T/t)K$  时,

$$\begin{aligned}
C &= e^{-r(T-t)} E\{\max[A_{[t, \tau_j, T]} - K, 0]\} \\
&= e^{-r(T-t)} E\left\{\max\left[\underbrace{\frac{T-t}{T}A_{[t, \tau_j, T]}}_{\text{尚未知部分}} + \underbrace{\frac{t}{T}A_{[0, \tau_{j-1}, t]}}_{\text{已知部分}} - K, 0\right]\right\} \\
&\quad (\text{将 } A_{[0, \tau_1, T]} \text{ 拆解成已知及尚未知两部分}) \\
&= e^{-r(T-t)} \left(\frac{T-t}{T}\right) E[\max(A_{[t, \tau_j, T]} - K', 0)] \quad (25)
\end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}
K' &= \frac{T}{T-t} \left[ K - \frac{t}{T} A_{[0, \tau_{j-1}, t]} \right] = \frac{TK - tA_{[0, \tau_{j-1}, t]}}{T-t} > 0 \\
&= e^{-r(T-t)} \left(\frac{T-t}{T}\right) \int_{K'}^\infty (y - K') f_r(y | \alpha, \beta) dy
\end{aligned}$$

此处:  $y = A_{[t, \tau_j, T]}$  (它的概率分布以倒数 Gamma 概率分布  $f_r(y | \alpha, \beta)$  代表)

令  $x = 1/y \Rightarrow dx = -1/y^2 | dy$

$$\therefore dy = y^2 dx$$

$$\begin{aligned}
\therefore C &= e^{-r(T-t)} \left(\frac{T-t}{T}\right) \int_0^{1/K'} \left(\frac{1}{x} - K'\right) f_r(y | \alpha, \beta) (y^2) dx \\
&= e^{-r(T-t)} \left(\frac{T-t}{T}\right) \int_0^{1/K'} \left(\frac{1}{x} - K'\right) f(x | \alpha, \beta) dx
\end{aligned}$$

此处:

$$\begin{aligned}
f(x | \alpha, \beta) &= f_r(y | \alpha, \beta) y^2 = \text{Gamma 概率分布} \quad (\text{见(16)}) \\
&= e^{-r(T-t)} \left(\frac{T-t}{T}\right) \left\{ \int_0^{1/K'} \left(\frac{1}{x}\right) f(x | \alpha, \beta) dx - K' \int_0^{1/K'} f(x | \alpha, \beta) dx \right\} \quad (26)
\end{aligned}$$



公式(26)内的第一部分积求解如下：

$$\begin{aligned}\int_0^{1/K} \left(\frac{1}{x}\right) f(x | \alpha, \beta) dx &= \int_0^{1/K'} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} dx \\ &= \frac{1}{\beta(\alpha-1)} \int_0^{1/K'} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1) \beta^{\alpha-1}} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} dx \\ &= \frac{1}{\beta(\alpha-1)} F(1/K' | \alpha-1, \beta)\end{aligned}\quad (27)$$

此处：

$$\begin{aligned}F(1/K' | \alpha-1, \beta) &= \int_0^{1/K'} \frac{1}{\Gamma(\alpha-1) \beta^{\alpha-1}} x^{(\alpha-1)-1} e^{-x/\beta} dx \\ &= \text{Gamma 变量 } x \text{ 的概率分布, 参数为 } \alpha-1 \text{ 及 } \beta\end{aligned}$$

第二部分积分其实是累积 Gamma 概率分布：

$$\int_0^{1/K'} f(x | \alpha, \beta) dx = F(1/K' | \alpha, \beta) \quad (28)$$

故将(27)及(28)代入(26)即是亚洲买权的评价公式如下：

$$C = e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left[ \frac{1}{\beta(\alpha-1)} F(1/K' | \alpha-1, \beta) - K' F(1/K' | \alpha, \beta) \right]$$

此处： $\frac{1}{\beta(\alpha-1)} = E[A_{[t, \tau_j, T]}]$  (见(24))

这就是公式(22)的评价公式。

至于定理 2 的第二部分[即(23)]证明如下：若  $K' \leq 0$  时，即  $A_{[0, \tau_{j-1}, t]} \geq (T/t)K$ 。

根据上面证明过程中的(25)：

$$\begin{aligned}C &= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) E[\max(A_{[t, \tau_j, T]} - K', 0)] \\ &\quad (\text{此处因 } K' \leq 0, A_{[t, \tau_j, T]} - K' > 0) \\ &= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \{E[A_{[t, \tau_j, T]}] - K'\} \\ &= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left\{ \frac{1}{\beta(\alpha-1)} - K' \right\} \quad (\text{利用(24)})\end{aligned}$$

(这是公式(23))

$$= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \frac{1}{\beta(\alpha-1)} - e^{-r(T-t)} \left[ K - \frac{t}{T} A_{[0, T-t]} \right]$$

(这是(23b))

评价公式(22)内的  $F(1/K' | \alpha-1, \beta)$  的角色其实相当于 Black-Scholes 公式内的  $N(d_1)$ , 而  $F(1/K' | \alpha, \beta)$  相当于 Black-Scholes 的  $N(d_2)$ 。

定理 2 的算术平均是以间断时点来观察股价, 并计算平均值。若算术平均是以连续时点观察股价并计算连续平均值 (Continuous Average), 则亚洲买权的评价会不同于(22)及(23a)。以定理 3 表示。

### 定理 3

在连续时点连续计算算术平均值的情况下, 亚洲买权的评价模型如下:

1. 当  $A_{[0, t]} < (T/t)K$  时,

$$\begin{aligned} C^* &= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left[ \frac{S_t (e^{(r-q)(T-t)} - 1)}{(r-q)(T-t)} F(1/K^* | \alpha-1, \beta) \right. \\ &\quad \left. - K^* F(1/K^* | \alpha, \beta) \right] \\ K^* &= \frac{TK - tA_{[0, t]}}{T-t} \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} &= S_t \frac{e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{T(r-q)} F(1/K^* | \alpha-1, \beta) \\ &\quad - e^{-r(T-t)} \left( K - \frac{tA_{[0, t]}}{T} \right) F(1/K^* | \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (29b)$$

2. 当  $A_{[0, t]} \geq (T/t)K$  时, 亚洲买权的评价为:

$$C^* = e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) [E(A_{[t, T]}) - K^*] \quad (30)$$

此处:

$$E(A_{[t, T]}) = \frac{S_t (e^{(r-q)(T-t)} - 1)}{(r-q)(T-t)} = (8)$$

3. 若原时点  $t$  设定为零 ( $t = 0$ ), 则(29)变成:

$$\begin{aligned} C^* &= e^{-rT} \left[ \frac{S_0 (e^{(r-q)T} - 1)}{(r-q)T} F(1/K | \alpha - 1, \beta) - KF(1/K | \alpha, \beta) \right] \\ &\quad (\text{当 } t = 0, K^* = K) \\ &= S_0 \frac{e^{-qt} - e^{-rT}}{(r-q)T} F(1/K | \alpha - 1, \beta) - e^{-rT} KF(1/K | \alpha, \beta) \quad (31) \end{aligned}$$

(29)式,证明如下:

在连续平均下,  $A_{[0, \tau_{j-1}, t]}$  变成  $A_{[0, t]}$ ,  $A_{[0, \tau_j, T]}$  变成  $A_{[0, T]}$ , 而  $A_{[t, \tau_j, T]}$  变成  $A_{[t, T]}$ , 则

$$K' = \frac{TK - tA_{[0, t]}}{T-t} = K^* (\text{另新设定它为 } K^*, \text{以区别(22)内的 } K')$$

故当  $A_{[0, t]} < (T/t)K$  时, 亚洲买权的评价成为(由(22)推演):

$$\begin{aligned} C^* &= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) [E(A_{[t, T]}) F(1/K^* | \alpha - 1, \beta) - K^* F(1/K^* | \alpha, \beta)] \\ &= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left[ \frac{S_t (e^{(r-q)(T-t)} - 1)}{(r-q)(T-t)} F(1/K^* | \alpha - 1, \beta) \right. \\ &\quad \left. - K^* F(1/K^* | \alpha, \beta) \right] \quad (\text{这就是(29a), 再简化就是(29b)}) \end{aligned}$$

当  $A_{[0, t]} \geq (T/t)K$  时, 从(23)的证明很容易看出评价公式即是(30)。在(29b)内, 令  $t = 0$ , 则变成(31)。

定理 1 告诉我们, 到期日  $T$  愈长(或  $T \rightarrow \infty$ ) 及计算平均值的股价个数  $n$  愈多(或  $n \rightarrow \infty$ ), 则算术平均值的概率分布愈接近倒数 Gamma 概率分布。因此, 以定理 2 及 3 的评价公式也会愈接近亚洲选择权(买权)的真正评价模型。特别当  $r - q - \sigma^2/2 < 0$  或对到期日长的亚洲选择权, 定理 2 及 3 的评价公式更是准确。

### 避险参数

在连续算术平均下, 我们可根据(29)及(30)分别求解 Delta:

1. 当  $A_{[0, t]} < (T/t)K$  时,

$$\frac{\partial C^*}{\partial S_t} = \frac{\partial}{\partial S_t} (29)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \left[ \frac{(e^{(r-q)(T-t)} - 1)}{(r-q)(T-t)} F(1/K^* | \alpha - 1, \beta) \right] \\
&= \left( \frac{e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{(r-q)T} \right) F(1/K^* | \alpha - 1, \beta) \quad (32)
\end{aligned}$$

2. 当  $A_{[0, t]} \geq (T/t)K$  时,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C^*}{\partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t} (30) = e^{-r(T-t)} \left( \frac{T-t}{T} \right) \frac{(e^{(r-q)(T-t)} - 1)}{(r-q)(T-t)} \\
&= \frac{e^{-q(T-t)} - e^{-r(T-t)}}{(r-q)T} \quad (33)
\end{aligned}$$

对 Gamma:

1. 当  $A_{[0, t]} < (T/t)K$  时,

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t} (32) = \frac{e^{-r(T-t)}}{TS_t^2} f(1/K^* | \alpha - 1, \beta) \quad (34)$$

2. 当  $A_{[0, t]} \geq (T/t)K$  时,

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t} (33) = 0 \quad (35)$$

## 参 考 文 献

- L. Arnold, "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications", John-Wiley & Sons (1974).
- J. Hull, and A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path Dependent Options", *Journal of Derivatives*, 1 (Fall 1993), p. 21—31.
- A. Kemna, and A. Vorst, "A Pricing Method for Options Based on Average Values", *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), p. 113—129.
- E. Levy, "Pricing European Average Rate Currency Options", *Journal of International Money and Finance*, 11 (1992), p. 474—491.
- E. Levy, and S. Turnbull, "Average Intelligence", *RISK*, 5 (Feb. 1992), p. 53—59.
- M. A. Milesky, and S. E. Posner, "Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution", *Journal of Financial and Quantitative*

- Analysis*, Vol. 33, No. 3, September 1998a, p. 409—422.
- \_\_\_\_\_ and \_\_\_\_\_, “A Closed-Form Approximation For Valuing Basket Options”, *Journal of Derivatives*, Summer 1998b, p. 54—61.
- \_\_\_\_\_ and \_\_\_\_\_, “Another Moment for the Average Option”, *Derivatives Quarterly*, Summer 1999, p. 47—53.
- S. Turnbull, and L. Wakeman. “A Quick Algorithm for Pricing European Average Options”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(1991), p. 377—389.
- T. Vorst, “Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options”, *International Review of Financial Analysis*, 1(3,1992), p. 179—193.

## 第二十章 远期生效亚洲选择权

### 一、简介

一般亚洲选择权(Asian Options, or Average Options,或称平均选择权)履约价的计算是以契约生效日起至到期日之间标的价格的算术平均作为履约价。但远期生效亚洲选择权的履约价是契约日生效后某一时点开始至到期日的平均标的价格(或到期前某一时段的平均价格为履约价)。亚洲选择权的实务应用很广范,举例如下:

1. 在商品市场,为防止某些商品受人为操纵或其他原因而产生不合理的价格。在避险时,采用平均价格作为交割计算的基础,可降低受人为操纵的不良效应。

2. 在原油市场,使用原油厂商(或公司),只要原油(或原料)价格能平均稳定在某价位,则其营利将会稳定,而不受原油价格的起伏而有异常的波动。因此,在避险原油(或原料)成本时,喜欢以平均价格作为履约价。在外汇避险时,采用平均汇率为履约汇率也是基于相同的理由,它可以控制成本。

3. 对外汇收入的避险,采用平均汇率为履约价可控制外汇收入不会低于某一水准。

4. 为防止不友善的并购,公司可大量发行认股权证给友善的投资人。履约价为平均股价。若对方并购公司,则友善的投资人可以平均履约价认购(被并购)公司的股票,认购价格低,且可冲淡股权稀释的效应。但对方(不友善的并购者)则会有高度的股权稀释效应(同时,并购

价格高)。如此,可打消对方并购的意图。这是防范被并购的一种策略,称为并购毒丸(Poison Pills)。

亚洲选择权及远期生效选择权大部分是欧式选择权,不准提前履约。其到期日可长至两年以上至七八年不等。亚洲选择权其实并无完全的封闭解评价模型,但可以获得极合理且误差极小的近似封闭解。Bouaziz, Briys 及 Crouhy(1994)提供求解远期生效亚洲选择权的近似封闭解评价模型。在本章中,我们将会详细介绍推导此评价模型。

## 二、求解评价模型

我们仍采用 Black-Scholes 的经济环境。标的价格的变动过程为 Itô 过程如下:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dZ^Q \quad (1)$$

此处: $Z^Q$  是风险中立概率测度  $Q$  的布朗运动

$r$  = 无风险利率

令  $(\Omega, F^*, F, P)$  代表具有信息资料的概率空间(A Filtered Probability Space),其中  $F^*$  代表所有  $\sigma$ -fields 的集合。建立在概率空间  $\Omega$  上所有  $\sigma$ -fields 的集合称为信息集合  $F$  (A Filtration)。以  $F_t$  代表集合至今所有的信息资料。信息集合  $F_t$  是随时间而累积增加,因此  $F_s \subset F_t, 0 \leq s \leq t$ 。也就是  $F_n \subset F_{n+1}$  就所有的  $n$  而言。布朗运动  $Z_t$  的变动历史过程也是包括于信息集合内。因此,股价的现在及过去历史也是信息集合的一部分。

设定远期生效亚洲买权的履约价计算是从时点  $(T-h)$  起至到期日止 ( $h > 0$ )。因此履约价  $K$  可表示为:

$$K = \frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du \quad (2)$$

我们将会求解在时点  $(T-h)$  以前及以后的两种不同评价模型。也就

是,若以  $t$  代表现在,则我们分别求解在  $0 \leq t < T-h$  及  $t > T-h$  两种情况下的评价模型。

**情况一:**当  $0 \leq t < T-h$

在风险中立下,远期生效亚洲买权的价值为:

$$C = e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T - K)^+ | F_t] \quad (3)$$

采用 Duffie(1988, p. 84)的重复条件期望定律(Law of Iterated Conditional Expectations),重写(3)如下:

$$C = e^{-r(T-t)} E^Q\{E^Q[(S_T - K)^+ | F_{T-h}] | F_t\} \quad (4)$$

因标的价格呈现对数正态分布,故

$$S_T = S_{T-h} e^{(r-\sigma^2/2)h + \sigma(Z_T - Z_{T-h})} \quad (5)$$

(若考虑连续股利率  $q$  时,可以  $(r-q)$  取代原来的  $r$ 。)

将(5)代入(4)得

$$C = e^{-r(T-t)} E^Q\left\{E^Q\left[\left(S_T - \frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du\right)^+ \middle| F_{T-h}\right] \middle| F_t\right\} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-r(T-t)} E^Q\left\{S_{T-h} E^Q\left[e^{r'h + \sigma(Z_T - Z_{T-h})}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- \frac{1}{h} \int_{T-h}^T e^{r'(u-(T-h)) + \sigma(Z_u - Z_{T-h})} du \middle| F_{T-h}\right] \middle| F_t\right\} \\ &\quad (r' = r - \sigma^2/2) \end{aligned} \quad (6b)$$

为求封闭解,我们对(6b)内的指数函数以泰勒展开式表示如下:

$$e^{r'h + \sigma(Z_T - Z_{T-h})} \approx 1 + r'h + \sigma(Z_T - Z_{T-h}) \quad (7)$$

$$e^{r'(u-(T-h)) + \sigma(Z_u - Z_{T-h})} \approx 1 + r'(u-(T-h)) + \sigma(Z_u - Z_{T-h}) \quad (8)$$

(6b)内中括号内的指数函数及积分项之相差以  $X$  代表之,再将(7)及(8)代入  $X$  获得:

$$\begin{aligned} X \approx & \underbrace{1 + r'h + \sigma(Z_T - Z_{T-h})}_{(7)} \\ & - \frac{1}{h} \int_{T-h}^T \underbrace{[1 + r'(u-(T-h)) + \sigma(Z_u - Z_{T-h})]}_{(8)} du \end{aligned} \quad (9a)$$



$$\begin{aligned}
&= 1 + r'h + \sigma(Z_T - Z_{T-h}) \\
&\quad - \frac{1}{h} \left[ h + r' \int_{T-h}^T u du - r'(T-h) \int_{T-h}^T du + \int_{T-h}^T \sigma(Z_u - Z_{T-h}) du \right] \\
&= 1 + r'h + \sigma(Z_T - Z_{T-h}) \\
&\quad - 1 - \frac{r'}{h} \left[ \frac{T^2 - (T-h)^2}{2} \right] + r'(T-h) - \frac{1}{h} \int_{T-h}^T \sigma(Z_u - Z_{T-h}) du \\
&= \frac{r'h}{2} + \sigma(Z_T - Z_{T-h}) - \frac{1}{h} \int_{T-h}^T \sigma(Z_u - Z_{T-h}) du \quad (9b)
\end{aligned}$$

再次对(9b)求解  $X$  的期望值及方差如下:

$$E(X | F_{T-h}) = \frac{r'h}{2} = m \text{ (令之)} \quad (10)$$

因为

$$E^Q(Z_T - Z_{T-h} | F_{T-h}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore E^Q \left[ \int_{T-h}^T \sigma(Z_u - Z_{T-h}) du \middle| F_{T-h} \right] \\
&= \sigma E^Q \left[ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m (Z_{u_i} - Z_{T-h}) \Delta u_i \middle| F_{T-h} \right] \\
&\quad (\delta_n = \max_i (u_i - u_{i-1}), \Delta u_i = u_i - u_{i-1}) \\
&= 0 \quad (\because E(Z_{u_i} - Z_{T-h}) = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X | F_{T-h}) &= \text{Var}[\sigma(Z_T - Z_{T-h}) | F_{T-h}] \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{h^2} \text{Var} \left[ \int_{T-h}^T \sigma(Z_u - Z_{T-h}) du \middle| F_{T-h} \right] \\
&\quad - 2\text{Cov}(\cdot) \quad (\text{Cov}(\cdot) \text{ 代表前两项随机变量的协方差}) \\
&= \sigma^2 h/3 = v \quad (\text{详见附录一的推导}) \quad (11)
\end{aligned}$$

一旦  $X$  的期望值及方差求解完成后, 我们可开始推导远期生效亚洲买权的评价模型如下: 回到(6b)式内的第二个期望值:

$$\begin{aligned}
E^Q \left[ \left( S_T - \frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du \right)^+ \middle| F_{T-h} \right] &= E^Q[X^+ | F_{T-h}] \\
&= E^Q(X > 0 | F_{T-h}) \\
&= \int_0^\infty \frac{X}{\sqrt{2\pi v}} \exp \left[ -\frac{(X-m)^2}{2v} \right] dX \quad (X \sim N(m, v))
\end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned}
&= E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left[-\frac{(X-m)^2}{2v}\right] dX \\
&\quad \left(\text{Let } Z = \frac{X-m}{\sqrt{v}} \Rightarrow X = m + \sqrt{v}Z\right) \\
&\quad \therefore dZ = \frac{1}{\sqrt{v}} dX \Rightarrow dX = \sqrt{v} dZ \\
&\quad \text{As } X = -\infty, Z = -\infty \\
&\quad X = 0, Z = -m/\sqrt{v}) \\
&= E(X) = \int_{-\infty}^{-m/\sqrt{v}} \frac{m + Z\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-Z^2/2) \sqrt{v} dZ \\
&= m - m \int_{-\infty}^{-m/\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} dZ - \sqrt{v} \int_{-\infty}^{-m/\sqrt{v}} \frac{Z}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} dZ \\
&= m \left[1 - N(-m/\sqrt{v})\right] - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m/\sqrt{v}} e^{-Z^2/2} d(-Z^2/2) \\
&= mN(m/\sqrt{v}) + \sqrt{\frac{v}{2\pi}} [e^{-Z^2/2}]_{-\infty}^{-m/\sqrt{v}} \\
&= mN(m/\sqrt{v}) + \sqrt{\frac{v}{2\pi}} (e^{-m^2/2v}) \tag{12b}
\end{aligned}$$

完成(6b)内第二个期望值的求解后,远期生效亚洲买权(6)可改写为:

$$C = e^{-r(T-t)} E^Q[S_{T-h} E^Q(X^+ | F_{T-h}) | F_t] \tag{13a}$$

$$= e^{-r(T-t)} E^Q(S_{T-h} | F_t) E^Q(X^+ | F_{T-h})$$

$$= e^{-r(T-t)} S_t e^{r\tau} \left[ mN(m/\sqrt{v}) + \sqrt{\frac{v}{2\pi}} e^{-m^2/2v} \right] \tag{13b}$$

$$(\text{此处 } E^Q(S_{T-h} | F_t) = S_t e^{r\tau}, \tau = (T-h) - t)$$

$$= S_t e^{-r^*h} \left[ \left(\frac{r'h}{2}\right) N\left(\frac{r'\sqrt{3h}}{2\sigma}\right) + \sqrt{\frac{\sigma^2 h}{6\pi}} e^{-3r'^2 h/6\sigma^2} \right] \tag{13c}$$

$$(r' = r - \sigma^2/2)$$

[将(10)及(11)的  $m$  及  $v$  代入简化即得(13)]

远期生效亚洲买权评价模型(13)的意义如下:

## 1. Delta

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-r\tau} \left[ \left( \frac{r'h}{2} \right) N \left( \frac{r'\sqrt{3h}}{2\sigma} \right) + \sqrt{\frac{\sigma^2 h}{6\pi}} e^{-3r'^2 h / 8\sigma^2} \right] \quad (14a)$$

该买权的 Delta 是一常数, 不随标的价格变动。只要持有固定单位 ( $\Delta$  单位) 的标的物即可避险, 而不必动态修正调整 Delta (这与一般选择权的 Delta 不同)。原因是, 履约价自  $(T-h)$  时点起即开始计算, 累积平均至到期日  $T$ , 这已如同逐日结算 (Marking to Market) 的性质。

## 2. Gamma

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = 0 \quad (14b)$$

因 Delta 是固定, 故 Gamma = 0。此外, 因该买权价值是标的价格  $S$  的线性关系 (不是非线性), 因此 Gamma 是零。

## 3. Theta

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (14c)$$

该买权价值不是时间的函数, 故其价值不像一般买权会随时间的过去而消失其价值 (No Time Decay)。(当  $0 \leq t \leq T-h$ )

情况二: 当  $t > T-h$

当  $t > T-h$ , 履约价的平均值已累积一部分, 故可将履约价拆成两部分如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du &= \frac{1}{h} \int_{T-h}^t S_u du + \frac{1}{h} \int_t^T S_u du \\ &= M_t + \frac{1}{h} \int_t^T S_u du \end{aligned} \quad (15)$$

此处:  $M_t = \frac{1}{h} \int_{T-h}^t S_u du$  (已知部分)

根据 (6a) 及 (15), 远期生效亚洲买权的评价模型可改写如下:

$$C = e^{-r(T-t)} E^Q \left\{ E^Q \left[ \left( S_T - M_t - \frac{1}{h} \int_t^T S_u du \right)^+ \mid F_T \right] \mid F_t \right\} \quad (16a)$$

(类似 (6a) 将  $T-h$  换成  $T$ )

$$= e^{-r(T-t)} E^Q [S_t E^Q (X^+ \mid F_T) \mid F_t] \quad (\text{类似 (13a)})$$

$$= e^{-r(T-t)} S_t E^Q[X^+ | F_T] \quad (16b)$$

此处:

$$\begin{aligned} S_T - M_t - \frac{1}{h} \int_t^T S_u du &= S_t \exp[r'(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t)] - M_t \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_t^T S_t \exp[r'(u-t) + \sigma(Z_u - Z_t)] du \\ &= S_t X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \exp[r'(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t)] - M_t/S_t \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_t^T \exp[r'(u-t) + \sigma(Z_u - Z_t)] du \\ &\approx 1 + r'(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t) - M_t/S_t \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_t^T [1 + r'(u-t) + \sigma(Z_u - Z_t)] du \end{aligned} \quad (16c)$$

(利用泰勒展开式)

$$\begin{aligned} &= 1 + r'(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t) - M_t/S_t \\ &\quad - \frac{T-t}{h} - \frac{r'(T-t)^2}{2h} - \frac{\sigma}{h} \int_t^T (Z_u - Z_t) du \end{aligned} \quad (16d)$$

为求算评价公式,我们首先求算  $X$  的期望值及方差,正如求算(10)及(11)如下:

$$m^* = E(X) = 1 + r'(T-h) - \left( \frac{T-t}{h} \right) - \frac{r'(T-t)^2}{2h} - M_t/S_t \quad (17)$$

$$v = \text{Var}(X) = \sigma^2 \tau + \frac{\sigma^2}{h^2} \left( \frac{\tau^3}{3} \right) - 2 \left( \frac{\sigma^2 \tau}{2} \right) \quad (\text{与(11)的推导相似,见附录一})$$

$$\therefore X \sim N(m^*, v)$$

故

$$\begin{aligned} C &= S_t e^{-(T-t)} E^Q(X^+ | F_t) \\ &= S_t e^{-(T-t)} \left[ m^* N(m^*/\sqrt{v}) + \sqrt{\frac{v}{2\pi}} e^{-m^{*2}/2v} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

此处:  $E^Q(X^+ | F_t) = (12b)$  (将(12b)内的  $m$  以  $m^*$  取代)

注:若  $t = T - h$ , 则  $m^* = m$ ,  $M_t = 0$ , 故 (18) = (13b)。

### 三、远期生效亚洲买卖权的平价关系

正如一般买卖权, 远期生效亚洲买卖权也存有平价关系 (Put-Call Parity)。在本节中, 我们将推导介绍。首先, 重写下列到期时现金流量:

$$\begin{aligned}(K - S_T) - (S_T - K)^+ &= \begin{cases} K - S_T, & \text{若 } K > S_T \\ (K - S_T) + (S_T - K) = 0, & \text{若 } K \leq S_T \end{cases} \\ &= (K - S_T)^- \end{aligned} \quad (19)$$

情况一:  $t < T - h$

在风险中立下, (19) 式的现值为

$$\begin{aligned}e^{-r(T-t)} E[(K - S_T) - (S_T - K)^+ | F_t] &= \underbrace{e^{-r(T-t)} E[(K - S_T)^+ | F_t]}_P \\ e^{-r(T-t)} E[K - S_T | F_t] + \underbrace{e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)^+ | F_t]}_C &= P \\ \therefore P &= C + e^{-r(T-t)} E(K | F_t) - e^{-r(T-t)} E(S_T | F_t) \end{aligned} \quad (20)$$

此处:  $P = e^{-r(T-t)} E[(K - S_T)^+ | F_t] =$  远期生效亚洲卖权

$C = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)^+ | F_t] =$  远期生效亚洲买权

$E(S_T | F_t) = e^{r(T-t)} S_t$

在附录二, 我们求出

$$E(K | F_t) = E\left[\frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du\right] = \frac{e^{rh} - 1}{rh} S_t e^{r(T-h-t)} \quad (21)$$

将 (21) 代入 (20) 即是远期生效亚洲选择权的平价关系:  $t < T - h$ 。就  $t < T - h$  而言,

$$P = C + \frac{e^{rh} - 1}{rh} S_t e^{r(T-h-t)} - e^{-r(T-t)} S_t e^{r(T-t)}$$

$$= C + \left( \frac{1 - e^{-rh}}{rh} - 1 \right) S_t \quad (22)$$

情况二:  $t > T - h$

在  $t > T - h$  情形下, (9) 式改写为

$$P = C + e^{-r(T-t)} E \left[ M_t + \frac{1}{h} \int_t^T S_u du \middle| F_t \right] - S_t$$

根据附录二的求算原理可求算出:

$$E \left[ \frac{1}{h} \int_t^T S_u du \middle| F_t \right] = \frac{e^{r(T-t)} - 1}{r(T-t)} S_t$$

(即(21) 内的  $T - h$  改由  $t$  取代,  $\therefore h = T - t$ )

$$\therefore P = C + M_t e^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \left[ \frac{e^{r(T-t)} - 1}{r(T-t)} S_t \right] - S_t$$

或

$$P = C + M_t e^{-r(T-t)} + \left[ \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{r(T-t)} - 1 \right] S_t \quad (23)$$

注: 由(23)的推导可知, 若  $T - h = t$ , 则(23) = (22)。

#### 四、评价模型的准确度

在第二节所推导出的远期生效买权是近似封闭解, 因在求解时, 我们以泰勒展开式来替代两个指数函数[见(7), (8)及(16c)]。因此, 我们会质疑评价公式(13c)及(18)的准确度。根据 Bouaziz, Briys 及 Crouchy(1994)的实证研究, 他们将评价公式(13c)计算的结果与 10 000 次 Monte Carlo 模拟的结果做比较, 报告如下:

波动度 $\sigma$	Monte Carlo 10 000 次	MC 标准差	近似评价公式
0.1	0.650	0.009	0.676
0.25	1.400	0.021	1.436
0.5	2.637	0.048	2.647

观察以上的实证结果可知, 近似评价公式的答案非常接近 Monte Carlo

的值(代表真正答案),因此近似评价模型的准确度很高,令人满足。他们也求出评价误差的上限,可由下列公式表示之:

$$|C^* - C| \leq S_0 \left( \frac{2r^2 h^2}{3} + \frac{3}{4} \sigma^2 h e^{-rh} \right) \quad (24)$$

此处:  $C^* =$  真正值  $= e^{-rT} E(S_T - K)^+$

$C =$  近似评价公式(13c)

$S_0 =$  在期初( $t = 0$ )的标的价格

有兴趣推导(24)的读者,可参见他们的附录。

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes, 1973, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, p. 637—654.
- P. Boyle, 1977, "Options: a Monte-Carlo approach", *Journal of Financial Economics* 4, p. 323—338.
- L. Bouaziz, E. Briys, and M. Crouhy, 1994, "The Pricing of Forward-Starting Asian Options", *Journal of Banking & Finance* 18, p. 823—839.
- A. Conze, and Viswanathan, 1991, "European path dependent options: the case of geometric averages", *Finance* 12, p. 7—22.
- A. Kemna, and T. Vorst, 1990, "A pricing method for options based on average asset values", *Journal of Banking and Finance* 14, p. 113—129.
- E. Levy, 1992, "Pricing European average rate currency options", *Journal of International Money and Finance* 11(5), p. 474—491.
- S. M. Turnbull, and L. MacDonald Wakeman, 1991, "A quick algorithm for pricing European average options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26(3), p. 377—389.

## 附 录 一

求解  $Var(X|F_{T-h})$ : 由(11)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X | F_{T-h}) &= \text{Var}[\sigma(Z_T - Z_{T-h})] + \frac{\sigma^2}{h^2} \\ &\quad \times \text{Var}\left(\int_0^h (Z_u - Z_0) du\right) - 2\text{Cov}(\cdot) \end{aligned}$$

此处:  $\text{Cov}(\cdot)$  代表  $X$  内两随机变量的协方差。积分上下限改为从 0 至  $h$  (不会改变答案)。

首先

$$\begin{aligned} \text{Var}[\sigma(Z_T - Z_{T-h})] &= \sigma^2 \text{Var}(Z_T - Z_{T-h}) = \sigma^2 E(Z_T - Z_{T-h})^2 \\ (\because E(Z_T - Z_{T-h}) &= 0) \\ &= \sigma^2 (T - (T-h)) = \sigma^2 h \\ \text{Var}\left(\int_0^h (Z_u - Z_0) du\right) &= E\left(\int_0^h (Z_u - Z_0) du\right)^2 \quad (\Delta u_i = u_i - u_{i-1}) \\ &= E\left\{\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left[ \left( \sum_{i=1}^n (Z_{u_i} - Z_0) \Delta u_i \right) \left( \sum_{j=1}^n (Z_{u_j} - Z_0) \Delta u_j \right) \right]\right\} \\ (\delta_n &= \max_i (u_i - u_{i-1})) \\ &= E\left\{\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left[ \left( \sum_{i=1}^n (Z_{u_i} - Z_0)^2 (\Delta u_i)^2 + 2 \sum_i < \sum_j (i\text{term})(j\text{term}) \right) \right]\right\} \\ &= \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n \underbrace{E(Z_{u_i} - Z_0)^2 (\Delta u_i)^2}_{u_i} + 2 \sum_i < \sum_j \underbrace{E[(i\text{term})(j\text{term})]}_{=0, \because \text{Cov}(\cdot)=0} \right] \\ &= \int_0^h u^2 du = \frac{1}{3} \int_0^h du^3 = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^h = \frac{h^3}{3} \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\cdot) &= \text{Cov}\left[\sigma(Z_T - Z_{T-h}), \frac{\sigma}{h} \int_0^h (Z_u - Z_0) du\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{h} E\left[(Z_T - Z_{T-h}) \int_0^h (Z_u - Z_0) du\right] \\ &\quad \left(\text{这里 } \text{Cov}(x, y) = E(xy) - \overbrace{E(x) \cdot E(y)}^{=0}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{h} E\left[(Z_T - Z_{T-h}) \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (Z_{u_i} - Z_0) \Delta u_i\right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{h} E \left[ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (Z_T - Z_{T-h}) (Z_{u_i} - Z_0) \Delta u_i \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{h} \left[ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{E(Z_{u_i} - Z_0)^2}_{u_i} \Delta u_i \right] = \frac{\sigma^2}{h} \left[ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (u_i) \Delta u_i \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{h} \int_0^h u du \\
&= \frac{\sigma^2}{h} \frac{u^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\sigma^2}{h} \frac{h^2}{2} = \frac{\sigma^2 h}{2} \\
\therefore \text{Var}(X \mid F_{T-h}^*) &= \sigma^2 h + \frac{\sigma^2}{h^2} \left( \frac{h^3}{3} \right) - 2 \left( \frac{\sigma^2 h}{2} \right) = \frac{\sigma^2 h}{3}
\end{aligned}$$

## 附 录 二

$$\begin{aligned}
E(K \mid F_t^*) &= \frac{S_t}{h} e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})t} E \left\{ \underbrace{\int_{T-h}^T e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})u} e^{\sigma(Z_u - Z_t)} du}_{A} \mid F_t \right\} \\
A &= E \left[ \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})u_i} e^{\sigma(Z_{u_i} - Z_t)} \Delta u_i \mid F_t \right] \\
&\quad (\delta_n = \max_i (u_i - u_{i-1}), \Delta u_i = u_i - u_{i-1}) \\
&= \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})u_i} E(e^{\sigma(Z_{u_i} - Z_t)}) \Delta u_i \mid F_t \right] \\
&= \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})u_i} e^{\sigma^2(u_i - t)/2} \Delta u_i \mid F_t \right] \\
&= \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n e^{ru_i - \sigma^2 u_i/2} \Delta u_i \mid F_t \right] \\
&= \int_{T-h}^T e^{ru - \sigma^2 u/2} du = e^{-\sigma^2/2} \int_{T-h}^T e^{ru} du \\
&= e^{-\sigma^2/2} \left[ \frac{e^{ru}}{r} \right]_{T-h}^T = e^{-\sigma^2/2} \left[ \frac{e^{rT} - e^{r(T-h)}}{r} \right] \\
\therefore E(K \mid F_t^*) &= \frac{S_t}{A} e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})t} e^{-\sigma^2/2} \left( \frac{e^{rT} - e^{r(T-h)}}{r} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S_t}{rA} (e^{-rt+rT} - e^{-rt+r(T-h)}) \\
&= \frac{S_t}{rA} (e^{r(T-t)} - e^{r(T-h-t)}) \\
&= \frac{S_t e^{r(T-h-t)}}{rh} (e^{r(T-t)-r(T-h-t)} - 1) \\
&= \frac{(e^h - 1)}{rh} S_t e^{r(T-h-t)}
\end{aligned}$$

## 第二十一章 重设型卖权

### 一、简介

重设型卖权(Reset Puts)具有一般卖权的基本特征,当标的股价低于原来的履约价时,卖权成为价内,且在到期时的交割计算是履约价减掉当时的标的股价。但重设型卖权则可在重设时点重设履约价。在重设时点,若标的股价上升高于原履约价时,则履约价重设等于当时的股价。重设型的卖权已于世界多处的证券市场有买卖交易,也有依附于结构型商品(Structured Products)之内,而在柜台市场交易(OTC Markets)。举例如下:

1. 在 1996 年,纽约证券市场(NYSE)及芝加哥选择权交易市场(CBOE),已有重设型熊市认售权证(Bear Market Reset Warrants)的交易。它是由国际财务公司(International Finance Corporations)所发行。

2. 在澳洲,由马圭尔银行(Macquarie Bank)提供搭配股票投资的商品(A Geared Equity Investment,简称 GEI)。它是一种以股票作抵押的放款,提供投资人融资购买股票,并以股票作担保品。为保护股票担保品不会因股价下跌而失去其原有的担保品质,股票投资商品(GEI)内含一个重设型卖权。也就是,当该银行放款给投资人购买股票时,连带出售可重设型卖权给投资人(融资者)。因此投资人获得保护,不受日后股价下跌而遭受追缴保证金,甚或断头的风险。虽然银行发行重设型卖权必须进行避险,但也可获得权利金的收入。因此,重设

型卖权对投资人融资购买股票提供担保品的保护,也对股市稳定提供一些正面的效益,而不致有断头卖压的出现。

单点重设型卖权是由 Gray 及 Whaley(1999)所介绍。在本章中,我们将以 Martingale 新数学评价方法更详细介绍重设型卖权的评价模型,并探讨其风险特征。

## 二、重设型卖权的定义

重设型卖权的到期现金流量  $RP_T$  (或到期价值)以公式表示如下:

$$RP_T = \begin{cases} S_t - S_T, & \text{若 } S_t > K(\text{重设}) \text{ 及 } S_T < S_t, & (1a) \\ K - S_T, & \text{若 } S_t \leq K(\text{无重设}) \text{ 及 } S_T < K & (1b) \\ 0, & \text{若 } S_t \leq K \text{ 及 } S_T \geq K \text{ 或 } S_t > K \text{ 及 } S_T \geq S_t & (1c) \end{cases}$$

解释如下:

### 1. 情况(1):

在预先设定的重设时点  $t$ , 若当时的股价  $S_t$  高于原来履约价  $K$  时, 履约价重新设定为当时的股价  $S_t$ 。在到期( $T$ )时, 若股价  $S_T$  下跌低于重设履约价  $S_t$ , 则该卖权的现金流量(或到期价值)为  $(S_t - S_T)$ 。

### 2. 情况(2):

在重设时点  $t$ , 若当时的股价  $S_t$  低于或等于原履约价  $K$ , 则无重设履约价, 仍是原履约价  $K$ 。但在到期( $T$ )时, 若股价  $S_T$  下跌低于原履约价  $K$ , 则该卖权的到期价值为  $(K - S_T)$ 。

### 3. 情况(3):

在重设时点  $t$ , 无重设履约价 ( $S_t \leq K$ ), 且到期时股价高于或等于履约价 ( $S_T \geq K$ ), 则该卖权的到期价值为零。另一种情况是, 在  $t$  点重设履约价为  $S_t$  (即  $S_t > K$ ), 但在到期时股价高于或等于重设的履约价 ( $S_T \geq S_t$ ), 则该卖权的到期价值也是零。

一旦重设型卖权的到期现金流量决定后, 其评价模型可根据 Martingale Pricing 的方法求解: 在风险中立下, 其价值是到期现金流量期

望值的现值,并以无风险利率折现。在下一节中,我们详细介绍之。

### 三、欧式重设型卖权的评价: Martingale Pricing

根据重设型卖权的定义(1)、(2)及(3),在风险中立下,重设型卖权的评价可表示如下:

$$RP = e^{-rT} E^Q(S_t - S_T \mid S_t > K, S_T < S_t) P_r(S_t > K, S_T < S_t) \\ + e^{-rT} E^Q(K - S_T \mid S_t \leq K, S_T < K) P_r(S_t \leq K, S_T < K) \quad (2a)$$

$$= P_1 + P_2 \quad (2b)$$

此处:  $P_1$  等于(2a)的第一大项

$P_2$  等于(2a)的第二大项

$E^Q(\cdot)$  代表在风险中立概率测度  $Q$  下的期望值

因为要求解(2b),正如 Black-Scholes(1973)的假设,股价变动的随机过程为几何布朗运动表示如下:

$$\frac{dS}{S} = (r - d)dt + \sigma dW \quad (3)$$

此处:  $d$  = 连续股利率

$W$  代表布朗运动

$r$  = 无风险利率

根据(3),我们已知股价随机过程为:

$$S_t = S \exp[(r - d - \sigma^2/2)t + \sigma \Delta W_t] \quad (4)$$

此处:  $\Delta W_t = W_t - W_0$

$\Delta W_t \sim N(0, t)$

$S$  = 期初股价

(2b)内的第一大项  $P_1$  推导:

改写  $P_1$  如下:

$$P_1 = e^{-rT} E^Q(S_t \mid S_t > K, S_T < S_t) P_r(S_t > K, S_T < S_t)$$

$$- e^{-rT} E^Q(S_T | S_t > K, S_T < S_t) P_r(S_t > K, S_T < S_t) \quad (5)$$

根据(3), 股价的随机过程呈现马可夫性质(Markov Property), 即股价在前后期的行为是独立的。因此, 在时点  $t$  股价  $S_t$  大于  $K$  的事件与在到期时股价  $S_T$  大于  $S_t$  的事件是独立不相干。因此, (5) 式内的第一期望值及概率项可改写如下:

$$\begin{aligned} E^Q(S_t | S_t > K, S_T < S_t) &= E^Q(S_t | S_t > K) \\ P_r(S_t > K, S_T < S_t) &= P_r(S_t > K) P_r(S_T < S_t) \end{aligned}$$

将以上两式代入(5)

$$\begin{aligned} P_1 &= e^{-rT} E^Q(S_t | S_t > K) P_r(S_t > K) P_r(S_T < S_t) \\ &\quad - e^{-rT} E^Q(S_T | S_t > K, S_T < S_t) P_r(S_t > K) P_r(S_T < S_t) \end{aligned} \quad (6)$$

令(6)内的第一大项为  $A$ , 并求解如下:

$$A = e^{-rT} E^Q(S_t | S_t > K) P_r(S_t > K) P_r(S_T < S_t) \quad (7)$$

首先求解  $A$  内的前二项:

$$\begin{aligned} E^Q[S_t | S_t > K] P_r(S_t > K) &= E^Q[S_t I_{|S_t > K|}] \\ &= E^Q\left\{S \exp\left[\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma(W_t^Q - W_0^Q)\right] I_{|S_t > K|}\right\} \\ &= S e^{(r-d)t} E^Q[e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma\Delta W^Q} I_{|S_t > K|}] = S e^{(r-d)t} E^R[I_{|S_t > K|}] \end{aligned}$$

利用 Girsanov 定理

在  $Q$  测度下:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= (r - d)dt + \sigma dW^Q \\ \Rightarrow d\ln S_t &= \left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW^Q \\ \therefore S_T &= S \exp\left[\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma(W_T^Q - W_0^Q)\right] \end{aligned}$$

在  $R$  测度下:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= (r - d + \sigma^2)dt + \sigma dW^R \\ (dW^Q &= dW^R + \sigma dt \\ \therefore d\ln S_t &= \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW^R \\ \Rightarrow S_t &= S \exp\left[\left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma(W_t^R - W_0^R)\right] \\ &= Se^{(r-d)t} P_r^R(S_t > K) = Se^{(r-d)t} P_r^R[\ln S_t > \ln K] \\ &= Se^{(r-d)t} P_r^R\left[\frac{\Delta W^R}{\sqrt{t}} \geq \frac{\ln(K/S) - \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right] \\ &= Se^{(r-d)t} P_r^R\left[-\frac{\Delta W^R}{\sqrt{t}} \leq \underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r - d + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d_1}\right] \\ &= Se^{(r-d)t} N(d_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r^Q(S_T \leq S_t) &= P_r^Q[\ln S_T \leq \ln S_t] \\ &= P_r^Q[\ln S_t + (r-d-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T^Q - W_t^Q) \\ &\leq \ln S_t] \\ &= P_r^Q\left[\underbrace{\frac{\Delta W^Q}{\sqrt{T-t}}}_{N(0,1)} \leq -\underbrace{\frac{(r-d-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}_{b_2}\right] \\ &= N(-b_2) \\ &\quad \left(\text{此处 } b_2 = \frac{(r-d-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \therefore A &= Se^{(r-d)t} N(d_1) N(-b_2) e^{-rT} \\ &= Se^{-d t} N(d_1) N(-b_2) e^{-r(T-t)} \end{aligned} \quad (8)$$
$$B = e^{-rT} E^Q(S_T \mid S_t > K, S_T < S_t) P_r^Q(S_t > K) P_r^Q(S_T < S_t)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-rT} E^Q(S_T | S_t > K, S_T < S_t) P_r^Q(S_t > K, S_T < S_t) \\
&= e^{-rT} E^Q[S_T I_{S_t > K, S_T < S_t}] \\
&= e^{-rT} S e^{(r-d)T} E^Q[\underbrace{e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \Delta W_T^Q}}_{\zeta_T} I_{S_t > K, S_T < S_t}] \\
&= S e^{-dT} E^R[I_{S_t > K, S_T < S_t}] \quad (\text{利用 Girsanov 定理}) \\
&= S e^{-dT} E^R[I_{S_t > K}] E^R[I_{S_T < S_t}] \quad (\text{因 } \{S_t > K\} \text{ 及 } \{S_T < S_t\} \text{ 两事件} \\
&\quad \text{是独立, 见下面注解}) \\
&= S e^{-dT} P_r^R(S_t > K) P_r^R(S_T < S_t) \\
&= S e^{-dT} P_r^R(\ln S_t > \ln K) P_r^R(\ln S_T < \ln S_t) \\
&= S e^{-dT} P_r^R\left[\ln S + \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \Delta W_t^R > \ln K\right] \\
&\quad \times P_r^R\left[\ln S_t + \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma \Delta W_{T-t}^R < \ln S_t\right] \\
&= S e^{-dT} P_r^R\left[\frac{\Delta W_t^R}{\sqrt{t}} > \frac{\ln(K/S) - (r - d + \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}}\right] \\
&\quad \times P_r^R\left[\frac{\Delta W_{T-t}^R}{\sqrt{T-t}} \leq - \underbrace{\frac{(r - d + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}_{b_1}\right] \\
&= S e^{-dT} P_r^R\left[-\frac{\Delta W_t^R}{\sqrt{t}} \leq \underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r - d + \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}}}_{d_1}\right] \cdot N(-b_1) \\
&= S e^{-dT} N(d_1) N(-b_1) \tag{9}
\end{aligned}$$

注:  $E^R[I_{S_t < X, S_T < S_t}]$  代表二元正态概率, 且可分开成为两项独立的概率。

因为:

$$\begin{aligned}
Cov\left(\frac{-\Delta W_t}{\sqrt{t}}, \frac{\Delta W_{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{t(T-t)}} Cov(-\Delta W_t, \Delta W_{T-t}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{t(T-t)}} Cov(-(W_t - W_0), (W_T - W_t)) \\
&= 0 \quad (-\Delta W_t \text{ 及 } \Delta W_{T-t} \text{ 是两个时间不重叠布朗}
\end{aligned}$$



运动的增量)

将(8)的  $A$  及(9)的  $B$  代回(6)即是  $P_1$ :

$$P_1 = Se^{-d'}N(d_1)N(-b_2)e^{-r(T-t)} - Se^{-dT}N(d_1)N(-b_1) \quad (10)$$

最后,我们推导重设型卖权评价公式(2.2)内的第二项  $P_2$  如下:

$$\begin{aligned} P_2 &= e^{-rt}E^Q(K - S_T | S_t \leq K, S_T < K)P_r(S_t \leq K, S_T < K) \\ &= e^{-rt} \underbrace{E^Q(K | S_t \leq K, S_T < K)}_K P_r(S_t \leq K, S_T < K) \\ &\quad - e^{-rt}E^Q(S_T | S_t \leq K, S_T < K)P_r(S_t \leq K, S_T < K) \\ &= e^{-rt}KP_r^Q(S_t \leq K, S_T < K) \\ &\quad - e^{-rt}E^Q(S_T | S_t \leq K, S_T < K)P_r(S_t \leq K, S_T < K) \quad (11) \end{aligned}$$

(11)式内的第一项概率计算如下:

$$\begin{aligned} &P_r(S_t \leq K, S_T < K) \\ &= P_r^Q[\ln S_t \leq \ln K, \ln S_T < \ln K] \\ &= P_r^Q[\ln S + (r - d - 0.5\sigma^2)t + \sigma\Delta W_t^Q \\ &\leq \ln K, \ln S + (r - d - 0.5\sigma^2)T + \sigma\Delta W_T^Q \leq \ln K] \\ &= P_r^Q\left[\frac{\Delta W_t^Q}{\sqrt{t}} \leq \frac{\ln(K/S) - (r - d - 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta W_T^Q}{\sqrt{T}} \leq \frac{\ln(K/S) - (r - d - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= P_r^Q\left[-\frac{\Delta W_t^Q}{\sqrt{t}} \leq -\underbrace{\frac{\ln(S/K) - (r - d - 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d_2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta W_T^Q}{\sqrt{T}} \leq -\underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r - d - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{b_2}\right] \\ &= N_2(-d_2, -b_2, \sqrt{t/T}) \quad (12) \end{aligned}$$

此处:  $\sqrt{t/T} = \text{Corr}\left(\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}}\right)$ 。令  $X_1 = \frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}}$ ,  $X_2 = \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}}$ , 因为

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - \underbrace{E(X_1)E(X_2)}_0 = \frac{1}{\sqrt{tT}} E(\Delta W_t \Delta W_T) \\
&= \frac{1}{\sqrt{tT}} E[\Delta W_t (\Delta W_t + \Delta W_{T-t})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{tT}} [E(\Delta W_t^2) + \underbrace{E(\Delta W_t \Delta W_{T-t})}_{\text{零,不重叠增量}}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{tT}} t = \sqrt{t/T}
\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X_1) = 1 = \sigma(X_2) \Rightarrow \rho = \sqrt{t/T}$$

(11)式内的第二项计算如下:

$$\begin{aligned}
&E^Q[S_T | S_t \leq K, S_T < K] P_r[S_t \leq K, S_T < K] e^{-rT} \\
S_T &= S \exp\left[\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \Delta W_T^Q\right] \\
&= E^Q[S_T I_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}] e^{-rT} \\
&= S e^{(r-d)T} E^Q[e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma \Delta W_T^Q} I_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}] e^{-rT} \\
&= S e^{-dT} E^R[I_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}] = S e^{-dT} P^R[S_t \leq K, S_T < K] \\
&= S e^{-dT} P_r^R[\ln S_t \leq \ln K, \ln S_T < \ln K] \\
&= S e^{-dT} P_r^R[\ln S + (r - d + 0.5\sigma^2)t + \sigma \Delta W_t^R \\
&\quad \leq \ln K, \ln S + (r - d + 0.5\sigma^2)T + \sigma \Delta W_T^R < \ln K] \\
&= S e^{-dT} P_r^R\left[\frac{\Delta W_t^R}{\sqrt{t}} \leq \frac{\ln(K/S) - (r - d + 0.5\sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\Delta W_T^R}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(K/S) - (r - d + 0.5\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}}\right] \\
&= S e^{-dT} P_r^R\left[-\frac{\Delta W_t^R}{\sqrt{t}} \leq -\underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r - d + 0.5\sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}}}_{a_1}, \right. \\
&\quad \left. -\frac{\Delta W_T^R}{\sqrt{T}} < -\underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r - d + 0.5\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}}}_{b_1}\right] \\
&= S e^{-dT} N_2(-d_1, -b_1, \sqrt{t/T}) \tag{13}
\end{aligned}$$

此处:  $\sqrt{t/T}$  = 相关系数(见上面)

将(12)及(13)代回(11)的  $P_2$ :

$$P_2 = e^{-rt}KN_2(-d_2, -b_2; \sqrt{t/T}) - Se^{-dt}N_2(-d_1, -b_1; \sqrt{t/T}) \quad (14)$$

最后再将(10)的  $P_1$  及(14)的  $P_2$  代回(2b)即是重设型卖权的评价模型:

$$\begin{aligned} RP &= P_1 + P_2 \\ &= Se^{-dt}N(d_1)N(-b_2)e^{-r(T-t)} - Se^{-dt}N(d_1)N(-b_1) \\ &\quad + e^{-rt}KN_2(-d_2, -b_2; \sqrt{t/T}) - Se^{-dt}N_2(-d_1, -b_1; \\ &\quad \sqrt{t/T}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{此处: } d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r-d+0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S/K) + (r-d+0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

#### 四、价值变动与风险特征

##### 重设型与一般卖权价值的比较

因重设型卖权的评价模型(15)比一般卖权公式复杂,比较困难了解其与标的股价的关系。根据一些假设资料,诸如  $r = 5.5\%$ ,  $d = 2.5\%$ ,  $t = 175$  天/365,  $T = 1$  年,  $\sigma = 35\%$ ,  $K = 1$ , 利用(15)将重设型卖权与股价的关系描述于图 1 表示如下。解释如下:

重设型卖权  $RP$  的第一项  $P_1$  是随着标的股价上升而增加。但第二项  $P_2$  却随着股价上升而下降,这正是卖权的特征,但因  $RP$  具有重设的特征,因此,当股价上升,重设概率增加,  $P_1$  代表重设价值或重设溢酬。它随着股价上升而增加,抵消  $P_2$  的下降。因此,在股价下跌的初期阶段,重设型卖权( $RP$ )的价值会因股价上升而下降。但股价持续上升,增加重设的概率,致使  $P_1$  上升抵消  $P_2$  的下降。直至  $P_1$  及  $P_2$

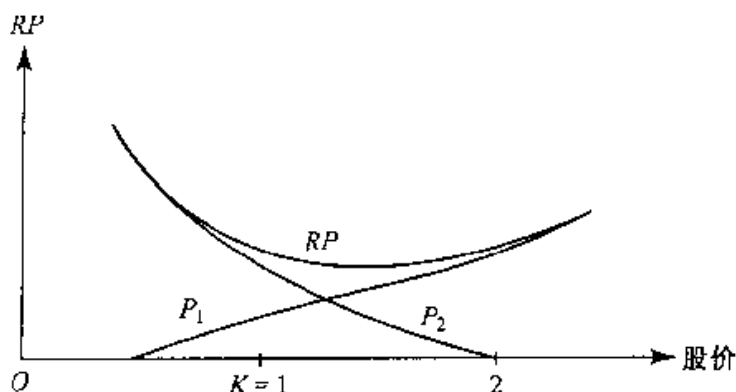
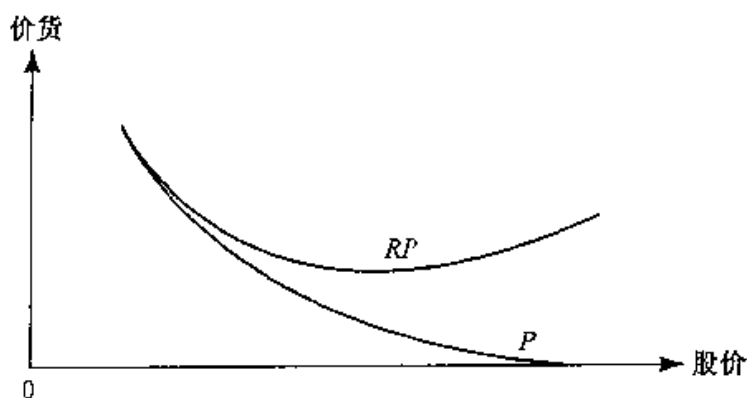


图1 重设型卖权

完全抵消后( $P_1$  及  $P_2$  相交点),重设价值  $P_1$  超过递减的  $P_2$ ,以致  $RP$  缓慢上升。因此,它与一般卖权价值随股价上升而下降的行为不同。这可由图 2 清楚表示。

图2 重设型  $RP$  与一般卖权价值  $P$  比较

注:一般卖权的评价公式为:

$$P = Ke^{-rT}N(-b_2) - Se^{-dT}N(-b_1)$$

### 重设型与一般卖权 Vega 的比较

论点:一般选择权的价值是随着标的标准差( $\sigma$ )的上升而增加。也就是,  $Vega(= \partial P / \partial \sigma)$  是波动度的正函数。重设型卖权的 Vega 也不例外。且因重设型卖权的重设价值(重设溢酬)也是波动度( $\sigma$ )的函数,且重设型卖权的价值大于或等于一般卖权的价值,因此,重设型卖权的

Vega 会大于一般卖权的 Vega。以上的论点也与 Gray 及 Whaley 的图例吻合。以图 3 表示如下：

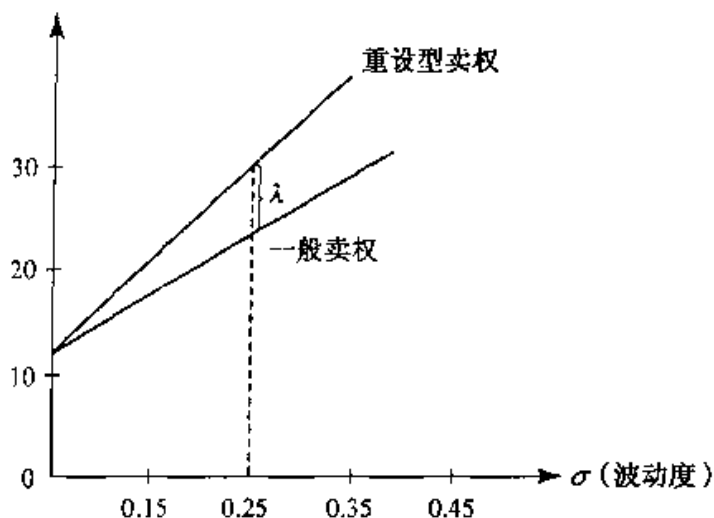


图 3 重设型及一般卖权 Vega 的比较

注： $\lambda$  代表当  $\sigma = 0.25$  时的重设溢价，它随着波动度增加而增加。

一般卖权  $Vega = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = Se^{-dT}n(b_1)\sqrt{T}$ ，(重设型卖权的 Vega 不易求解)。

#### 重设型与一般卖权 Delta 的比较

论点：一般卖权的 Delta 为  $-e^{-dT}N(-b_1)$ 。当标的股价持续上升， $-b_1$  愈小(即负数愈大)， $N(-b_1)$  愈接近零(即当  $S \rightarrow \infty$ ， $N(-b_1) \rightarrow 0$ )。因此，当股价持续上升，卖权 Delta 的负值幅度愈小，且接近零。换言之，当股价上升促使卖权变成深价外时，其 Delta 变成零。正如图 4 所示。但重设型卖权的 Delta 则有不同之处。当股价持续上升，重设的概率增加，卖权价值也逐渐由价内变成价外。直至重设发生时，价外的卖权立即变成价平，因此其价值因重设而增加。也许是这种原因，促使重设型卖权的 Delta 不因股价的持续上升而变成零，但却由负值变成正值，正如图 4 所示。Gray 及 Whaley 的范例验证此事实。

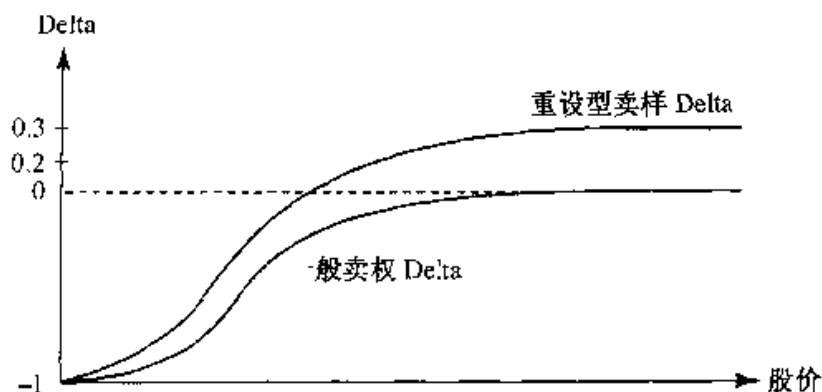


图4 重设型及一般卖权 Delta 比较

### 重设型卖权价值与最佳重设点( $t$ )

论点:重设时点的设定会影响重设型卖权的价值。从两个极端时点先考虑如下:

1. 若重设时点太短(即太靠近原时点),则标的股价上升超越原履约价的机会很小,重设价值低。

2. 若重设时点太长,且接近到期日,则不管是否有重设履约价,因太接近到期日,股价下跌低于履约价的可能性低,因此重设价值也低。根据以上两论点,重设型卖权应存有最佳的重设时点,能极大重设价值,因此重设型卖权的整体价值达到极大。这可由重设型卖权评价模型(15)对重设时点 $t$ 微分,而后证明 $\partial RP/\partial t > 0$ 。数学证明很复杂,且

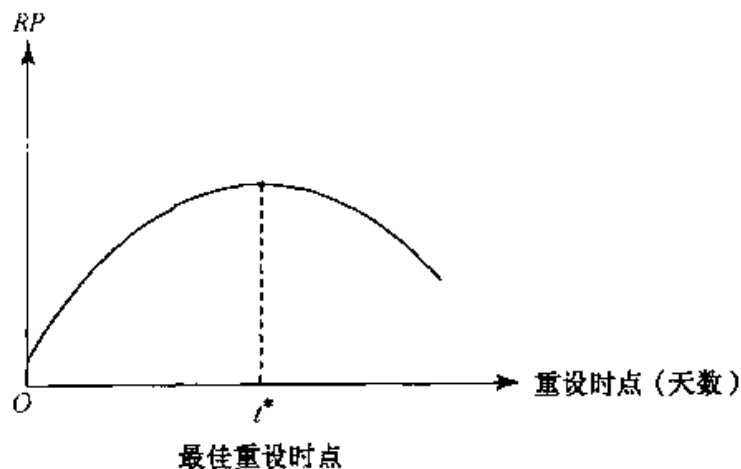


图5 重设型卖权价值与重设时点

有困难判断  $\partial RP / \partial t$  是否大于零。因此,可借由数据范例帮助我们了解  $\partial RP / \partial t$  的行为。Gray 及 Whaley(1999)的范例证明可找出最佳重设时点是  $t^*$ ,正如图 5 所示。

## 五、美式重设型卖权评价

美式重设型卖权并不无封闭解的评价公式,必须采用 CRR 的二元树法求解。一般教科书都有详细介绍如何采用二元树法求解美式选择权。因有重设特征,二元树法的求解必须经过修正调整后,才能进行正如求解一般美式选择权的后推演算(Backward Computation Through Time)。在此我们介绍 Gray 及 Whaley(1999)所采用的二元树求解美式重设型卖权价值。其求解步骤如下:

1. 首先建构一般的二元树,正如图 6 所示。

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ 股价上升率 } (d = 1/u) \quad (16)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (\text{股价往向移动}(u)\text{的概率}) \quad (17)$$

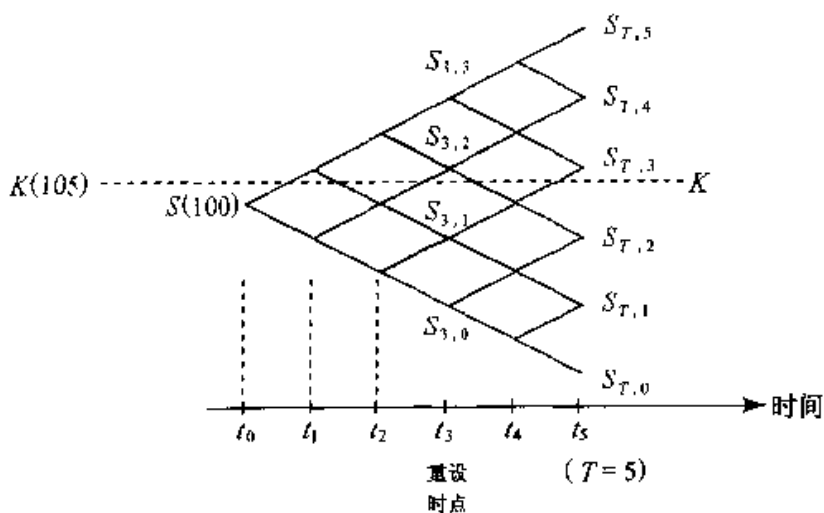


图 6 五期二元树股价图

令  $S_0 = 100$ ,  $K = 105$ , 重设时点为  $t_3$

2. 在重设时点  $t_3$ , 股价  $S_{3,3}$  及  $S_{3,2}$  都超过原履约价  $K (= 105)$ 。因此

(1) 若在  $t_3$ , 股价是  $S_{3,3}$  则履约价重设为  $S_{3,3}$ 。在到期时卖权的价值为:  $\max(K - S_{T,i}, 0)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。所以

$$\left. \begin{aligned} K - S_{T,5} &= S_{3,3} - S_{T,5} \\ K - S_{T,4} &= S_{3,3} - S_{T,4} \\ K - S_{T,3} &= S_{3,3} - S_{T,3} \end{aligned} \right\} \text{重设 } K \text{ 为 } S_{3,3}$$

$$\left. \begin{aligned} K - S_{T,2} &= 105 - S_{T,2} \\ K - S_{T,1} &= 105 - S_{T,1} \\ K - S_{T,0} &= 105 - S_{T,0} \end{aligned} \right\} \text{无重设}$$

(2) 若在  $t_3$ , 股价是  $S_{3,2}$ , 则重设  $K$  为  $S_{3,2}$ 。故在到期时, 卖权的价值为: (暂时省略符号  $\max$ )

$$K - S_{T,5} = S_{3,3} - S_{T,5} \text{ 重设 } K \text{ 为 } S_{3,3}$$

$$\left. \begin{aligned} K - S_{T,4} &= S_{3,2} - S_{T,4} \\ K - S_{T,3} &= S_{3,2} - S_{T,3} \\ K - S_{T,2} &= S_{3,2} - S_{T,2} \end{aligned} \right\} \text{重设 } K \text{ 为 } S_{3,2} \text{ (从 } S_{3,2} \text{ 可到达 } S_{T,4}, S_{T,3} \text{ 及 } S_{T,2})$$

$$\left. \begin{aligned} K - S_{T,1} &= 105 - S_{T,1} \\ K - S_{T,0} &= 105 - S_{T,0} \end{aligned} \right\} \text{无重设 (因 } S_{3,2} \text{ 并不到达 } S_{T,1} \text{ 及 } S_{T,0})$$

(3) 若在  $t_3$ , 股价是  $S_{3,1}$ , 则从  $S_{3,1}$  可到达  $S_{T,3}$ ,  $S_{T,2}$  及  $S_{T,1}$ 。因  $S_{3,1}$  低于  $K$ , 故无重设履约价。卖权的到期价值为

$$K - S_{T,5} = S_{3,3} - S_{T,5}, \text{ 重设 } K \text{ 为 } S_{3,3}$$

$$K - S_{T,4} = S_{3,2} - S_{T,4}, \text{ 重设 } K \text{ 为 } S_{3,2}$$

$$\left. \begin{aligned} K - S_{T,3} &= 105 - S_{T,3} \\ K - S_{T,2} &= 105 - S_{T,2} \\ K - S_{T,1} &= 105 - S_{T,1} \end{aligned} \right\} \text{无重设 } K$$

$$K - S_{T,0} = 105 - S_{T,0} \text{ 无重设 } K$$

(4) 若在  $t_3$ , 股价是最低价位  $S_{3,0}$ , 则无重设履约价发生, 卖权的到期价值与情况(3)相同。

(5) 一旦上面各重设履约价及卖权的到期价值认定后, 重设型卖权价值的求算可正如一般美式卖权的求算, 从最后一期起, 以后推折现演算的方法计算每一期及每一树结(Tree Nodes)美式卖权的价值, 并



与其提前履约价值(Exercise Value,或称内含价值)作比较。若所计算的(美式)卖权价值低于提前履约价值(履约价减当时树结的股价),则提前履约有利,应以提前履约价值取代原先所计算的卖权价值。每一期的每一树结都必须做此种提前履约的比较。完成一期的计算及比较后,再往后推折现一期[从 $t$ 期折现回 $(t-1)$ 期],计算每一树结卖权的价值,并与当时树结的提前履约价值做比较。决定是否有提前履约的利益。如此重复折现并做比较,直回至 $t=0$ ,即可获得美式重设型卖权的价值。读者应首先阅读求算一般美式卖权的二元树法,才能真正了解如何求解美式重设型卖权。

### 参 考 文 献

- F. Black, & M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, p. 637—659.
- J. C. Cox, S. Ross, & M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, p. 229—263.
- S. F. Gray, & R. E. Whaley, 1997, "Valuing Bear Market Reset Warrants with a Periodic Rest", *Journal of Derivatives*, Vol. 5, No. 1, p. 99—106.
- J. C. Hull, 1996, *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 3rd ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Jr., R. J. Rendleman, & B. J. Bartter, 1977, "Two-state Option Pricing", *Journal of Finance*, Vol. 34, p. 1093—1110.
- R. E. Whaley, 1994, "Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue". *Journal of Derivatives*, Vol. 1, p. 71—84.

## 第二十二章 重设型熊市认售权证的创新

### 一、简介

重设型熊市认售权证(Bear Market Warrants)是由国际财务公司(International Finance Corporation, IFC)于 1996 年创新发行,并在纽约股票交易市场(NYSE)及芝加哥选择权交易市场(The CBOE)两地交易。它是以 S&P 500 指数作为标的,但它可于发行后 3 个月重设履约价。也就是说,从原发行日后满 3 个月的交易日,若当天 S&P 500 指数的收盘价格高于原履约价,则该权证的履约价重设为当日指数的收盘价格。这与一般不可重设履约价的指数认售权证(Index Put Warrants)不同。因含有重设履约价的特征,熊市认售证的价值高于一般的指数认权证。熊市认售权证可应用于组合避险,保护投资组合(或共同基金)的价值不因股价下跌遭受损失。但若股价指数不跌反而上升时,保险的面额可随着指数价位上升而重设成为当时指数价位所代表的价值。这种重设特征提供投资组合更有价值的保护,是一般认售权证所不及之处。

重设型熊市认售权证是由 Gray 及 Whaley(1997)所有介绍。在本章中,我们将以 Martingale 的新数学评价方法更详细介绍熊市认售权证的评价,并探讨它的风险特征。

## 二、重设型熊市认售权证的定义

重设型熊市认售权证的到期现金流量  $BMW_p$  (Final Payoffs) 可以公式表示如下: 令  $K$  = 原履约价,  $t$  = 3 个月后的重设日(重设时点)

$$BMW_t = \begin{cases} \frac{S_t - S_T}{S_t}, & \text{若 } S_t > K \text{ 及 } S_T < S_t \\ \frac{K - S_T}{K}, & \text{若 } S_t \leq K \text{ 及 } S_T < K \\ 0, & \text{若 } S_t > K \text{ 及 } S_T \geq S_t \text{ 或 } S_t \leq K \text{ 及 } S_T \geq K \end{cases} \quad (1)$$

$$BMW_t = \begin{cases} \frac{K - S_T}{K}, & \text{若 } S_t \leq K \text{ 及 } S_T < K \\ 0, & \text{若 } S_t > K \text{ 及 } S_T \geq S_t \text{ 或 } S_t \leq K \text{ 及 } S_T \geq K \end{cases} \quad (2)$$

$$0, \text{ 若 } S_t > K \text{ 及 } S_T \geq S_t \text{ 或 } S_t \leq K \text{ 及 } S_T \geq K \quad (3)$$

解释如下:

情况(1): 自发行日后满 3 个月的交易日( $t$ ), 若当天 S&P 500 指数收盘价格  $S_t$  高于原履约价  $K$ , 则履约价重设为当日的收盘价格  $S_t$ 。又在到期时( $T$ ), 若指数价位( $S_T$ )低于已重设的履约价  $S_t$  (即  $S_T < S_t$ ), 则熊市认售权证的到期现金流量  $BMW_T$  以履约价  $S_t$  减掉当时价位  $S_T$ , 当对  $S_t$  做比例计算, 即  $(S_t - S_T)/S_t$ 。

情况(2): 在重设日( $t$ ), 若当天 S&P 500 指数收盘价格低于或等于原履约价 ( $S_t \leq K$ ), 则无重设履约价(仍是原来的  $K$ )。但在到期时, 若指数收盘价格低于原履约价 ( $S_T < K$ ), 则  $BMW_T$  的价值(或现金流量)以  $(K - S_T)/K$  计算。

情况(3): 在重设日( $t$ ), 有重设履约价 ( $\because S_t > K$ )。但在到期时, 指数收盘价格却上涨高于(或等于)重设的履约价(即  $S_T \geq S_t$ ), 则  $BMW_T$  无价值, ( $BMW_T = 0$ )。另一种情况, 是在重设日无重设履约价 ( $\because S_t \leq K$ ), 而且在到期时指数价格却上涨高于(或等于)履约价 ( $S_T \geq K$ ), 则  $BMW_T = 0$  (无现金流量)。

$BMW_T$  的到期现金流量(1)及(2)是以百分比来计算, 在到期日的实际交割结算是 \$50 乘以该比例, 亦即以  $\$50(S_t - S_T)/S_t$  或  $\$50(K - S_T)/K$  来计算交割价值。因 \$50 是一常数倍数, 在下一节评价时, 为简单方便计, 我们将以 \$1 做单位。再将推导的最后结果乘以 \$50 即是最

后的答案。也可以设定任一常数倍数( $\alpha$ ),而后再乘以  $\alpha$  即是。

### 三、Martingale 评价

我们将用 Black-Scholes 的假设,并在风险中立下,指数价格( $S_t$ )的随机变动过程为

$$\frac{dS}{S} = (r - d)dt + \sigma dW^Q \quad (4)$$

此处: $r$  = 无风险利率, $d$  = 指数连续股利率

$\sigma$  = 指数报酬率瞬间标准差

$W$  = 布朗运动

$Q$  = 风险中立概率测度

我们已知,在  $Q$  测度下,股价本身的随机过程(不是变动过程)为

$$S_T = S \exp[(r - d - \sigma^2/2)T + \sigma \Delta W_T^Q] \quad (5)$$

此处:  $\Delta W_T^Q = W_T - W_0$

此外,将  $Q$  测度转换成  $R$  测度:  $dW^Q = dW^R + \sigma dt$ , 则

$$\begin{aligned} d\ln(S_t/S) &= (r - d + \sigma^2/2)dt + \sigma dW^R, \\ \therefore S_t &= S \exp[(r - d + \sigma^2/2)t + \sigma \Delta W_t^R] \end{aligned} \quad (6)$$

此处:  $\Delta W_t^R = W_t - W_0$

上面(4),(5)及(6)将在以下的评价中使用。根据上一节熊市认售权证  $BMW$  的到期现金流量, $BMW$  的评价公式可表示为:

$$\begin{aligned} BMW &= e^{-rT} E^Q \left( \frac{S_t - S_T}{S_t} \middle| S_t > K, S_T < S_t \right) P_t^Q(S_t > K, S_T < S_t) \\ &\quad + e^{-rT} E^Q \left( \frac{K - S_T}{K} \middle| S_t \leq K, S_T < K \right) P_t^Q(S_t \leq K, S_T < K) \\ &= BMW_1 + BMW_2 \end{aligned} \quad (7)$$

此处: $BMW_1$  代表(7)式内的第一大项, $BMW_2$  代表第二大项。

求解第一大项  $BMW_1$  如下:

$$\begin{aligned}
 BMW_1 &= e^{-rT} E^Q \left( \frac{S_t - S_T}{S_t} \middle| S_t > K, S_T < S_t \right) P_r^Q(S_t > K, S_T > S_t) \\
 &= e^{-rT} E^Q(1 \mid S_t > K, S_T < S_t) P_r^Q(S_t > K, S_T > S_t) \\
 &\quad - e^{-rT} E^Q \left( \frac{S_T}{S_t} \middle| S_t > K, S_T < S_t \right) P_r^Q(S_t > K, S_T > S_t) \\
 &= e^{-rT} P_r^Q(S_t > K, S_T < S_t) - e^{-rT} E^Q \left( \frac{S_T}{S_t} \cdot 1_{\{S_T < S_t\}} \right) \\
 &\quad \times E^Q(1_{\{S_t > K\}})
 \end{aligned}$$

此处:在期望值内,  $S_T/S_t$  是从  $t$  至  $T$  的价格比例,它与事件  $\{S_t > K\}$  是独立无关。因此,在第二期望值内,  $1_{\{S_t > K, S_T > S_t\}} = 1_{\{S_T > S_t\}} \cdot 1_{\{S_t > K\}}$ , 且利用  $E(yz) = E(y)E(z)$ ,  $y$  及  $z$  是独立的。

$$\begin{aligned}
 \therefore BMW_1 &= e^{-rT} P_r^Q(S_t > K) P_r^Q(S_T < S_t) - e^{-rT} E^Q(X 1_{\{X < 1\}}) \\
 &\quad \times E^Q(1_{\{S_t > K\}})
 \end{aligned} \quad (8)$$

此处:在概率项内事件  $\{S_t > K\}$  及  $S_T > S_t$  是独立,故拆开成两项概率乘积。又令  $S_T/S_t = X$ , 改写期望值内的符号为  $X$ 。

在(8)式内,我们从以前的 Martingale Pricing 已知

$$P_r^Q(S_t > K) = N(d_2) \quad (9)$$

$$\text{此处: } d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - d - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned}
 P_r^Q(S_T < S_t) &= P_r^Q(X \leq 1), X = S_T/S_t \\
 &= P_r^Q(\ln X \leq 0) = P_r^Q\left(\frac{\ln X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{-\mu_x}{\sigma_x}\right)
 \end{aligned}$$

此处:  $\ln X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) = N((r - d - \sigma^2/2)(T - t), \sigma^2(T - t))$

$\therefore$  在  $Q$  测度下,从(5)我们知道

$$\begin{aligned}
 \ln(S_T/S_t) &= (r - d - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma\Delta W_{T-t} \\
 \therefore \ln X &\sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \\
 \therefore P_r^Q(S_T < S_t) &= N\left(-\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) = N(-d_2^*)
 \end{aligned} \quad (10)$$

此处:  $d_2^* = \frac{\mu_x}{\sigma_x} = \frac{(r-d-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

又

$$\begin{aligned}
 E^Q(X1_{x<1}) &= E^Q\left[\frac{S\exp(r-d-\sigma^2/2)T+\sigma\Delta W_T}{S\exp(r-d-\sigma^2/2)t+\sigma\Delta W_t} \cdot 1_{|x<1|}\right] \\
 &= E^Q[\exp((r-d-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\Delta W_{T-t}) \cdot 1_{|x<1|}] \\
 &= e^{(r-d)(T-t)} E^Q[e^{-\sigma^2(T-t)/2+\sigma W_{T-t}} \cdot 1_{|x<1|}] \\
 &= e^{(r-d)(T-t)} E^R[1_{|x<1|}] \quad (\text{由 } Q \text{ 转换为 } R \text{ 测度}) \\
 &= e^{(r-d)(T-t)} P_r^R(X < 1) \\
 &= e^{(r-d)(T-t)} P_r^R(\ln X < 0) \\
 &= e^{(r-d)(T-t)} P_r^R\left(\frac{\ln X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{-\mu_x}{\sigma_x}\right) \\
 &= e^{(r-d)(T-t)} N\left(\frac{-\mu_x}{\sigma_x}\right) = e^{(r-d)(T-t)} N(-d_2^*) \quad (11)
 \end{aligned}$$

$BMW_1$  的最后一项是

$$E^Q(1_{|S_t>K|}) = P_r(S_t > K) = N(d_2) \quad (12)$$

最后将(9)、(10)、(11)及(12)代回(8)式即是  $BMW$  的第一大项:

$$\begin{aligned}
 BMW_1 &= e^{-rT} N(d_2) N(-d_2^*) - e^{-rT} e^{(r-d)(T-t)} N(-d_2^*) N(d_2) \\
 &= e^{-rT} N(d_2) N(-d_2^*) [1 - e^{(r-d)(T-t)}] \quad (13)
 \end{aligned}$$

再次求解(7)式  $BMW_2$  项:

$$\begin{aligned}
 BMW_2 &= e^{-rT} E^Q\left(\frac{K-S_T}{K} \mid S_t \leq K, S_T < K\right) P_r^Q(S_t \leq K, S_T < K) \\
 &= e^{-rT} E^Q(1 \mid S_t \leq K, S_T < K) P_r^Q(S_t \leq K, S_T < K) \\
 &\quad - \frac{1}{K} e^{-rT} E^Q(S_T \mid S_t \leq K, S_T < K) \cdot P_r^Q(S_t \leq K, S_T < K) \\
 &= e^{-rT} P_r(S_t \leq K, S_T < K) \\
 &\quad - \frac{e^{-rT}}{K} E^Q(S_T \mid S_t \leq K, S_T < K) P_r^Q(S_t \leq K, S_T < K) \quad (14)
 \end{aligned}$$

(14)式内的概率求算如下:

$$\begin{aligned}
 & P_r(S_t \leq K, S_T < K) \\
 &= P_r[\ln(S_t/S) \leq \ln(K/S), \ln(S_T/S) < \ln(K/S)] \\
 &= P_r\left[\left(r-d-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\Delta W_t \leq \ln(K/S), \left(r-d-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\Delta W_T < \ln(K/S)\right] \\
 &= P_r\left[\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{\ln(K/S) - \left(r-d-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}} < \frac{\ln(K/S) - \left(r-d-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
 &= P_r\left[\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}} \leq -\underbrace{\frac{\ln(S/K) + \left(r-d-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d_2}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}} < \underbrace{-\frac{\ln(S/K) - \left(r-d-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{b_2}\right] \\
 &= P_r\left[\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}} \leq -d_2, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}} \leq -b_2\right] = N_2(-d_2, -b_2; \sqrt{t/T})
 \end{aligned} \tag{15}$$

此处:  $\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}} = N(0, 1) = \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}}$ ,  $\Delta W_t \sim N(0, t)$ ,  $\Delta W_T \sim N(0, T)$

且

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}\left(\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{Tt}} \text{Cov}(\Delta W_t, \Delta W_T) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{Tt}} \text{Cov}[\Delta W_t, \overbrace{\Delta W_t + (W_{t+dt} - W_T)}^{\Delta W_T}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{Tt}} [\overbrace{\text{Cov}(\Delta W_t, \Delta W_t)}^{\text{Var}(\Delta W_t)} + \underbrace{\text{Cov}(\Delta W_t, W_{t+dt} - W_T)}_0]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Tt}} \cdot t = \sqrt{\frac{t}{T}}$$

$$\therefore \text{Corr}\left(\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}}\right) = \frac{\sqrt{t/T}}{1 \cdot 1} = \sqrt{t/T}$$

(14)式内的第二项:

$$\begin{aligned} & E^Q(S_T | S_t \leq K, S_T < K) P^Q(S_t \leq K, S_T < K) \\ &= E^Q(S_T 1_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}) \\ &= E^Q[Se^{(r-d-\sigma^2/2)T+\sigma(W_T-W_0)} \cdot 1_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}] \\ &= e^{(r-d)T} S \cdot E^Q[e^{-\sigma^2 T/2+\sigma(W_T-W_0)} \cdot 1_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}] \\ &= e^{(r-d)T} SE^R[1_{\{S_t \leq K, S_T < K\}}] \end{aligned}$$

(此处利用 Girsanov 定理:

$$e^{\xi_T} = e^{-\sigma^2 T/2+\sigma(W_T-W_0)} = e^{\int_0^T \sigma dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 ds} \Rightarrow \beta = \sigma$$

$\therefore$  由  $Q$  转换成  $R$  测度为:

$$dW^Q = dW^R + \beta dt = dW^R + \sigma dt$$

则  $S_t$  的随机过程正如(6)所示)

$$\begin{aligned} &= e^{(r-d)T} SP_r^R[S_t \leq K, S_T < K] \\ &= e^{(r-d)T} SP_r[\ln(S_t/S) \leq \ln(K/S), \ln(S_T/S) < \ln(K/S)] \\ &= e^{(r-d)T} SP_r[(r-d+\sigma^2/2)t + \sigma\Delta W_t \leq \ln(K/S), (r-d+\sigma^2/2)T \\ &\quad + \sigma\Delta W_T < \ln(K/S)] \\ &= e^{(r-d)T} SP_r\left[\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}} \leq \frac{\ln(K/S) - (r-d+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}} \right. \\ &\quad \left. < \frac{\ln(K/S) - (r-d+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= e^{(r-d)T} SP_r\left[\frac{\Delta W_t}{\sqrt{t}} \leq - \underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r-d+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d_1}, \frac{\Delta W_T}{\sqrt{T}} \right. \\ &\quad \left. < - \underbrace{\frac{\ln(S/K) + (r-d+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{b_1}\right] \end{aligned}$$



$$= e^{(r-d)T} SN_2(-d_1, -b_1; \sqrt{t/T}) \quad (\rho = \sqrt{t/T}) \quad (16)$$

将(15)及(16)代回(14):

$$\begin{aligned} BMW_2 &= e^{-rT} N_2(-d_2, -b_2; \sqrt{t/T}) \\ &\quad - \frac{e^{-rT}}{K} e^{(r-d)T} SN_2(-d_1, -b_1; \sqrt{t/T}) \end{aligned} \quad (17)$$

最后将(13)的  $BMW_1$  及(17)的  $BMW_2$  代回(7)即可获得重设型熊市认售权证的评价模型如下:

$$\begin{aligned} BMW &= BMW_1 + BMW_2 \\ &= e^{-rT} N(d_2) N(d_2^*) (1 - e^{(r-d)(T-t)}) \\ &\quad + e^{-rT} N_2(-d_2, -b_2; \sqrt{t/T}) \\ &\quad - e^{-dT} (S/K) N_2(-d_1, -b_1; \sqrt{t/T}) \end{aligned} \quad (18)$$

此处:  $d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r-d+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

$$d_2^* = \frac{(r-d-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S/K) + (r-d+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

#### 四、风险特征

1. 重设型熊市认售权证与一般指数认售权证(Index Put Warrants)的比较

Gray 及 Whaley(1997)的假设资料:  $r = 5\%$ ,  $d = 2\%$ ,  $\sigma = 20\%$  (指数报酬率标准差),  $t = 90$  天 (重设日),  $K = 1$ ,  $S = 1$ 。他们将  $BMW$  及一般指数认售权证的价值做比较,并以图 1 表示如下。

解释:

(1) 当指数价位  $S$  上升,重设履约价的概率上升,因此  $BMW$  的价

值大于一般指数认售权证的价值  $P$ 。虽然  $BMW$  价值也随指数价位上升而下降,但其下降速度比  $P$  值下降速度慢,且  $BMW$  的价值却有呈现稳定水平的现象,不再因指数价位上升而再度下降。

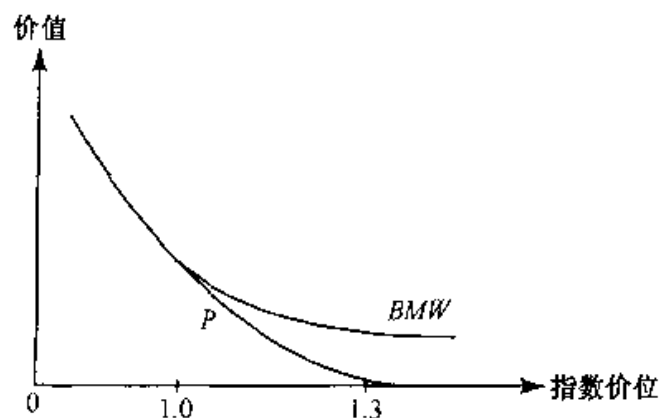


图1 重设型熊市认售权证及一般指数认售权证

(2) 但当  $S$  下降低于原履约价 ( $K = 1$ ) 时  $BMW$  的重设概率降低,因此  $BMW$  上升趋近  $P$  的价值。

2. 重设型熊市认售权证  $BMW$  与一般认售权证  $Vega_P$  的比较正如前一章重设型卖权(图3),  $BMW$  的  $Vega$  大于一般认售权证的  $Vega_P$ 。也就是说,在同一指数波动度( $\sigma$ )下,  $Vega_{BMW} > Vega_P$ 。其结果与前一章的图3相似。再此,重复以图2表示如下:

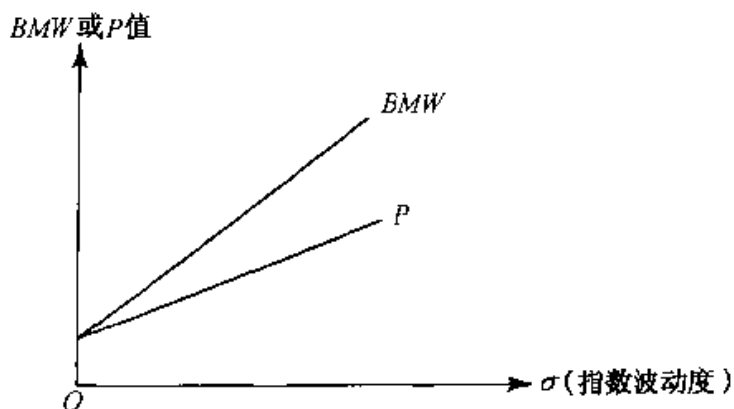


图2  $Vega_{BMW}$  及  $Vega_P$

3. 重设型熊市认售权证与一般认售权证  $\Delta$  之比较以 Gray 及 Whaley(1997)的范例。图3表示如下:

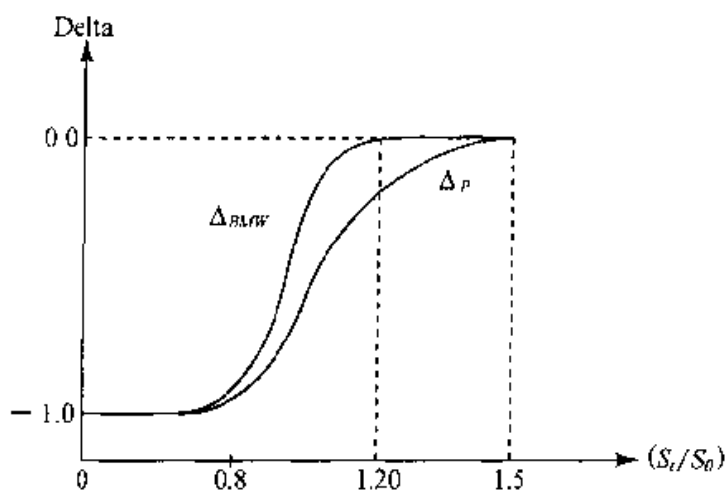


图3 BMW及Put的Delta

注：因BMW是基于现在价位( $S_t$ )及期初价位( $S_0$ )的比率( $S_t/S_0$ )。图3的Delta也以比率计算。因此要将BMC及P的Delta转换成指数的单位时，应将Delta( $\Delta$ )乘以期初价位( $S_0$ )，表示如下：

$$\Delta_{BMC}(S_0) = \text{指数单位(BMW的避险部位)}$$

$$\Delta_P(S_0) = \text{指数单位(P的避险部位)}$$

解释：当指数价位(比率价位 $S_t/S_0$ )上升时，BMW的Delta( $\Delta_{BMW}$ )比一般认售权的Delta( $\Delta_P$ )上升快，且当( $S_t/S_0$ )接近1.2时， $\Delta_{BMW}$ 接近零，但 $\Delta_P$ 尚未接近零。在1.2以上时， $\Delta_{BMW} = 0$ ，但不超过1。而 $\Delta_P$ 必须在价位1.5时才会接近零。

#### 4. 重设溢酬

正如前一章的重设型卖权，BMW的重设溢酬会随着指数波动度增加而增加，这是因为波动度增加，提高重设的概率，因此重设价值增加。此外，在固定波动度下，BMW的重设概率也随着指数价位上升而增加，因此BMW的重设溢酬也增加。

### 五、美式重设型熊市认售权证

因国际财务公司(IFC)所发行的BMW是属于美式权证，故其评

价必须以数值分析方法求解。在前一章中,我们已有介绍如何以二元树方法求解美式重设型卖权。其方法仍适用于评价美式 BMW,故在此不再重述。

## 参 考 文 献

- F. Black & Scholes, M. 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, p. 637—659.
- J. C. Cox, S. Ross, & M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, p. 229—263.
- S. F. Gray & R. E. Whaley, 1997, "Valuing Bear Market Reset Warrants with a Periodic Reset", *Journal of Derivatives*, Vol. 5, No. 1, p. 99—106.
- J. C. Hull, 1996, *Options, Futures, and Other derivative Securities*, 3rd edn. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Jr., R. J. Rendleman & B. J. Bartter, 1977, "Two-state Option Pricing", *Journal of Finance*, Vol. 34, p. 1093—1110.
- R. E. Whaley, 1994, "Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue", *Journal of Derivatives*, Vol. 1, p. 71—84.

## 第二十三章 多点重设型选择权

### 一、简介

在前两章中我们已介绍(单点)重设型卖权(Reset Put Options)及重设型熊市认售权证(Bear Market Put Warrants)。这些重设型的选择权已在澳洲、纽约(NYSE)、芝加哥(CBOE)、中国香港、中国台湾及日本等金融市场相继出现。在澳洲是由银行发行(单点)重设型卖权,提供投资人融资时对股票抵押品的保险(规避股价下跌的风险)。在纽约的 NYSE 及芝加哥的 CBOE 有重设型熊市认售权证的上市交易(是由国际财务公司所发行)。在中国台湾有宝来、建弘、元大等多家券商发行的回顾型多层重设认购权证。在中国香港由摩根斯坦利(Morgan Stanley)在 1997 年 6 月发行的公司债(Resettable Convertible Bonds)。这些可重设型的选择权不但评价困难,且在避险时也有 Delta 跳跃(Delta Jumps)的现象,因此避险难度高,容易产生损失。在 1997,UBS(瑞士联合银行)因在日本重设型可转换公司债的套利失败,而产生巨大的损失(1.9 亿美元)。

多点重设型选择权的评价及避险参数是相当复杂且很难求解。Cheng 及 Zhang(2000)的论文首次对多点重设的选择权进行评价及避险参数的研究。在本章中,我们将另外加入股利因素的考量,以期使模型更形概化(A Generalization),并以 Martingale 评价方法详细介绍多点重设型选择权的评价及避险参数。

## 二、重设程序及到期现金流量

在风险中立下,有风险资产的价格变动随机过程可表示为:

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma dW \quad (1)$$

此处:  $q$  = 标的资产的连续股利率(或收益率)

$W$  = 标准布朗运动 =  $N(0, dt)$

令重设型选择权的有效期间为  $T$ (即从 0 至  $T$ ),可重设的时点有  $n$  个时点,分别为  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ 。  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = T$ 。  $K$  为原履约价(在  $t_0$  时的履约价)。重设型买权履约价的重设程序可表示如下:

$$K(t_i) = \begin{cases} S(t_i), & \text{若 } S(t_i) < K(t_{i-1}), \text{重设} & (2a) \\ K(t_{i-1}), & \text{若 } S(t_i) \geq K(t_{i-1}), \text{无重设} & (2b) \end{cases}$$

此处:  $K(t_i)$  = 在时间  $t_i$  的履约价 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ )

(2a)的解释:在任何重设点  $t_i$ ,若当时股价  $S(t_i)$  低于前期的履约价  $K(t_{i-1})$ ,则履约价重设为当时的股价  $S(t_i)$ 。故  $K(t_i) = S(t_i)$ 。

(2b)的解释:在任何重设点  $t_i$ ,若当时股价  $S(t_i)$  高于或等于前期的履约价,则履约价不重设,仍是前期的履约价。故  $K(t_i) = K(t_{i-1})$ 。

(2)式的定义可改写为:

$$\begin{aligned} K(t_i) &= \min[K(t_{i-1}), S(t_i)] \\ &= \min\{\min[K(t_{i-2}), S(t_{i-1})], S(t_i)\} \\ &\quad (\text{重复利用第一等式的定义}) \\ &= \min\{K(t_{i-2}), S(t_{i-1}), S(t_i)\} \\ &= \min\{K(t_{i-3}), S(t_{i-2}), S(t_{i-1}), S(t_i)\} \\ &= \min\{K, S(t_1), S(t_2), \cdots, S(t_i)\} \\ &\quad (\text{重复利用第一等式的定义 } i \text{ 次}) \end{aligned} \quad (3)$$

同样重设型卖权履约价的重设过程为:

$$K(t_i) = \begin{cases} S(t_i), & \text{若 } S(t_i) > K(t_{i-1}), \text{重设} & (4a) \\ K(t_{i-1}), & \text{若 } S(t_i) \leq K(t_{i-1}), \text{无重设} & (4b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore K(t_i) &= \max[K(t_{i-1}), S(t_i)] \\ &= \max[\max[K(t_{i-2}), S(t_{i-1})], S(t_i)] \\ &= \max[K(t_{i-2}), S(t_{i-1}), S(t_i)] \\ &= \max[K, S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_i)] & (5) \\ &\quad (\text{重复利用第一等式的定义 } i \text{ 次}) \end{aligned}$$

### 三、多点重设型买权的评价及避险参数

根据该类型买权的到期现金流量(The Final Payoff)及重设履约价(3)的定义,在风险中立下,该买权的价值可表示为:

$$c = e^{-rT} E[S(T) - K(t_n)]^+ \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-rT} E[S(T) - \min K, S(t_1), \dots, S(t_n)]^+ \\ &= e^{-rT} \sum_{i=1}^n E\{[S(T) - S(t_i)]^+ I_{|S(t_i) = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)]}\} \\ &\quad + e^{-rT} E\{[S(T) - K]^+ I_{|K = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)]}\} \end{aligned} \quad (7)$$

此处:(7)式的第一指标函数(The Indicator Function)表示,在重设时点  $t_i$ , 当时的股价  $S(t_i)$  可能会是  $(0, T)$  期间的最低价格,因此是交割的最后履约价。因有  $n$  个重设时点,会有  $n$  个可能是最低的重设履约价  $S(t_i)$ 。

(7)式的第二指标函数代表另一种履约价重设情况,即无重设发生,  $K$  仍是原来的履约价。这是因为在重设点若股价都是高于或等于原履约价  $K$ , 则无重设发生。

对(7)式内的第一及第二项期望值可以 Martingale 评价方法求解。因其推导过程很长且困难复杂,我们将此部分的证明报告于附录一。其结果在此表示如下:

$$\begin{aligned}
c &= e^{-rT} E[E(S_T) - K(t_n)]^+ \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ S_0 e^{-qt_i} N(c_0, \dots, c_{i-1}, \sum_i) [N(c_{i+1}, \dots, c_{n+1}, \overline{\sum_i}) \right. \\
&\quad \left. - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c}_{i+1}, \dots, \hat{c}_{n+1}, \overline{\sum_i})] \right\} \\
&\quad + S_0 e^{-qT} N(d_1, \dots, d_{n+1}, \widetilde{\sum_i}) - K e^{-rT} \\
&\quad \times N(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{n+1}, \sum_i) \quad (8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \{ S_0 e^{qt_i} N(c) [\overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] \} \\
&\quad + S_0 e^{-qT} N(d) - K e^{-rT} N(\hat{d}) \quad (8b)
\end{aligned}$$

此处:为方便计,以下列简单符号表:

$$\begin{aligned}
N(c) &= N(c_0, \dots, c_{i-1}, \sum_i) \\
\overline{N}(c) &= N(c_{i+1}, \dots, c_{n+1}, \overline{\sum_i}) \\
N(\hat{c}) &= N(\hat{c}_{i+1}, \dots, \hat{c}_{n+1}, \overline{\sum_i}) \\
N(\hat{d}) &= N(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{n+1}, \widetilde{\sum_i}) \\
N(d) &= N(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}, \widetilde{\sum_i})
\end{aligned}$$

$N(\cdot, \sum)$  代表多变量正态分布的累积概率,其期望值向量为零向量,其变量矩阵为  $\sum$ 。

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)t_i}{\sigma \sqrt{t_i}} \\
c_k &= -\frac{(r - q - \sigma^2/2)(t_i - t_k)}{\sigma \sqrt{t_i - t_k}} \quad (1 \leq k \leq i-1) \\
c_k &= \frac{(r - q + \sigma^2/2)(t_k - t_i)}{\sigma \sqrt{t_k - t_i}} \quad (i-1 \leq k \leq n+1)
\end{aligned}$$



$$\hat{c}_k = \frac{(r - q - \sigma^2/2)(t_k - t_i)}{\sigma\sqrt{t_k - t_i}} \quad (i+1 \leq k \leq n+1)$$

共变量矩阵为:

$$\Sigma_i = (\Sigma_{jk}^i)_{1 \leq j, k \leq i} \quad \text{及} \quad \overline{\Sigma}_i = (\overline{\Sigma}_{jk}^i)_{1 \leq j, k \leq i}$$

共变量矩阵的代表原素为:

$$\Sigma_{jk}^i = \frac{\sqrt{t_i - t_{k-1}}}{\sqrt{t_i - t_{j-1}}} \quad (1 \leq j, k \leq i)$$

$$\overline{\Sigma}_{jk}^i = \frac{\sqrt{t_{i+j} - t_i}}{\sqrt{t_{i+k} - t_i}} \quad (1 \leq j, k \leq n+i-1)$$

注:若  $i=2$ , 则  $1 \leq j, k \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} \Sigma_{jk}^i &= (\Sigma_{jk}^2)_{1 \leq j, k \leq 2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_2 - t_0}} & \frac{\sqrt{t_2 - t_1}}{\sqrt{t_2 - t_0}} \\ \frac{\sqrt{t_2 - t_0}}{\sqrt{t_2 - t_1}} & \frac{\sqrt{t_2 - t_1}}{\sqrt{t_2 - t_1}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow j=1 \\ \leftarrow j=2 \end{matrix} \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ K=1 & K=2 \end{matrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0}} \\ \sqrt{\frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_1}} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$d_k = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}, \quad 1 \leq k \leq n+1$$

$$\hat{d}_k = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)t_k}{\sigma\sqrt{t_k}}, \quad 1 \leq k \leq n+1$$

$$\widetilde{\Sigma} = \Sigma_0$$

### 多点重设型买权评价公式(8a)或(8b)的意义

1. 因该类型买权含有多时点重设履约价的特征,其价值高于一般(无重设履约价)买权的价值。Cheng 及 Zhang(2000)的范例结果证明:在任何波动度( $\sigma$ )及利率水准  $r$  下,不管期初股价  $S_0$  的高低,单点、两点及 3 点可重设履约价的买权价值都高于一般(对应无重设)买权的价值。此外,可重设时点愈多,其价值愈大。

2. 该类型买权的价值可视为一系列远期生效买权(Forward-Start Call Options)价值加上一个(有条件)买权(Conditional Call)价值之和。原因如下:

若将(7)式内的指标函数暂时忽略,则该类型买权的价值可表示为

$$c = e^{-rT} \sum_{i=1}^n E[S(T) - S(t_i)]^+ + e^{-rT} E[(S_T - K)]^+ \quad (9)$$

(9)式内:

$$\begin{aligned} e^{-rT} E[S(T) - S(t_i)]^+ &= \text{在未来(远期)} t_i \text{ 生效的远期买权价值} \\ &= S_0 e^{rt_i} [N(d^*) - e^{-r(T-t_i)} N(d^* - \sigma\sqrt{T-t_i})] \\ &\quad (\text{参见 Zhang(1997), p. 186}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{此处: } d^* = \frac{(r - q + \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}$$

$$d^* - \sigma\sqrt{T - t_i} = \frac{(r - q - \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n e^{-rT} E[S(T) - S(t_i)]^+ = n \text{ 个远期生效买权价值之和, 每一个远期买权是在 } t_i \text{ 生效, 履约价为当时生效的股价 } S(t_i)。$$

若将指标函数  $I_{\{S(t_i) = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)]\}}$  放回, 则上面  $n$  项之和代表  $n$  个有条件远期生效买权价值之和, 每一个条件是, 在重设时点的股价  $S(t_i)$  是最低价, 才能构成重设履约价。

此外, (9)式的第二项代表以  $K$  为履约价的买权价值。将指标函数  $I_{\{K = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)]\}}$  放回, 则它代表有条件的买权价值, 其条件为

$K$  是最低的重设履约价。因此, 多点重设型买权的价值可视为一系列有条件的远期生效买权价值加上一个有条件的买权价值之和。

多点重设型买权的 Delta 及 Gamma (为方便计, 令  $q = 0$ )

$$\begin{aligned}\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S_0} = & \sum_{i=1}^n \left\{ [\bar{N}(c) - e^{r(T-t_i)} N(\hat{c})] \left[ N(c) - \frac{1}{\sigma \sqrt{t_i}} \frac{\partial N(c)}{\partial c_0} \right] \right\} \\ & + N(d) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(d)}{\partial d_k} \\ & + e^{-rT} \left( \frac{K}{S_0} \right) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(\hat{d})}{\partial d_k}\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_c = \frac{\partial^2 c}{\partial S_0^2} = & \frac{1}{S_0} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(d)}{\partial d_k} - \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{t_k} \sqrt{t_i}} \frac{\partial^2 N(d)}{\partial d_k \partial d_i} \\ & + e^{rT} \left( \frac{K}{S_0^2} \right) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(\hat{d})}{\partial d_k} \\ & - e^{rT} \left( \frac{K}{S_0^2} \right) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{t_k} \sqrt{t_i}} \frac{\partial^2 N(\hat{d})}{\partial d_k \partial d_i} \\ & + \sum_{k=1}^n [\bar{N}(c) - e^{r(T-t_k)} N(\hat{c})] \left( \frac{1}{S_0} \right) \\ & \times \left[ \frac{-1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(c)}{\partial d_0} + \frac{1}{\sigma^2 t_k} \frac{\partial^2 N(c)}{\partial c_0^2} \right]\end{aligned}\quad (12)$$

在此, 我们对  $\Delta_c$  作详细的推导如下:

微分(8b)的最后一项:

$$\begin{aligned}K e^{-rT} \frac{\partial N(\hat{d})}{\partial S_0} &= K e^{-rT} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial N(\hat{d})}{\partial d_k} \frac{\partial d_k}{\partial S_0} \\ &= K e^{-rT} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial N(\hat{d})}{\partial d_k} \left( \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t_k}} \right) \\ &= e^{-rT} \left( \frac{K}{S_0} \right) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(\hat{d})}{\partial d_k} \\ N(\hat{d}) &= N(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_{n+1}, \sum)\end{aligned}\quad (13)$$

微分(8b)的第二项:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial S_0}(S(t_0)N(d)) &= N(d) + S_0 \frac{\partial N(d)}{\partial S_0}, N(d) \\
 &= N[d_1, d_2, \dots, d_{n+1}, \widehat{\sum}] \\
 &= N(d) + S_0 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial N(d)}{\partial d_k} \frac{\partial d_k}{\partial S_0} \\
 &= N(d) + S_0 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial N(d)}{\partial d_k} \left( \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t_k}} \right) \\
 &= N(d) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(d)}{\partial d_k} \quad (14)
 \end{aligned}$$

微分(8b)的第一大项:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial S_0} [S_0 N(c) (\overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c}))] \\
 &\left[ \begin{array}{l} N(c) = N(c_0, c_1, \dots, c_{i-1}, \sum_i) \\ \overline{N}(c) = N(c_{i+1}, \dots, c_{n+1}, \sum_i) \\ N(\hat{c}) = N(\hat{c}_{i+1}, \dots, \hat{c}_{n+1}, \overline{\sum}_i) \end{array} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial S_0} (S_0 N(c)) (\overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})) \right. \\
 &\quad \left. + S_0 \widetilde{N}(c) \frac{\partial}{\partial S_0} [N(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(c) + S_0 \frac{\partial N(c)}{\partial S_0} \right] [\overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] \right. \\
 &\quad \left. + S_0 N(c) \left[ \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{\partial \overline{N}(c)}{\partial c_k} \underbrace{\frac{\partial c_k}{\partial S_0}}_0 - e^{-r(T-t_i)} \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{\partial N(\hat{c})}{\partial \hat{c}_k} \underbrace{\frac{\partial \hat{c}_k}{\partial S_0}}_0 \right] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(c) + S_0 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial N(c)}{\partial c_k} \frac{\partial c_k}{\partial S_0} \right] [\overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] \right\} \\
 &\quad \left( \frac{\partial c_k}{\partial S_0} = 0 = \frac{\partial \hat{c}_k}{\partial S_0} (c_k \text{ \& } \hat{c}_k \text{ 不是 } S_0 \text{ 的函数}) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(c) + S_0 \frac{\partial N(c)}{\partial c_0} \frac{-1}{S_0 \sigma \sqrt{t_i}} \right] [\overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial c_0}{\partial S_0} = \frac{-1}{S_0 \sigma \sqrt{t_i}}; \frac{\partial c_k}{\partial S_0} = 0 \ (1 \leq k \leq n) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ [\bar{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] \left[ N(c) - \frac{1}{\sigma \sqrt{t_i}} \frac{\partial N(c)}{\partial c_0} \right] \right\} \quad (15)$$

将以上 3 项微分加总起来就是买权的 Delta (11) [= (13) + (14) + (15)]。对  $\Delta_c$  的  $S_c$  再度微分一次,并整理即可得  $\Gamma_c$ 。在此不再重述。

### 多点重设型买权避险的困难

在每一重设时点  $t_i$ , 买权的履约价可能会重设。若在  $t_i$  时点的股价  $S(t_i)$  高于前一期的履约价  $K(t_{i-1})$ , 则履约价重设等于当时的股价, 即  $K(t_i) = S(t_i)$ 。在重设期  $t_i$  的前后,  $\Delta_c(\Delta_c)$  一定会有突然的跳跃 (Delta Jumps) 或断层 (Delta Breaks)。这是因为在  $t_i$  之前的  $\Delta_c(t_i^-)$  是根据履约价  $K(t_{i-1})$ ,  $t_i^-$  代表在  $t_i$  之前的时间。但在  $t_i$ , 当  $S(t_i) > K(t_{i-1})$  时, 买权因履约价而重设成为价平, 而新的  $\Delta_c(t_i)$  是以新履约价  $S(t_i)$  来计算。因此, 买权的 Delta 突然间由较低的  $\Delta_c(t_i^-)$  往上窜升至较高的  $\Delta_c(t_i)$  (因由价外的 Delta 突然上升变成价平的 Delta), 产生了跳跃 (或断层) 的现象。这在实务避险时会发生很大的困难。在  $t_i$  时, 当股价接近前履约价  $K(t_{i-1})$  可往上升越过而发生重设履约价。也可能股价不超越  $K(t_{i-1})$  而无重设。在此时对买权 Delta 的拿捏选择很难决定。

### 多点重设型买权的 Delta 大于零 ( $\Delta_c > 0$ )

当股价  $S_0$  趋近零时 ( $S_c \rightarrow 0$ ), 一般选择权的 Delta 趋近零 ( $\because$  当  $S_0 \rightarrow 0$ , 则  $d_1 \rightarrow -\infty$  及  $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \rightarrow -\infty$ ,  $\therefore N(d_1) \rightarrow 0$  及  $N(d_2) \rightarrow 0$ )。但多点重设型买权的 Delta 仍会大于零, 即使  $S_0 \rightarrow 0$ 。原因如下: 当  $S_c \rightarrow 0$ , (8) 式内的  $N(d) \rightarrow 0$  及  $N(\hat{d}) \rightarrow 0$  ( $\because d \rightarrow -\infty$  及  $\hat{d} \rightarrow -\infty$ ,  $c_0 \rightarrow \infty$ )。因此当  $S_0 \rightarrow 0$  时, (11) 可改写成:

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n N(c) [\bar{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c})] > 0$$

$$(\because c > \hat{c} \Rightarrow \bar{N}(c) > N(\hat{c}))$$

因此,即使标的股价  $S_0$  大幅下跌至很低点,其 Delta 仍不会为零,因此仍必须保持避险部位。这是因为即使股价低,因含有多点重设的特征,股价可能日后回升,而产生重设履约价,故  $\Delta_i > 0$ 。Cheng 及 Zhang (2000)的范例比较一般买权 Delta、单点及两点重设型买权 Delta。再此重复他们的图解(见图 1)。

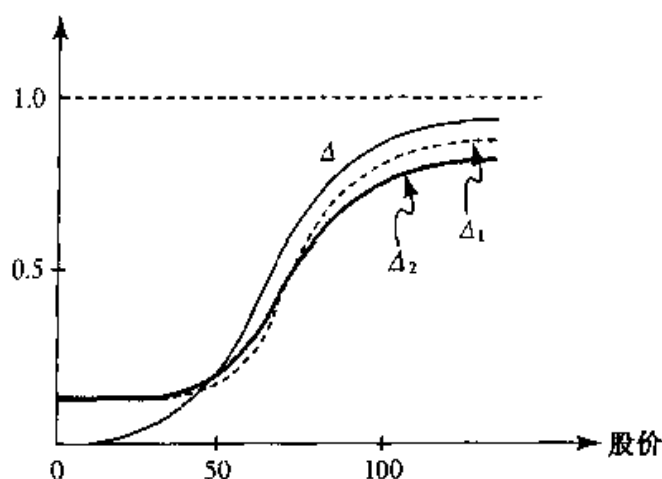


图 1 一般买权、单点及两点重设型买权 Delta 的比较

注:  $\Delta$  = 一般买权 Delta

$\Delta_1$  = 单点重设型买权 Delta(以虚线表示)

$\Delta_2$  = 二点重设型买权 Delta(以粗实线表示)

#### 四、多点重设型卖权的评价及避险参数

根据该类型卖权的到期现金流量(4a)及(4b)以及重设履约价(5)的定义,在风险中立下该卖权的价值可表示为:

$$P = e^{-rT} E[K(t_i) - S(T)]^+ \quad (16)$$

$$= e^{-rT} E[\max(K, S(t_1), \dots, S(t_n)) - S(T)]^+ \quad (\text{利用(5)})$$

$$= e^{-rT} \sum_{i=1}^n [E(S(t_i) - S(T)) I_{|S(t_i) = \max\{K, S(t_1), \dots, S(t_{i-1})\}}] \\ + e^{-rT} E(K - S(T)) I_{|K = \max\{K, S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_{n+1})\}}] \quad (17a)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n S_0 e^{-qt_i} N(h) [e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h})] + K e^{-rT} N(g) \\
&\quad - S_0 e^{-qT} N(\hat{g}) \quad (17b)
\end{aligned}$$

此处:  $N(h) = N(h_0, \dots, h_{i-1}, \sum_i)$

$$\bar{N}(h) = N(h_{i+1}, \dots, h_{n+1}, \sum_i)$$

$$N(\hat{h}) = N(\hat{h}_{i-1}, \dots, \hat{h}_{n+1}, \sum_i)$$

$$N(g) = N(g_0, \dots, g_{n+1}, \sum_0)$$

$$N(\hat{g}) = N(\hat{g}_0, \dots, \hat{g}_{n+1}, \sum_0)$$

$$h_0 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)t_i}{\sigma \sqrt{t_i}} \quad (\forall i)$$

$$h_k = \frac{(r - q + \sigma^2/2)(t_i - t_k)}{\sigma \sqrt{t_i - t_k}} \quad (1 \leq k \leq i-1)$$

$$h_k = \frac{(r - q - \sigma^2/2)(t_k - t_i)}{\sigma \sqrt{t_k - t_i}} \quad (i+1 \leq k \leq n+1)$$

$$\hat{h}_k = \frac{(r - q + \sigma^2/2)(t_k - t_i)}{\sigma \sqrt{t_k - t_i}} \quad (i+1 \leq k \leq n+1)$$

$$g_k = -\frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)t_k}{\sigma \sqrt{t_k}} \quad (1 \leq k \leq n+1)$$

$$\hat{g}_k = -\frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)t_k}{\sigma \sqrt{t_k}} \quad (1 \leq k \leq n+1)$$

$\sum_i$  及  $\sum_i$  的定义与重设型买权评价公式(7)内的定义相同。多点重设型卖权评价公式的推导与第三节多点重设型买权评价公式的推导相似,读者可参阅附录一的推导。

正如重设型买权,重设型卖权的价值高于一般(无重设履约价)卖权的价值。而且重设点愈多,其价值也愈高。此外,其价值也可视为一系列有条件的远期生效卖权价值加上一个有条件的卖权价值之和。其分析与(9)及(10)的分析相似。

多点重设型卖权的 Delta 及 Gamma(为方便计,令  $q = 0$ )

$$\begin{aligned}\Delta_P &= \frac{\partial c}{\partial S_0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(h) + \frac{\partial N(h)}{\partial h_c} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_i}} \right] [e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h})] \right\} \\ &\quad - Ke^{-rT} \left( \frac{K}{S_0} \right) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(g)}{\partial g_k} \\ &\quad + N(\hat{g}) - \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(\hat{g})}{\partial \hat{g}_k}\end{aligned}\quad (18)$$

$\Gamma_P = \frac{\partial^2 c}{\partial S_0^2}$ , 因其公式极变复杂, 读者可参阅 Cheng 及 Zhang(2000)的(30)式。

在此我们提供卖权  $\Delta$  的推导如下:

微分(18)的第一大项:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial S_0} \sum_{i=1}^n [S_0 N(h) (e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h}))] \\ &\quad \left[ \begin{array}{l} N(h) = N(h_0, \dots, h_{i-1}, \sum_i) \\ \bar{N}(h) = N(h_{i+1}, \dots, h_{n+1}, \bar{\sum}_i) \\ N(\hat{h}) = N(\hat{h}_{i+1}, \dots, \hat{h}_{n+1}, \bar{\sum}_i) \end{array} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial S_0} (S_0 N(h)) [e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h})] \right. \\ &\quad \left. + S_0 N(h) \left[ e^{-r(T-t_i)} \frac{\partial \bar{N}(h)}{\partial S_0} - \frac{\partial N(\hat{h})}{\partial S_0} \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(h) + S_0 \frac{\partial N(h)}{\partial S_0} \right] [e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h})] \right. \\ &\quad \left. + S_0 N(h) \left[ e^{-r(T-t_i)} \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{\partial \bar{N}(h)}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial S_0} - \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{\partial N(\hat{h})}{\partial \hat{h}_k} \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial S_0} \right] \right\}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(h) + S_0 \sum_{k=1}^n \frac{\partial N(h)}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial S_0} \right] \cdot e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h}) \right\} \\
&\quad \left( \frac{\partial h_k}{\partial S_0} = 0 = \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial S_0} \quad (i+1 \leq k \leq n+1) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ N(h) + \frac{\partial N(h)}{\partial h_0} \frac{1}{\partial \sqrt{t_i}} \right] [e^{-r(T-t_i)} \bar{N}(h) - N(\hat{h})] \right\} \quad (19)
\end{aligned}$$

此处:  $\frac{\partial h_0}{\partial S_0} = \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{t_i}}$ ;  $\frac{\partial h_k}{\partial S_0} = 0 \quad (1 \leq k \leq i-1)$

微分(18)的第二项:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial S_0} [K e^{-rT} N(g)] \quad (N(g) = N(g_0, \dots, g_{n+1}, \bar{\sum}_0)) \\
&= K e^{-rT} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial N(g)}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial S_0} = K e^{-rT} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial N(g)}{\partial g_k} \frac{-1}{S_0 \sigma \sqrt{t_k}} \\
&= -e^{-rT} \left( \frac{K}{S_0} \right) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(g)}{\partial g_k} \quad (20)
\end{aligned}$$

微分(18)的第三项:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S_0} [S_0 N(\hat{g})] &= N(\hat{g}) + S_0 \frac{\partial N(\hat{g})}{\partial S_0} \\
&= N(\hat{g}) + S_0 \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{\partial N(\hat{g})}{\partial \hat{g}_k} \frac{\partial \hat{g}_k}{\partial S_0} \\
&= N(\hat{g}) + S_0 \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{\partial N(\hat{g})}{\partial \hat{g}_k} \frac{-1}{S_0 \sigma \sqrt{t_k}} \\
&= N(\hat{g}) - \sum_{k=i+1}^{n+1} \frac{1}{\sigma \sqrt{t_k}} \frac{\partial N(\hat{g})}{\partial \hat{g}_k} \quad (21)
\end{aligned}$$

将以上 3 项微分相加即是卖权的 Delta(18) [= (19) - (20) + (21)]。

**多点重设型卖权的 Delta 小于零 ( $\Delta_P < 0$ )**

当股价  $S_0$  上升且接近  $+\infty$  时, 一般卖权的 Delta 从负值接近零 ( $\because$  当  $S_0 \rightarrow \infty$ , 则  $-d_1 \rightarrow -\infty$  及  $-N(-d_1) \rightarrow 0$ )。但重设型卖权则

不同,由(18) $\Delta_P$ 可知,当 $S_0 \rightarrow \infty$ ,则 $g_k \rightarrow -\infty$ ,  $\hat{g}_k \rightarrow -\infty$ ,  $N(\hat{g}) \rightarrow 0$ 及 $N(g) \rightarrow 0$ ;又 $h_c \rightarrow \infty$ ,  $N(h) \rightarrow 1$ ,故(18)可改写为:

$$\Delta_P = \sum_{i=1}^n N(h) [e^{-r(T-t_i)} N(h) - N(\hat{h})] < 0$$

因此,重设型卖权的 Delta( $\Delta_P$ )不会因标的股票上升而变成零,仍会是负值。也就是仍需持有放空的避险部位。这当然是因为含有重设履约价的特征。当股价持续上升时,会产生重设履约价,原来是价外卖权,重设后又回归价平卖权,其 Delta 仍是负值。

多点重设型卖权的避险与多点重设型买权的避险同样遭受到 Delta 跳跃的困难,其情况与重设买权相似,再此不再重述。

## 参 考 文 献

- M. Brenner, R. K. Sundaram, and D. Yermack. "Altering the Terms of Executive Stock Options", *Journal of Financial Economics*, 57 (2000), p. 103—128.
- W. Cheng, and S. Zhang, "The Analytics of Reset Options", *The Journal of Derivatives*, Fall 2000, p. 59—71.
- S. Gray, and R. Whaley. "Reset Put Options: Valuation, Risk Characteristics, and an Application", *Australian Journal of Management*, 24 (1999), p. 1—20.
- R. C. Heynen, and H. M. Kat. "Lookback Options with Discrete and Partial Monitoring of the Underlying Price", *Applied Mathematical Finance*, 2 (1995), p. 273—283.
- A. G. Z. Kemna, and A. C. F. Vorst. "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", *Journal of Banking and Finance*, 14 (1990), p. 113—129.
- I. Nelken, "Reassessing the Reset", *Risk*, October 1998, p. 36—39.
- P. Zhang, *Exotic Options*. Singapore: World Scientific Publishing, 1997.

## 附 录

### 一、多点重设型买权评价公式(8)的推导

改写(1)如下:

$$C = e^{-rT} \sum_{i=1}^n E(B_i) + e^{-rT} E(B) \quad (A1)$$

$$\text{此处: } B_i = (S(T) - S(t_i))^+ I_{|S(t_i) = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)]} \quad (A2)$$

$$= (S(T) - S(t_i)) I_{|S(t_i) = K(t_{i+1})|}$$

$$(\text{此处 } K(t_{n+1}) = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)])$$

$$B = [S(T) - K]^+ I_{|K = \min[K, S(t_1), \dots, S(t_n)]|}$$

首先整理  $E(B_i)$  的第一项如下:

$$E(S(T) I_{|S(t_i) = K(t_{i+1})|})$$

$$= E \left[ S(t_i) \frac{S(T)}{S(t_i)} I_{|S(t_i) = K(t_i)|} I_{|S(t_i) = K(t_{i+1}, t_{n+1})|} \right]$$

(利用布朗运动的独立性质,在不重叠的时间下,布朗运动是相互独立的,

$$K(t_{i+1}, t_{n+1}) = \min[S(t_{i+1}), \dots, S(t_{n+1})])$$

$$= E[S(t_i) I_{|S(t_i) = K(t_i)|}] E \left[ \frac{S(T)}{S(t_i)} I_{|S(t_i) = K(t_{i+1}, t_{n+1})|} \right]$$

同样利用独立性质,改写  $E(B_i)$  内的第二项如下:

$$E[S(t_i) I_{|S(t_i) = K(t_{i+1})|}] = E[S(t_i) I_{|S(t_i) = K(t_i)|}] E[I_{|S(t_i) = K(t_{i+1}, t_{n+1})|}]$$

$\therefore E(B_i)$  可改写为:

$$E(B_i) = E[S(t_i) I_{|S(t_i) = K(t_i)|}] E \left[ \left( \frac{S(T)}{S(t_i)} - 1 \right) I_{|S(t_i) = K(t_{i+1}, t_{n+1})|} \right] \quad (A3)$$

根据(1)的股价变动随机过程,股价的随机过程可表示为:

$$S(t_k) = S_0 \exp [(r - q - \sigma^2/2)t_k + \sigma(W_{t_k} - W_{t_0})]$$

$$= S_0 \exp \left[ (r - q - \sigma^2/2)t_k + \sum_{j=1}^k x_j \right] \quad (\text{A4})$$

此处:  $\sigma(W_{t_k} - W_{t_0}) = \sum_{j=1}^k \sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \sum_{j=1}^k x_j \quad (k \leq i)$

$$x_j = \sigma(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$$

$$\therefore x_j \sim N(0, \sigma^2(t_j - t_{j-1}))$$

$$\sum_{j=1}^k x_j \text{ 是 } n \text{ 个独立正态变量 } x_j \text{ 之和, 故 } \sum_{j=1}^n x_j \text{ 也是正态变量且是}$$

$$N(0, \sigma^2(t_k - t_0)), \text{ 设定 } t_0 = 0$$

根据(A4), (A3)内指标函数  $I_{\{S(t_i) \leq K(t_i)\}}$  所代表的积分上限可以  $\{x_k, 0 \leq k \leq i\}$  来表示如下:

$$A_0 = \{S(t_i) \leq K\} = \{\ln(S(t_i)/S_0) \leq \ln(K/S_0)\}$$

$$= \left\{ (r - q - \sigma^2/2)t_i + \sigma \sum_{j=1}^i x_j \leq -\ln(S_0/K) \right\}$$

(利用(A4))

$$= \left\{ \sum_{j=1}^i x_j \leq -[\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)t_i] \right\}$$

就  $i+1 \leq k \leq n$ , 同样利用(A4)

$$A_k = \{S(t_i) \leq S(t_k)\} = \{\ln(S(t_i)/S(t_k)) \leq 0\}$$

$$= \left\{ (r - q - \sigma^2/2)(t_i - t_k) + \sigma \sum_{j=i+1}^k x_j \leq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{j=i+1}^k x_j \leq -(r - q - \sigma^2/2)(t_i - t_k) \right\}$$

因此(A3)内的第一项期望值可表示为:

$$E[S(t_i) I_{\{S(t_i) \leq K(t_i)\}}] = E[S(t_i) I_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}] \quad (\text{A5})$$

$$= \int \dots \int_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1}} S(t_i) f(x_1, \dots, x_i) dx_1 \dots dx_i \quad (\text{A6})$$

此处:  $f(x_1, \dots, x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{i/2} \sigma^i \sqrt{\prod_{j=1}^i \Delta t_j}} \prod_{j=1}^i e^{-x_j^2 / 2\sigma^2 \Delta t_j}$

=  $i$  个独立正态变量  $(x_j)$  的联合概率分布 (Joint Normal Probability Density Function) (每一个  $x_j \sim N(0, \sigma^2 \Delta t_j)$ )

$$= S_0 e^{(r-q-\sigma^2/2)t_i} \int_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}} \dots \int e^{\sum_{j=1}^i x_j} \times f(x_1, \dots, x_{i-1}) dx_1 \dots dx_i \quad (A7)$$

(利用(A4), 将  $S(t_i)$  代入(A6))

欲对(A7)的多层积分求解, 我们必须利用完全平方法 (Completing Square), 其推导步骤如下:

$$\begin{aligned} & \exp(x_i) \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2 \Delta t_i}\right) \\ &= \exp\left[-\frac{x_i^2}{2\sigma^2 \Delta t_i} + x_i\right] = \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2 \Delta t_i} (x_i^2 - 2\sigma^2 \Delta t_i x_i)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 \Delta t_i} (x_i^2 - 2\sigma^2 \Delta t_i x_i + (\sigma^2 \Delta t_i)^2 - (\sigma^2 \Delta t_i)^2)\right] \\ & \quad (\text{用完全平方法}) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 \Delta t_i} ((x_i - \sigma^2 \Delta t_i)^2 - (\sigma^2 \Delta t_i)^2)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{(x_i - \sigma^2 \Delta t_i)^2}{2\sigma^2 \Delta t_i}\right] \exp\left(\frac{\sigma^2 \Delta t_i}{2}\right) \end{aligned}$$

将上式代入(A7)

$$\begin{aligned} & E[S(t_i) I_{|A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1}|}] \\ &= S(t_0) \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i\right] \int_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}} \dots \int e^{x_1 + x_2 + \dots + x_i} \\ & \quad \times p(x_1, \dots, x_i) dx_1 \dots dx_i \\ &= S(t_0) \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i\right] \prod_{j=1}^i \exp\left(\frac{\sigma^2 \Delta t_j}{2}\right) \int_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}} \dots \int \\ & \quad \times \frac{1}{(2\pi)^{i/2} \sigma^i \sqrt{\prod_{j=1}^i \Delta t_j}} \prod_{j=1}^i \exp\left[-\frac{(x_j - \sigma^2 \Delta t_j)^2}{2\sigma^2 \Delta t_j}\right] dx_1 \dots dx_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{aligned} & \text{令 } u_j = \frac{x_j - \sigma^2 \Delta t_j}{\sigma \sqrt{\Delta t_j}} \\ & \therefore du_j = \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t_j}} dx_j \Rightarrow dx_j = \sigma \sqrt{\Delta t_j} du_j \Rightarrow \prod_{j=1}^i dx_j = \sigma^i \sqrt{\prod_{j=1}^i \Delta t_j} \prod_{j=1}^i du_j \end{aligned} \right] \\
 & = S(t_0) \exp \left[ \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i \right] \exp \left[ \frac{\sigma^2 \sum_{j=1}^i \Delta t_j}{2} \right] \int_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}} \dots \int \\
 & \quad \times \frac{1}{(2\pi)^{i/2}} e^{-(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_i^2)/2} du_1 \dots du_i \quad (\text{A8})
 \end{aligned}$$

此处:  $\exp[(r - q - \sigma^2/2)t_i] \exp \left[ \frac{\sigma^2 \sum_{j=1}^i \Delta t_j}{2} \right] = e^{(r-q)t_i}$

因为  $\sum_{j=1}^i \Delta t_j = t_i - t_0 = t_i$ ,  $t_0 = 0$  (设  $t_0$  为原点零)。

此外, 令  $u_j = \frac{x_j - \sigma^2 \Delta t_j}{\sigma \sqrt{\Delta t_j}} \Rightarrow u_j \sim N(0, 1)$  及所有  $u_j$  都是独立。

$$\therefore x_j = \sigma^2 \Delta t_j + \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \quad (j = 1, 2, \dots, i)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{j=1}^i x_j &= \sigma^2 \sum_{j=1}^i \Delta t_j + \sum_{j=1}^i \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \\
 &= \sigma^2 t_i + \sum_{j=1}^i \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \quad \left( \sum_{j=1}^i \Delta t_j = t_i \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore A_0 &= \{S(t_i) \leq K(t_k)\} = \left\{ \sum_j x_j \leq \ln \frac{K}{S(t_0)} - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{j=1}^i \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \leq \ln \frac{K}{S(t_0)} - \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_k &= \{S(t_i) \leq S(t_k)\} = \left\{ \sum_{j=k+1}^i x_j \leq - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_i - t_k) \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{j=k+1}^i \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \leq - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_i - t_k) - \sigma^2 \sum_{j=k+1}^i t_j \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{j=k+1}^i \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \leq - \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_i - t_k) - \sigma^2 (t_i - t_k) \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \sum_{j=k-1}^i \sigma \sqrt{\Delta t_j} U_j \leq - \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_i - t_k) \right\} \quad (1 \leq k \leq i-1)$$

此外,

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sigma \sqrt{t_i - t_0}} \sigma \sum_{j=1}^i \sqrt{\Delta t_j} u_j}_{\text{令为 } Z_i} \leq \frac{\ln \frac{K}{S(t_0)} - \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i}{\sigma \sqrt{t_i - t_0}} \right\} \\ &= \left\{ Z_i \leq \underbrace{\frac{- \left[ \ln \frac{S(t_0)}{K} + \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i \right]}{\sigma \sqrt{t_i}}}_{c_0} \right\} \\ &= \{ Z_i \leq c_0 \} \quad (t_0 = 0, S(t_0) = S_0) \\ A_k &= \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sigma \sqrt{t_i - t_k}} \sigma \sum_{j=k-1}^i \sqrt{\Delta t_j} u_j}_{\text{令为 } Z_{k-1}} \leq \frac{- \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_i - t_k)}{\sigma \sqrt{t_i - t_k}} \right\} \\ &= \left\{ Z_{k-1} \leq \underbrace{\frac{- \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_i - t_k)}{\sigma \sqrt{t_i - t_k}}}_{c_k} \right\} \\ &= \{ Z_{k-1} \leq c_k \} \quad (1 \leq k \leq i-1) \end{aligned}$$

$$\text{此处: } c_0 = - \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)t_i}{\sigma \sqrt{t_i}}$$

$$c_k = - \frac{(r - q + \sigma^2/2)(t_i - t_k)}{\sigma \sqrt{t_i - t_k}} \quad (1 \leq k \leq i-1)$$

$$\text{令 } Z_k = \frac{1}{\sigma \sqrt{t_i - t_{k-1}}} \sigma \sum_{j=k}^i \sqrt{\Delta t_j} u_j \quad (1 \leq k \leq i)$$

$$\therefore \text{Var}(Z_k) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \text{Var}(Z_k) &= \frac{1}{(t_i - t_{k-1})} \sum_{j=1}^k \Delta t_j \text{Var}(u_j) = \frac{1}{t_i - t_{k-1}} \sum_{j=1}^k \Delta t_j \\ &= 1 \quad (\because \sum_{j=1}^k \Delta t_j = t_i - t_{k-1}, \text{Var}(y) = 1) \end{aligned}$$

$$\because u_j \sim N(0, 1) \Rightarrow Z_k \sim N(0, 1)$$

$Z_l$  及  $Z_m$  的协方差计算如下:  $l < m$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{lm} &= \text{Cov}(Z_l, Z_m) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(t_l - t_{l-1})(t_l - t_{m-1})}} \text{Cov}\left(\sum_{j=l}^i \sqrt{\Delta t_j} u_j, \sum_{j=m}^i \sqrt{\Delta t_j} u_j\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(t_l - t_{l-1})(t_l - t_{m-1})}} \text{Var}\left(\sum_{j=m}^i \sqrt{\Delta t_j} u_j\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(t_l - t_{l-1})(t_l - t_{m-1})}} (t_l - t_{m-1}) \quad \left(\because \sum_{j=m}^i \Delta t_j = t_l - t_{m-1}\right) \\
 &= \sqrt{\frac{t_l - t_{m-1}}{t_l - t_{l-1}}} \quad (\text{A9})
 \end{aligned}$$

$\therefore Z_1, Z_2, \dots$  及  $Z_i$  的概率分布是联合正态分布, 其期望值向量为零向量, 且协方差矩阵为:

$$\sum_i = [\sigma_{lm}], \sigma_{lm} = (\text{A9})$$

因此, 从 (A8) 及 (A9), 我们获得:

$$\begin{aligned}
 E[S(t_i) I_{|S(t_i)=K(t_i)}] &= E[S(t_i) I_{|A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}] \\
 &= S_0 e^{-qt_i} e^{rt_i} N(c_0, c_1, \dots, c_i, \sum_i) \\
 &= S e^{-qt_i} e^{rt_i} N(c) \quad (\text{A10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{此处: } \int \dots \int_{A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}} \frac{1}{(2\pi)^{i/2}} e^{-\sum_{j=1}^i u_j^2/2} du_1 \dots du_i \\
 = N(c_0, c_1, \dots, c_i, \sum_i) = N(c) \quad (\text{A11})
 \end{aligned}$$

(A3) 内的第二期望值可以上面类似的方法推导:

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(\frac{S(T)}{S(t_i)} - 1\right) I_{|S(t_i)=K(t_{i+1}, t_{n+1})}\right] \\
 = N(c_{i+1}, \dots, c_{n+1}, \overline{\sum_i}) - e^{r(T-t_i)} N(c_{i+1}, \dots, c_{n+1}, \overline{\sum_i}) \\
 = \overline{N}(c) - e^{-r(T-t_i)} N(\hat{c}) \quad (\text{A12})
 \end{aligned}$$

又 (A1) 的第二期望值是



$$\begin{aligned}
 e^{-rT}E(B) &= e^{-rT}E[(S(T) - K)I_{[K \leq \max_{t \in L} K_t, S(t_1), \dots, S(t_n)]}] \\
 &= S_0 e^{-qT}N(d_1, \dots, d_{n+1}, \widetilde{\sum}) - Ke^{-rT}N(\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{n+1}, \widetilde{\sum}) \\
 &= S_0 e^{-qT}N(d) - Ke^{-rT}N(\hat{d}) \quad (A13)
 \end{aligned}$$

将(A11)、(A12)及(A13)代入(A3)及(A1)即是多点重设型买权的评价公式(8a)及(8b)。

## 第二十四章 回顾型选择权 (Lookback Options)

### 一、简介

回顾型选择权提供投资人许多好处,比如说,回顾型买权(A Lookback Call)提供投资人可以最低价格买进标的股。回顾型卖权提供投资人可以最高价格出售。因此,投资人不必为买进或卖出标的物的适当时点而烦恼。投资人总是可在回顾型选择权的到期日,以有效期内最低的标的价格买进,或最高价格卖出。

回顾型选择权依履约价的设定可划分为浮动履约价(Floating Strikes)的回顾选择权及固定履约价的回顾选择权。其到期日现金流量可表示为:

#### 1. 浮动履约价

$$(1) \text{ 回顾型买权: } C_T = \max(S_T - m_0^T, 0) \quad (1a)$$

$$\text{此处: } m_0^T = \min_{T_0 \leq u \leq T} S_u \text{ (最低价格为履约价)} \quad (1b)$$

$$(2) \text{ 回顾型卖权: } P_T = \max(M_0^T - S_T, 0) \quad (2a)$$

$$M_0^T = \max_{T_0 \leq u \leq T} S_u \text{ (最高价格为履约价)} \quad (2b)$$

#### 2. 固定履约价

$$(1) \text{ 回顾型买权: } C_T = \max[\max_{T_0 \leq u \leq T} S_u - K, 0] \quad (3)$$

以有效期内的最高价格做为到期日的交割股价,但履约价  $K$  是固定不变。

$$(2) \text{ 回顾型卖权: } P_T = \max[K - \min_{T_0 \leq u \leq T} S_u, 0], \quad (4)$$

以有效期内的最低价格作为到期日的交割股价,但履约价  $K$  是固定不变。

在本章中,我们将对回顾型选择权的评价进行详细探讨。

## 二、最高及最低标的价格的概率分布

正如 Black-Scholes 的资本市场,我们假设标的价格的变动过程为几何布朗运动(Geometric Brownian Motion)如下:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (5)$$

此处:  $r$  = 无风险利率,  $W_t$  = 标准布朗运动, 呈现  $N(0, t)$ , 其概率测度是无风险概率测度。

则从(5), 我们已知:

$$S_t = S_0 \exp[(r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t] \quad (6)$$

( $W_0 = 0$ ,  $S_0$  = 期初股价)

(若考量连续股利率  $q$ , 则以  $r - q$  取代  $r$ )。为方便计, 将以  $\mu$  替代  $(r - \sigma^2/2)$ , 即令  $\mu = r - \sigma^2/2$

$$\text{令 } X_t = \ln(S_t/S_0) = \mu t + \sigma W_t \quad (7a)$$

$$y_t = \ln(m_t^l/S_0) = \min_{0 \leq u \leq t} X_u (\leq 0) \quad (7b)$$

$$Y_t = \ln(M_t^h/S_0) = \max_{0 \leq u \leq t} X_u (\geq 0) \quad (7c)$$

则根据 Harrison(1985, p. 13),  $X_t$ ,  $y_t$  及  $Y_t$  的概率分布可表示为

1.  $X_t$  及  $Y_t$  的共同概率分布为

$$P_r(X_t \leq x, Y_t \leq y) = N\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{x - 2y - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) \quad (8)$$

此处:  $x \geq 0$ ,  $y \geq x$ ,  $N(x) = \text{累积标准正态分布} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ 。

2.  $X_t$  及  $y_t$  的概率分布为:

$$P_r(X_t \geq x, y_t \geq y) = N\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y / \sigma^2} N\left(\frac{-x + 2y + \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) \quad (y \leq 0 \text{ 及 } y \leq x) \quad (9)$$

3.  $Y_t$  的累积概率分布是

$$P_r(Y_t \leq y) = N\left(\frac{y - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y / \sigma^2} N\left(\frac{-y - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) \quad (y \geq 0) \quad (10)$$

4.  $y_t$  的概率分布是

$$P_r(y_t \geq y) = N\left(\frac{-y + \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y / \sigma^2} N\left(\frac{y + \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) \quad (y \leq 0) \quad (11)$$

以上 4 种不同的概率分布将在评价回顾型选择权扮演很重要的角色。

### 三、回顾型买权的评价:浮动履约价

在风险中立下,回顾型买权的价格为:

$$\begin{aligned} C &= e^{-r} E[\max(S_T - m_0^T, 0)] \\ &= e^{-r} E(S_T - m_0^T), S_T > m_0^T \end{aligned} \quad (12a)$$

$$= e^{-r} E[S_T - \min(m_{T_0}^t, m_t^T)] \quad (12b)$$

此处:  $\tau = T - t$  ( $t$  是现在评价的时点)

$m_{T_0}^t = \min_{T_0 \leq u < t} S_u$  = 时间  $(T_0, t)$  内的最低价格(已知)

$m_t^T = \min_{t \leq u \leq T} S_u$  = 在时间  $(t, T)$  内的最低价格(未知,尚未实现)

$$\therefore C = S_0 - e^{-r} E[\min(m_{T_0}^t, m_t^T)] \quad (12c)$$

此处:  $S_0 = e^{-r} E(S_T)$

为求算(12c)的期望值,我们重写该期望值为:

$$E[\min(m_{T_0}^t, m_t^T)] = E[m_{T_0}^t \mid m_{T_0}^t \leq m_t^T] + E[m_t^T \mid m_t^T < m_{T_0}^t]$$

$$\begin{aligned}
&= m_{T_0}^t E[1 \mid m_{T_0}^t \leq m_t^T] + E[m_t^T \mid m_t^T < m_{T_0}^t] \\
&= m_{T_0}^t P_r(m_t^T \geq m_{T_0}^t) + E[m_t^T \mid m_t^T < m_{T_0}^t]
\end{aligned} \quad (13)$$

(13)式的第一项可根据  $y_t$  的累积概率分布(11)求解如下:

$$\begin{aligned}
&m_{T_0}^t P_r(m_t^T \geq m_{T_0}^t) \\
&= m_{T_0}^t P_r[\ln(m_t^T/S_0) \geq \ln(m_{T_0}^t/S_0)] \\
&= m_{T_0}^t P_r(y_t \geq y) \quad (y_t = \ln(m_t^T/S_0), y = \ln(m_{T_0}^t/S_0)) \\
&= m_{T_0}^t \left[ N\left(\frac{-\ln(m_{T_0}^t/S_0) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{\ln(m_{T_0}^t/S_0) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \\
&= m_{T_0}^t \left[ N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{S}{m_{T_0}^t}\right)^{r-\frac{\sigma^2}{2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right]
\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\text{此处: } d_1 &= \frac{\ln(S_0/m_{T_0}^t) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} &= \frac{\ln(m_{T_0}^t/S_0) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}$$

再次求解(13)内的第二项期望值。我们必须求算  $m_t^T$  或  $y_t$  的概率分布,该概率分布可从  $y_t$  累积概率(11)式对  $y$  微分获得如下:

$$\begin{aligned}
f(y) &= \frac{d}{dy} P_r(y_t \leq y) \\
&= \frac{d}{dy} [1 - P_r(y_t \geq y)] \\
&= \frac{d}{dy} N\left(\frac{-y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \frac{d}{dy} e^{2\mu y/\sigma^2} \cdot N\left(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&\quad + e^{2\mu y/\sigma^2} \frac{d}{dy} N\left(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
&\quad + e^{2\mu y/\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)
\end{aligned} \quad (15)$$

此处:  $\frac{d}{dx}N(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2} = n(x) \quad \left(x = \frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \text{ 或 } -\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$

所以, (13)内第二项期望值求算如下:

$$E[m_t^T | m_t^T < m_{T_0}^T] = E[Se^{y_\tau} | \ln(m_t^T/S) < \ln(m_{T_0}^T/S)] \quad (S = S_0, \\ m_t^T = Se^{y_\tau})$$

$$= E[Se^{y_\tau} | y_\tau < \ln(m_{T_0}^T/S)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln(m_{T_0}^T/S)} Se^{y_\tau} f(y) dy \quad (\tau \text{ 暂时省略}) \quad (16a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln(m_{T_0}^T/S)} \frac{Se^{y_\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \\ + \frac{2\mu}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\ln(m_{T_0}^T/S)} Se^{y_\tau} e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{se^{y_\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} e^{2\mu y/\sigma^2} n\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \quad (16b)$$

(将(15)代入(16),并分成3个积分部分)

(16b)内的第一及第三积分部分完全相等,故可求解第一积分部分即可。首先证明两者相等。第三积分部分如下:

$$\int_{-\infty}^{\ln(m_{T_0}^T/S)} \frac{se^{y_\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} e^{2\mu y/\sigma^2} n\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \\ = \int_{-\infty}^A \frac{se^{y_\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} e^{2\mu y/\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2} dy \quad (A = \ln(m_{T_0}^T/S)) \\ = \int_{-\infty}^A \frac{se^{y_\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{2\mu y/\sigma^2 - \left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2} dy$$

此处指数函数部分可加以简化:

$$\exp\left[2\mu y/\sigma^2 - \left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2\right] = \exp\left[\frac{-y^2 + 2\mu\tau y - \mu^2\tau^2}{2\sigma^2\tau}\right] \\ = \exp\left[-\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^A \frac{se^y}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2} dy = \int_0^A \frac{se^y}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy$$

也就是等于第一积分部分。

(16b)第一积分部分求解如下:

$$\int_{-\infty}^A \frac{se^y}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy = \int_{-\infty}^A \frac{S}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2} dy$$

比处我们对指数部分完成平方:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2 &= \frac{1}{2\sigma^2\tau} [2\sigma^2\tau y - y^2 + 2y\mu\tau - \mu^2\tau^2] \\ &= \frac{-1}{2\sigma^2\tau} [y^2 - 2(\sigma^2\tau + \mu\tau)y + \mu^2\tau^2] \\ &= \frac{-1}{2\sigma^2\tau} [(y - (\sigma^2\tau + \mu\tau))^2 - (\sigma^2\tau + \mu\tau)^2 + \mu^2\tau^2] \\ &= \frac{-1}{2\sigma^2\tau} [(y - (\sigma^2 + \mu)\tau)^2 + (\sigma^2/2 + \mu)\tau] \\ &= se^{(r+\sigma^2/2)\tau} \int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-[y-(\mu+\sigma^2)\tau]^2/2\sigma^2\tau} dy \quad \left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau = r\tau\right) \\ &= se^{r\tau} N(-d_1) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\text{此处: } -d_1 = \frac{A - (\mu + \sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -\frac{\ln(S/m_{T_0}^L) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (17b)$$

(16b)第二积分部分比较麻烦,求解如下:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{\sigma^2} \int_{-\infty}^A Se^y e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \\ &= \frac{2\mu S}{\sigma^2} \int_{-\infty}^A e^{\frac{\sigma^2+2\mu}{\sigma^2}y} N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \\ &= \frac{2\mu S}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+2\mu}\right) \int_{-\infty}^A N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) de^{\left(\frac{\sigma^2+2\mu}{\sigma^2}\right)y} dy \\ &= \frac{2\mu S}{\sigma^2+2\mu} \left[ e^{\left(\frac{\sigma^2+2\mu}{\sigma^2}\right)y} N\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right]_{-\infty}^A - \int_{-\infty}^A e^{\left(\frac{\sigma^2+2\mu}{\sigma^2}\right)y} dN\left(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned}$$

(利用部分积分法则:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ &= \frac{2\mu S}{\sigma^2 + 2\mu} \left[ e^{(\frac{\sigma^2 + 2\mu}{\sigma^2})A} N\left(\frac{A + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^A e^{(\frac{\sigma^2 + 2\mu}{\sigma^2})y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})^2/2} dy \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{此处: } \frac{2\mu S}{\sigma^2 + 2\mu} = \frac{2(r - \sigma^2/2)S}{\sigma^2 + 2(r - \sigma^2/2)} = \frac{2r - \sigma^2}{2r} = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)S$$

$$\begin{aligned} e^{(\frac{\sigma^2 + 2\mu}{\sigma^2})A} &= \exp\left[\frac{\sigma^2 + 2(r - \sigma^2/2)}{\sigma^2} \ln(m_{T_0}^t/S)\right] \\ &= \exp\left[\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right) \ln(m_{T_0}^t/S)\right] = (m_{T_0}^t/S)^{2r/\sigma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\left(\frac{A + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) &= N\left(\frac{\ln(m_{T_0}^t/S) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &= N\left(\frac{\ln(m_{T_0}^t/S) - (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right) \\ &= N\left(-d_1 + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}\right) \end{aligned}$$

$$dN\left(\frac{A + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{A + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})^2/2} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

(18)式内的指数函数可以完全平方法加以简化如下:

$$\begin{aligned} e^{(\frac{\sigma^2 + 2\mu}{\sigma^2})y} e^{-(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})^2/2} &= \exp\left[\frac{(4\mu\tau + 2\sigma^2\tau)y - y^2 - 2\mu\tau y - \mu^2\tau^2}{2\sigma^2\tau}\right] \\ &= \exp\left[\frac{-(y^2 - 2(\mu + \sigma^2)\tau y) + \mu^2\tau^2}{2\sigma^2\tau}\right] \\ &= \exp\left(\frac{-(y - (\mu + \sigma^2)\tau)^2 + (\mu + \sigma^2)^2\tau^2 + \mu^2\tau^2}{2\sigma^2\tau}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \exp\left[-\frac{(y - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right] \exp\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right] \\
&= \exp\left[-\frac{(y - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right] e^{r\tau} \quad \left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau = r\tau\right)
\end{aligned}$$

将以上的简化结果代入(18)得

$$\begin{aligned}
(18) &= \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ (m_{T_0}^t / S)^{2r/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right. \\
&\quad \left. - e^{r\tau} \int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\left(\frac{y - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2/2} dy \right] \\
&= \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ (m_{T_0}^t / S)^{2r/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right. \\
&\quad \left. - e^{r\tau} N\left[\frac{\ln(m_{T_0}^t / S) - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] \right] \\
&= \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ (m_{T_0}^t / S)^{2r/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{r\tau} N(-d_1) \right]
\end{aligned}$$

再将(14)、(17a)及(18)的结果代入(13)获得:

$$\begin{aligned}
E[\min(S_{T_0}, m_t^T)] &= \underbrace{m_{T_0}^t P_r(m_{T_0}^t \leq m_t^T)}_{(14)} + \underbrace{E(m_t^T \mid m_{T_0}^t > m_t^T)}_{(16b) = 2(17b) + (18)} \\
&= \underbrace{m_{T_0}^t \left[ N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{S}{m_{T_0}^t}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right]}_{(14)} \\
&\quad + \underbrace{2Se^{r\tau} N(-d_1)}_{2(17b)} \\
&\quad + \underbrace{\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{m_{T_0}^t}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{r\tau} N(-d_1) \right]}_{(18)} \quad (19)
\end{aligned}$$

再将(19)代入(12b)即可获得回顾型买权的评价公式如下:

$$\begin{aligned}
C &= e^{-r\tau} E[S_T - \min(m_{T_0}^t, m_t^T)] \\
&= e^{-r\tau} E[S_T] - e^{-r\tau} E(\min(m_{T_0}^t, m_t^T)) \\
&= S - e^{-r\tau} m_{T_0}^t N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-\pi} m_{T_0}^t \left( \frac{S}{m_{T_0}^t} \right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - 2SN(-d_1) \\
& - e^{-\pi} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left( \frac{m_{T_0}^t}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\pi} N(-d_1) \right] \\
& = S - 2SN(-d_1) - e^{-\pi} m_{T_0}^t N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \\
& + e^{-\pi} m_{T_0}^t \left( \frac{S}{m_{T_0}^t} \right) \left( \frac{S}{m_{T_0}^t} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \\
& - e^{-\pi} S \left[ \left( \frac{m_{T_0}^t}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\pi} N(-d_1) \right] \\
& + e^{-\pi} \left( \frac{\sigma^2}{2r} \right) S \left[ \left( \frac{m_{T_0}^t}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\pi} N(-d_1) \right] \\
& = S - 2SN(-d_1) - e^{-\pi} m_{T_0}^t N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) + SN(-d_1) \\
& - e^{-\pi} \left( \frac{\sigma^2}{2r} \right) S \left[ \left( \frac{S}{m_{T_0}^t} \right)^{-2r/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\pi} N(-d_1) \right] \\
\therefore C & = SN(d_1) - e^{-\pi} m_{T_0}^t N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \\
& + e^{-\pi} \left( \frac{\sigma^2}{2r} \right) S \left[ \left( \frac{S}{m_{T_0}^t} \right)^{-2r/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\pi} N(-d_1) \right]
\end{aligned} \tag{20}$$

此处:

$$\begin{aligned}
S(1 - N(-d_1)) & = SN(d_1) \\
d_1 & = \frac{\ln(S/m_{T_0}^t) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}$$

若加入考虑连续股利率  $q$  的存在,则在(20)内以  $Se^{-q}$  及  $(r-q)$  分别取代原来的  $S$  及  $r$ 。

重写回顾型买权的评价模型(20)如下:

$$C = C_{BS} + SBO \tag{21a}$$

$$\text{此处: } C_{BS} = SN(d_1) - e^{-\pi} m_{T_0}^t N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \tag{21b}$$

$$SBO = e^{-r\tau} \left( \frac{\sigma^2}{2r} \right) S \left[ \left( \frac{S}{m_{t_0}^L} \right)^{-2r/\sigma^2} N \left( -d_1 + \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} \right) - e^{\tau} N(-d_1) \right] \quad (21c)$$

根据(21a),回顾型买权评价是由两个评价公式组合而成:

1. BS 评模型(21b),以已知最低价格  $m_{t_0}^L$  作为履约价。
2. Garman(1989)所称的 Strike Bonus Option(SBO),以(21c)代表。其所代表的意义如下:

发行券商必须对所发行的回顾型买权进行避险。在期初发行时,避险操作首先买进一单位普通买权,履约价格为当时的标的股价( $S$ )。持有该买权一直到标的股价低于  $S$  的另一价位( $S'$ )出现时,立即进行修正调整(Rollover):出售原来的买权,并买进另一个新买权,履约价格为当时的新低价( $S'$ )。此一修正调整交易定会产生现金流出;因为原来的买权成为价外,原来买进是价平买权,但出售已成为价外买权,当然产生损失(或现金流出),加上另买进新价平买权(履约价格为  $S'$ )的现金流出。此后,若标的股价又创另一新低  $S''$ (比  $S'$  还低),则重复以上所述的修正调整交易,即出售(第二个)买权,并买进另一个新价平买权(履约价格为  $S''$ ),此修正调整交易再度产生现金流出。若标的股价持续有新低,则持续修正调整,一直到到期日为止。因此,在有效期内,复制策略的重复修正调整会产生一系列的现金流量(流出)。此一系列的现金流量可视为一种证券化的证券。换言之,持有此种权证的投资人享有此一系列现金流量的求偿权,因此,投资人也必须支付享有求偿权的代价(即支付权利金)。Garman(1989)称此种证券化选择权(或所支付的权利金)为 SBO。因此,回顾型买权其实是由一个普通买权加上一个 SBO 组合而成的买权。其评价含有可加性及可分隔性(Additive-Separation Property),正如(21a)所示。

#### 四、回顾型卖权:浮动履约价

在第三节中,我们已求解出回顾型买权的评价。对回顾型卖权的

评价也可以类似方法求解。根据(2a)及(2b)的定义,回顾型卖权的现今价格为

$$\begin{aligned}
 P &= e^{-r}E[\max(M_0^T - S_T, 0)] = e^{-r}E[M_0^T - S_T], M_0^T > S_T \\
 &= e^{-r}E[\max(M_0^t, M_t^T)] - S \\
 &\quad \left( \text{此处 } M_0^t = \max_{T_0 \leq u \leq t} S_u, M_t^T = \max_{t \leq u \leq T} S_u, S = e^{-r}E(S_T) \right) \\
 &= e^{-r}E[M_0^t | M_0^t \geq M_t^T] + e^{-r}E[M_t^T | M_t^T > M_0^t] - S \\
 &= e^{-r}M_0^t P_r(M_t^T \leq M_0^t) + e^{-r}E[M_t^T | M_t^T > M_0^t] - S \quad (22)
 \end{aligned}$$

(22)内的第一概率求算如下:

$$\begin{aligned}
 P_r(M_t^T \leq M_0^t) &= P_r[\ln(M_t^T/S)] \leq \ln[(M_0^t/S)] = P_r(Y_t \leq y) \\
 &\quad (\text{此处 } y = \ln(M_0^t/S)) \\
 &= N\left(\frac{\ln(M_0^t/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{2\mu \cdot \ln(M_0^t/S)/\sigma^2} N\left(\frac{-\ln(M_0^t/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
 &\quad (\text{利用(10)}) \\
 &= N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{-2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

此处:

$$d_1^* = \frac{\ln(S/M_0^t) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 -d_1^* + \sigma\sqrt{\tau} &= \frac{-\ln(S/M_0^t) - (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau} \\
 &= \frac{\ln(M_0^t/S) - (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 e^{2\mu \ln(M_0^t/S)/\sigma^2} &= (M_0^t/S)^{-2\mu/\sigma^2} = (S/M_0^t)^{1-2r/\sigma^2} \\
 \frac{-\ln(M_0^t/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} &= \frac{\ln(S/M_0^t) - (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 &= \frac{\ln(S/M_0^t) + (r + \sigma^2/2)\tau - 2r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 &= d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} \quad (25)
 \end{aligned}$$

为求解(22)的第二项期望值我们必须先求解  $Y_t = \ln(M_t^T/S)$  的概率分布如下:

$$\begin{aligned}
 h(y) &= \frac{\partial}{\partial y} P_r(Y_t \leq y) \\
 &\quad (\text{利用(10)}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ N\left(\frac{y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
 &\quad - e^{2\mu y/\sigma^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ N\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
 &\quad + e^{2\mu y/\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (26)
 \end{aligned}$$

所以,(22)内的第二项可改写如下:

$$\begin{aligned}
 e^{-r\tau} E[M_t^T \mid M_t^T > M_0^T] \\
 &= e^{-r\tau} E[Se^{y_t} \mid y_t > \ln(M_0^T/S)] \quad (y_t = \ln(M_t^T/S)) \\
 &= e^{-r\tau} \int_{\ln(M_0^T/S)}^{\infty} Se^y h(y) dy \\
 &= e^{-r\tau} \left\{ \int_B^{\infty} Se^y \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy - \frac{2\mu S}{\sigma^2} \int_B^{\infty} e^y e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_B^{\infty} e^y e^{2\mu y/\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{-y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \right\} \quad (B = \ln(M_0^T/S)) \quad (27)
 \end{aligned}$$

正如(16b),(27)式内的第一及第三项积分可证明为相等。第一部分积分的求解方法与(17a)的求解方法相似,因此我们可从(17a)的结果写下(27)式第一部分积分的结果为:

$$\int_B^{\infty} Se^y \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n\left(\frac{y - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy = Se^{\tau} N(d_1^*) \quad (28)$$

(27)的第二部分积分也可以(16b)的第二部分积分方法[即(18)式]求解如下:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\mu S}{\sigma^2} \int_B^\infty e^y e^{2\mu y/\sigma^2} N\left(\frac{-y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) dy \quad (\text{也是利用部分积分法则}) \\
& = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{M_c^t}{S}\right)^{2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^r N(d_1^*) \right] \quad (29)
\end{aligned}$$

[相当于对(18)内的  $N(\cdot)$  内的正负符号对换, 以及参见 p. 346]  
然后将(28)及(29)代入(27):

$$\begin{aligned}
& e^{-r\tau} E[M_c^t \mid M_c^t > M_0^t] \\
& = 2SN(d_1^*) + e^{-r\tau} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{M_0^t}{S}\right)^{2r/\sigma^2} \right. \\
& \quad \left. \times N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^r N(d_1^*) \right] \quad (30)
\end{aligned}$$

最后将(23)及(30)代入(22)即是回顾型卖权的评价模型:

$$\begin{aligned}
P & = e^{-r\tau} M_c^t N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) - e^{-r\tau} M_0^t \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{-2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \\
& \quad + 2SN(d_1^*) + e^{-r\tau} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{M_0^t}{S}\right)^{2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^r N(d_1^*) \right] - S \\
& = e^{-r\tau} M_0^t N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) - e^{-r\tau} M_0^t \left(\frac{S}{M_0^t}\right) \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{-2r/\sigma^2} \\
& \quad \times N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) + 2SN(d_1^*) + e^{-r\tau} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{-2r/\sigma^2} \right. \\
& \quad \left. \times N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^r N(d_1^*) \right] - S \\
& = e^{-r\tau} M_0^t N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) + 2SN(d_1^*) - SN(d_1^*) \\
& \quad + e^{-r\tau} \left(\frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{-2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^r N(d_1^*) \right] - S \\
& = -SN(-d_1^*) + e^{-r\tau} M_0^t N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) \\
& \quad - e^{-r\tau} \left(\frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{-2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^r N(d_1^*) \right] \quad (31a)
\end{aligned}$$

或

$$P = P_{BS} + SBO_p \quad (31b)$$

$$\text{此处: } P_{BS} = -SN(-d_1^*) + e^{-\pi} M_0'(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) \quad (31c)$$

= 一般卖权的评价公式(履约价为最高价格  $M_0'$ )

$SBO_p$  = 在卖权下的 Strike Bonus Option

$$= e^{-\pi} \left( \frac{\sigma^2}{2r} \right) S - \left( \frac{S}{M_0'} \right)^{-2\pi/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) + e^{\pi} N(d_1^*) \quad (31d)$$

其经济意义与买权的  $SBO$ [(21)式]类似。在期初避险时买进价平卖权(履约价等于当时的股价)。之后,每当股价上升至一新高点,必须调整,将原来的卖权出售,再买进另一价平的新卖价(履约价等于新高点)。每一次调整都会产生现金流出。将一系列的现金流出加以证券化,其价值即是  $SBO_p$ 。

## 五、固定履约价格的回顾型买权

根据(3)式的定义,回顾型买权(固定履约价)的现今价值为:

$$\begin{aligned} C^* &= e^{-\pi} E[\max(\max_{0 \leq u \leq T} S_u - K, 0)] \\ &= e^{-\pi} E[\max(M_0^T - K, 0)] \\ &= e^{-\pi} E[\max(M_0^t - K, 0) | M_0^t \geq M_t^T] \\ &\quad + e^{-\pi} E[\max(M_t^T - K, 0) | M_t^T > M_0^t] \end{aligned} \quad (32)$$

(32)的第一期望值求算如下:

$$\begin{aligned} &E[\max(M_0^t - K, 0) | M_0^t \geq M_t^T] \\ &= E[\max(M_0^t - K, 0) | y_t \leq y] \\ &\quad (y = \ln(M_0^t/S), y_t = \ln(M_t^T/S)) \\ &= \begin{cases} (M_0^t - K)P_r(Y_t \leq y), & \text{若 } M_0^t > k \\ 0, & \text{若 } M_0^t \leq k \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (M_0^t - K) \left[ N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{S}{M_0^t}\right)^{1-2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right] & (M_0^t > K) \\ 0 & (M_0^t \leq K) \end{cases} \quad \begin{matrix} (33a) \\ (33b) \end{matrix}$$

(32)式的第二期望值求算如下:

$$\begin{aligned} & E[\max(M_t^T - K, 0) \mid M_t^T > M_0^t] \\ &= E[\max(Se^y - K, 0) \mid y_t > y] \\ & \quad (y = \ln(M_0^t/S), y_t = \ln(M_t^T/S)) \\ &= \begin{cases} \int_{\ln(K/S)}^{\infty} (Se^y - K)h(y)dy \\ \quad (M_t^T > M_0^t \text{ 及 } M_t^T > K, M_0^t \leq K) \\ \int_{\ln(M_0^t/S)}^{\infty} (Se^y - K)h(y)dy \\ \quad (M_t^T > M_0^t > K) \end{cases} \quad \begin{matrix} (34a) \\ (34b) \end{matrix} \end{aligned}$$

此处:概率分布  $h(y)$  已在(26)式中求出。

(34)式的两个积分可分别求解如下:

当  $M_0^t \leq K$

$$\begin{aligned} (34a) &= \int_{\ln(K/S)}^{\infty} (Se^y - K)h(y)dy \\ &= \underbrace{\int_{\ln(K/S)}^{\infty} Se^y h(y)dy}_{\text{利用(27),(28)及(29)}} - K \underbrace{\int_{\ln(K/S)}^{\infty} h(y)dy}_{\text{利用(10)}} \\ &= \left\{ 2Se^{\tau}N(d) + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)S \right. \\ & \quad \times \left[ \left(\frac{M_0^t}{S}\right)^{2r/\sigma^2} N\left(d - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\tau}N(d) \right] \Big\} \\ & \quad - K \left[ N\left(\frac{\ln(K/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right. \\ & \quad \quad \quad \left. - e^{2\mu \ln(K/S)/\sigma^2} N\left(\frac{-\ln(K/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \quad (35) \end{aligned}$$



$$\text{此处: } d = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (36)$$

$$e^{2\mu \ln(K/S)/\sigma^2} = \left(\frac{K}{S}\right)^{2\mu/\sigma^2} = \left(\frac{S}{K}\right)^{-2\mu/\sigma^2} = (S/K)^{1-2r/\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(K/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} &= -\frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= -\frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau} = -d + \sigma\sqrt{\tau} \\ \frac{-\ln(K/S) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} &= \frac{\ln(S/K) - (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} = d - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} \end{aligned}$$

所以, 当  $M'_0 \leq K$ , 固定履约价的回顾型买权的评价公式为:

$$\begin{aligned} C^* &= (33b) + (35) \\ &= 2SN(d) + e^{-r} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) S \left[ \left(\frac{M'_0}{S}\right)^{2r/\sigma^2} N\left(d - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - N(d) \right] \\ &\quad - e^{-r} K \left[ N(-d + \sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{S}{K}\right)^{1-2r/\sigma^2} N\left(d - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right] \quad (37) \end{aligned}$$

当  $M'_0 > K$  时,

$$\begin{aligned} (34b) &= \int_{\ln(M'_0/S)}^{\infty} (Se^y - K)h(y)dy \\ &= \underbrace{\int_{\ln(M'_0/S)}^{\infty} Se^y h(y)dy}_{\text{利用(27),(28)及(29)}} - K \underbrace{\int_{\ln(M'_0/S)}^{\infty} h(y)dy}_{\text{利用(10)}} \\ &= \left\{ 2Se^{\tau} N(d_1^*) + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) \right. \\ &\quad \times S \left[ \left(\frac{M'_0}{S}\right)^{2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - e^{\tau} N(d_1^*) \right] \\ &\quad \left. - K \left[ N(-d_1 + \sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{S}{M'_0}\right)^{1-2r/\sigma^2} N\left(d_1 - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right] \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

故当  $M_0^* > k$  时, 固定履约价的回顾型买权的评价公式为

$$\begin{aligned}
 C^* &= (33a) + (38) \\
 &= e^{-r\tau} (M_0^* - K) \left[ N(-d_1^* + \sigma\sqrt{\tau}) - \left( \frac{S}{M_0^*} \right)^{1-2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right] \\
 &\quad + 2SN(d_1^*) - e^{-r\tau} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{2r} \right) S \\
 &\quad \times \left[ \left( \frac{M_0^*}{S} \right)^{2r/\sigma^2} N\left(d_1^* - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - N(d_1^*) \right] \\
 &\quad - e^{-r\tau} K \left[ N(-d_1 + \sigma\sqrt{\tau}) - \left( \frac{S}{M_0^*} \right)^{1-2r/\sigma^2} N\left(d_1 - \frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) \right] \quad (39)
 \end{aligned}$$

对于固定履约价的回顾型卖权评价公式的求解可按照上面的方法求解。(作业习题)。

## 参 考 文 献

- F. Black, and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, p. 637—654.
- A. Conze, and R. Viswanathan, 1991, "Path Dependent Options: the Case of Lookback Options", *Journal of Finance* 46, p. 1,893—907.
- M. Garman, 1989, "Recollection in Tranquillity", *Risk*, March 1989, p. 16—18.
- M. Goldman, H. Sosin and M. Catto, 1979, "Path Dependent Options: 'Buy at the Low, Sell at the Hight'", *Journal of Finance* 36, p. 1,111—127.
- J. M. Harrison, 1985, "Brownian Motion and Stochastic Flow Systems", Wiley, New York.
- J. Hull, and A. White, 1993, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options", *Journal of Derivatives*, Autumn, p. 21—31.

## 第二十五章 连续履约价(或限界)选择权

### 一、简介

一般选择权的履约价是单点履约价(诸如 100, 80, 120 等等)。界限(或障碍)选择权(Barrier Option)的界限(Barriers)也是单一价格。在价平时,单一履约价的选择权不容易避险,因 Gamma 在价平时可说是最大。此外,在接近到期时也比较难避险。界限选择权(上、下出局或上、下入局选择权),因界限是单一价格点,在避险时也同样困难。因此,若能将单点履约价改成连续履约价(The Continuous Strike),或将单点界限改成连续界限(The Continuous Barrier),则在避险时会比较容易。在本章中,我们特别介绍下列几种连续履约价及连续界限选择权:

1. 连续履约价选择权(The Continuous Strike Options,简称 CSO)。
2. 连续履约价限界选择权(The Continuous Strike Range Options,简称 CSRO)。
3. 连续界线选择权(The Continuous Barrier Options)或称软著界线选择权(The Soft Barrier Options)。

以上这些选择权是由 Hart 及 Ross(1994)所介绍。

### 二、连续履约价选择权

连续履约价买权是指某履约价从某一单点  $K$  起始以上的价格都

是履约价。比如说,若  $K = 50$ , 则连续履约价是从 50 开始以上的价格都是履约价。在到期时再根据到期标的股价计算交割现金流量(或损益)。为方便说明,我们以间断价格(50, 51, 52, ...)做范例。因  $K = 50$ , 连续履约价为 50, 51, 52, 53, ... 该连续履约价买权可由一系列的单一买权组合而成。每一买权的履约价可表示为  $K + i\Delta K$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  也就是,第一买权的履约价为  $K = 50$ , 第二买权的履约价为  $K + \Delta K = 50 + 1 = 51$ , 第三买权为  $K + 2\Delta K = 50 + 2 = 52$ , 等等。在到期时,该连续履约价买权的交割损益(或现金流量)可经由下列表格计算。

买权组合	到期标的股价( $S_T$ )									
	48	49	50	51	52	53	54	55	56	...
买权 1( $K = 50$ )	0	0	0	1	2	3	4	5	6	...
买权 2( $K = 51$ )	0	0	0	0	1	2	3	4	5	...
买权 3( $K = 52$ )	0	0	0	0	0	1	2	3	4	...
买权 4( $K = 53$ )	0	0	0	0	0	0	1	2	3	...
买权 5( $K = 54$ )	0	0	0	0	0	0	0	1	2	...
买权 6( $K = 55$ )	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...
买权 7( $K = 56$ )	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
买权组合的现金流量:	0	0	0	1	3	6	10	15	16	...

注:组合内每一买权的到期现金流量为:

$$C_i = \max(S_T - (K + i\Delta K)) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

观察以上连续履约价买权的到期现金流量可获得下列结论:

1. 连续履约价买权可由买权的组合复制,每一买权的履约价可表示为  $K_i = K + i\Delta K$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$
2. 该买权组合(或连续履约价买权)的到期现金流量结构不是线性,而是呈现非线性。即现金流量随着标的股价的上升,以二元方程式(Quadratic Equations)的行为增加。(详见上面表格最后一行,买权组合现金流量是:1, 3, 6, 10, 15, 16, ...)。
3. 观察连续履约价买权(Continuous Strike Call, CSC)的到期现金流量结构可知,其现金流量结构呈现一正三角形的结构(Triangular

Payoff)。因此,在连续履约价下,CSC的到期现金流量结构可以正三角形的面积表示如下:

$$CSC_T = \frac{1}{2}(S_T - K)^2 \quad (1)$$

此处:正三角形的底边及高度都是  $(S_T - K)$ 。 $S_T$  是到期股价。(1)式也表示其现金流量随着到期标的股价的上升,以二元方程式增加,正如第二点的结论。

根据以上的分析结论,连续履约价买权(CSC)可由一系列的买权复制,即且其到期现金流量呈现二元方程式,正如(1)式所示。在风险中之下,CSC的评价可表示为

$$CSC = e^{-r\tau} E^Q \left[ \frac{1}{2} (S_T - K)^2 \right] \quad (2)$$

此处: $E^Q(\cdot)$ 代表在风险中立概率测度  $Q$  下的期望值,  $\tau = T - t =$  尚存到期日。我们可以 Martingale Pricing 方法求解 CSC 的评价如下:

$$\begin{aligned} CSC &= \frac{1}{2} e^{-r\tau} E^Q [(S_T - K)^2 I_{|S_T > K|}], \\ &= \frac{1}{2} e^{-r\tau} E^Q [(S_T^2 - 2S_T K + K^2) I_A] \quad (A = |S_T| S_T > K|) \\ &= \frac{1}{2} e^{-r\tau} \left[ E^Q(S_T^2 I_A) - 2K \underbrace{E^Q(S_T I_A)}_{S e^{(r-q)\tau} N(d_1)} - K^2 \underbrace{E^Q(I_A)}_{N(d_2)} \right] \end{aligned}$$

此处:在 Black-Schole 模型下,  $E^Q(S_T I_A) = S e^{(r-q)\tau} N(d_1)$ ,  $E^Q(I_A) = N(d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} = x \quad (q = \text{连续股利率})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} = x - \sigma \sqrt{T}$$

再次,我们计算  $E(S_T^2 I_A)$ :

$$\begin{aligned}
S_T^2 &= \left\{ S \exp \left[ \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \Delta W_T \right] \right\}^2 \\
&= S^2 \exp \left[ 2 \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + 2\sigma \Delta W_T \right] \\
&= S^2 e^{2(r-q) - \frac{\sigma^2}{2} T} e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma(2\Delta W_T)} \\
\therefore E^Q(S_T^2 I_A) &= S^2 e^{2(r-q) - \frac{\sigma^2}{2} T} E^Q \left[ e^{-\sigma^2 T/2 + (2\sigma)\Delta W_T} I_{\{S_T > K\}} \right] \\
&= S^2 e^{2(r-q) - \frac{\sigma^2}{2} T} E^Q \left[ e^{+3\sigma^2 T/2} e^{-\frac{(2\sigma)^2 T}{2} + (2\sigma)\Delta W_T} I_{\{S_T > K\}} \right] \\
&= S^2 e^{2(r-q) + \sigma^2 T} E^Q \left[ e^{-\frac{(2\sigma)^2 T}{2} + (2\sigma)\Delta W_T} I_{\{S_T > K\}} \right]
\end{aligned}$$

因

$$\zeta_T = e^{-\frac{(2\sigma)^2 T}{2} + (2\sigma)\Delta W_T} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \beta_t dt + \int_0^T \beta_t dW_t^Q} \quad (\beta_t = 2\sigma)$$

$\therefore$  利用 Girsanov 概率测度转换成  $R$  测度:

$$\begin{aligned}
dW^Q &= dW^R + \beta_t dt = dW^R + (2\sigma)dt \\
\frac{dS}{S} &= (r - q)dt + \sigma dW^Q = (r - q)dt + \sigma(dW^R + 2\sigma dt) \\
&= (r - q + 2\sigma^2)dt + \sigma dW^R \\
\therefore d\ln S &= \left( r - q + 2\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW^R \\
&= \left( r - q + \frac{3\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW^R \\
S_T &= S \exp \left[ \left( r - q + \frac{3\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \Delta W_T^R \right] \quad (\Delta W_T^R = W_T^R - W_0^R) \\
\therefore E^Q(S_T^2 I_A) &= S^2 e^{2(r-q) + \sigma^2 T} E[\zeta_T I_{\{S_T > K\}}] \\
&= S^2 e^{2(r-q) + \sigma^2 T} E^R[I_{S_T > K}]
\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
E^R[I_{\{S_T > K\}}] &= P_r^R(S_T > K) = P_r^R[\ln S_T > \ln K] \\
&= P_r^R \left[ \ln S + \left( r - q + \frac{3\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \Delta W_T^R > \ln K \right] \\
&= P_r^R \left[ \frac{\Delta W_T^R}{\sqrt{T}} \leq \frac{\ln(S/K) + \left( r - q + \frac{3\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right]
\end{aligned}$$

$$= N(X + \sigma \sqrt{T})$$

此处:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(S/K) + \left(r - q + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} &= \underbrace{\frac{\ln(S/K) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}}_X + \frac{\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \\ &= X + \sigma \sqrt{T} \end{aligned}$$

所以, CSC 的评价公式为:

$$\begin{aligned} \text{CSC} &= \frac{1}{2} e^{-rT} \{ S^2 e^{2(r-q)+\sigma^2 T} N(X + \sigma \sqrt{T}) - 2KS e^{(r-q)T} N(X) \\ &\quad + K^2 N(X - \sigma \sqrt{T}) \} \\ &= \frac{1}{2} [ S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X + \sigma \sqrt{T}) - 2KS e^{-qT} N(X) \\ &\quad + K^2 N(X - \sigma \sqrt{T}) ] \end{aligned} \quad (3a)$$

此处:

$$X = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

连续履约价买权 CSC 的 Delta 可求解如下:

首先改写(3)式,再求解 Delta 比较容易:

$$\text{CSC} = \frac{1}{2} [ S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X + \sigma \sqrt{T}) - KS e^{-qT} N(X) - KC_{BS} ] \quad (3b)$$

此处:

$$\begin{aligned} C_{BS} &= S e^{-qT} N(X) - K e^{-rT} (X - \sigma \sqrt{T}) \\ &= \text{Black-Scholes 欧式买权评价公式} \end{aligned}$$

$$\Delta_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = e^{-qT} N(X)$$

$$\therefore \text{Delta} = \frac{\partial \text{CSC}}{\partial S} = \frac{1}{2} [ 2S e^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X + \sigma \sqrt{T})$$

$$\begin{aligned}
& + S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} \frac{\partial N(X+\sigma\sqrt{T})}{\partial S} \\
& - Ke^{-qT} N(X) - KSe^{-qT} \frac{\partial N(X)}{\partial X} \\
& - Ke^{-qT} N(X) ]
\end{aligned}$$

此处:第二项简化如下:

$$\begin{aligned}
S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} \frac{\partial N(X+\sigma\sqrt{T})}{\partial S} &= S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} \frac{1}{\sigma S \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(X+\sigma\sqrt{T})^2/2} \\
&= \frac{Se^{(r-2q+\sigma^2)T}}{\sigma \sqrt{T} \sqrt{2\pi}} e^{-(X^2+2X\sigma\sqrt{T}+\sigma^2 T)/2} \\
&= \frac{Se^{(r-2q+\sigma^2)T}}{\sigma \sqrt{T} \sqrt{2\pi}} e^{-X^2/2} e^{-\ln(S/K)-(r-q+\sigma^2/2)T-\sigma^2 T/2} \\
&\quad (\sigma\sqrt{T}X = \ln(S/K) + (r-q+\sigma^2/2)T) \\
&= \frac{Se^{-qT}}{\sigma \sqrt{T} \sqrt{2\pi}} \left(\frac{K}{S}\right) e^{-X^2/2} = \frac{Ke^{-qT}}{\sigma \sqrt{T}} n(X) \\
&\quad \left(n(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-X^2/2}\right)
\end{aligned}$$

又第四项简化如下:

$$-KSe^{-qT} \frac{\partial N(X)}{\partial X} = -KSe^{-qT} \frac{1}{\sigma S \sqrt{T}} n(X) = \frac{-Ke^{-qT}}{\sigma \sqrt{T}} n(X)$$

∴ 第二及第四项刚好正负抵消掉;第三及第五项也是正负抵消掉。

$$\therefore \Delta = \frac{\partial \text{CSC}}{\partial S} = Se^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X+\sigma\sqrt{T}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial^2 \text{CSC}}{\partial S^2} \\
&= e^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X+\sigma\sqrt{T}) + e^{(r-2q+\sigma^2)T} \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} n(X+\sigma\sqrt{T}) \\
&= e^{(r-2q+\sigma^2)T} \left[ N(X+\sigma\sqrt{T}) + \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} n(X+\sigma\sqrt{T}) \right] \quad (5)
\end{aligned}$$

此处:



$$n(X + \sigma \sqrt{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(X + \sigma \sqrt{T})^2 / 2}$$

根据以上避险比率的求解后,对连续履约价买权的避险可采用下列两种方法。

1. 根据(4)式的 Delta 持有  $\Delta$  股(或单位)的标的股,并连续动态修正调整避险比率  $\Delta$ 。

2. 或在期初建构买权组合,复制连续履约价买权。复制买权组合的建构方法正如本节所述(是静态避险)。

### 三、连续履约价限界选择权

连续履约价买权的履约价格是从  $K$  起一直增加,并无上限的限制。但可修正调整为履约价限制于某一范围以内,诸如  $80 \leq K \leq 100$ , 或  $45 \leq K \leq 55$  等等。履约价局限于某一范围的买权称为连续履约价限界买权(The Continuous-Strike Range Call, 称简 CSRC)。CSRC 的评价可经由两个连续履约价买权 CSC 相减而成。分析如下:

1. CSRC 的履约范围设定为  $K_1 \leq K \leq K_2$ 。
2. 第一个  $CSC_1$  的连续履约价从  $K_1$  起至  $\infty$ 。
3. 第二个  $CSC_2$  的连续履约价从  $K_2$  起至  $\infty$ 。

则 CSRC 的评价是  $CSC_1 - CSC_2$ , 表示如下:

$$\begin{aligned} CSRC &= e^{-rT} E^Q \left[ \frac{1}{2} (S_T - K_1)^2 \right] - e^{-rT} E \left[ \frac{1}{2} (S_T - K_2)^2 \right] \\ &= CSC_1 - CSC_2 \end{aligned} \quad (6a)$$

此处:

$$\begin{aligned} CSC_1 &= \frac{1}{2} [S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X_1 + \sigma \sqrt{T}) - 2K_1 S e^{-qT} N(X_1) \\ &\quad + K_1^2 N(X_1 - \sigma \sqrt{T})] \\ CSC_2 &= \frac{1}{2} [S^2 e^{(r-2q+\sigma^2)T} N(X_2 + \sigma \sqrt{T}) - 2K_2 S e^{-qT} N(X_2) \end{aligned} \quad (6b)$$

$$+ K_2^2 N(X_2 - \sigma \sqrt{T})] \quad (6c)$$

$$X_1 = \frac{\ln(S/K_1) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$X_2 = \frac{\ln(S/K_2) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

所以, CSRC 的 Delta 为

$$\Delta_{CSRC} = S e^{(r-2q+\sigma^2)T} [N(X_1 + \sigma \sqrt{T}) - N(X_2 + \sigma \sqrt{T})] \quad (7)$$

$$\Gamma_{CSRC} = \frac{\partial^2 CSC_1}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 CSC_2}{\partial S^2} \quad (\text{将(5)式的 } X \text{ 分别以 } X_1 \text{ 及 } X_2 \text{ 取代即是}) \quad (8)$$

对于连续履约界限买权 CSRC 的避险可采取下列任一种方法行之:

1. 动态调整, 并持有  $\Delta_{CSRC}$  单位的标的股(它是  $CSC_2$  及  $CSC_1$  Delta 之差, 正如(7)所示)。

2. 在期初建构买权组合, 复制 CSRC。第一个买权的履约价起自  $K_1$ , 而后增加  $\Delta K$  (即是  $K_1 + \Delta K$ ), 直至  $K_2$  止。即每一个买权履约价可表示为  $K_i^* = K_1 + (i-1)\Delta K$ ,  $i = 1, 2, \dots, N+1$ ;  $\Delta K = (K_2 - K_1)/N$ ;  $N$  必须足够大(即  $\Delta K$  足够小), 才能使买权复制组合几乎是 CSRC 的完整替代商品。

3. 或可持有长部分的  $CSC_1$  (即买进一单位的  $CSC_1$ ) 及一短部位的  $CSC_2$  (即出售一单位的  $CSC_2$ )。

在到期时, 连续履约价买权(CSC)及连续履约价界限买权(CSRC)与标的股价的关系, 可以图 1 表示。

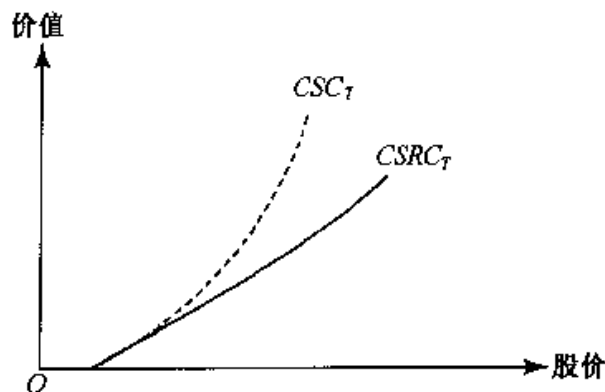


图 1

因  $CSC_T$  价值具有平方的性质,其价格会随着股价的上升而作二元方程式的行为上升。但因  $CRSC_T$  是由两个  $CSC$  的价差 ( $CSC_2 - CSC_1$ ) 形成,故当股价大于  $K_2$  时,其二元方程式的行为消失(因价差相减而消失), $CRSC$  的价值以线性增加。但当  $K_1 \leq S \leq K_2$ ,  $CRSC_T$  的现金流量随着股价  $S_T$  的变动而与  $CSC_T$  一致(见上图两线吻合)。以下列公式表如下:

当  $K_1 \leq S_T \leq K_2$ ,

$CRSC_T$  的斜率 =  $(S_T - K_1)$ , 斜率随着股价  $S$  上升而上升(更陡)。

当  $S_T \geq K_2$ ,

$$\begin{aligned} CRSC_T \text{ 的斜率} &= \frac{1}{2}(S_T - K_1)^2 / (K_2 - K_1) \quad (\text{设 } S_T = K_2) \\ &= (K_2 - K_1) / 2 \quad (\text{固定斜率}) \end{aligned}$$

注:  $CSC_T$  的斜率 =  $S_T - K_1$ , 斜率随着股价上升而更陡 ( $S_T \geq K_1$ )。

#### 四、平方选择权(Power Options)

平方选择权的到期现金流量为

$$C_T^* = \begin{cases} S_T^2 - K, & \text{若 } S_T > K \\ 0, & \text{若 } S_T \leq K \end{cases}$$

其评价可由前一节的结果求解:

$$\begin{aligned} C^* &= e^{-rT} E^Q[(S_T^2 - K)I_{|S_T > K|}] \\ &= e^{-rT} [E(S_T^2 I_{|S_T > K|}) - KE(I_{|S_T > K|})] \\ &= e^{-rT} [S^2 e^{2(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2)T} N(X + \sigma\sqrt{T}) - KN(X - \sigma\sqrt{T})] \quad (9) \end{aligned}$$

至于其 Delta 及 Gamma 可根据(9)以及(4)与(5)的结果求解(很容易)。

## 五、软著界线选择权(Soft Barrier Options)

一般入局选择权(Knock-In Options)或出局选择权(Knock-Out Options)的合约时效是,当股价触及界线(Barrier)时,开始生效(入局)或结束(出局)。这对避险者可能会产生极大的损失。比如说,避险者认为美元(\$)/台币(NT\$)在3个月内应会低于NT\$34/\$。因此,为节省避险成本,避险者买进上出局买权(Up-and-Out Calls),界线为NT\$34/\$,履约价为NT\$31.5/\$。但若在3个月到期前,汇率突然上升触及NT\$34,而后很快又回跌至NT\$34以下,则该上出局买权已失效,避险者无法获得日后应有的避险保护,而遭受损失。因此,为改进及避免标的价格突然上升或下跌触及界线而导致避险合约的失效,我们可采用软著界线选择权。以上例为说明,界线( $H$ )的设定不是单点NT\$34,而是有一定范围,比如说界线范围介于34及35.5之间( $34 \leq H \leq 35.5$ )。若汇率上升至34.5,则该选择权的价值消失 $1/3$ ( $= \frac{34.5 - 34}{35.5 - 34} = \frac{0.5}{1.5}$ ),还剩余 $2/3$ 的价值。之后,汇率下跌。但不久汇率又再上升至35,则其价值再消失 $2/3$ ( $= \frac{35 - 34}{1.5} = \frac{1}{1.5}$ ),剩余 $4/9$ 的剩余价值( $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ )。避险者(或投资人)不会因标的价格短暂触及界线而失去避险的全部保护(或失去投资选择权的全部价值)。

软著界线选择权的评价可先利用现已有的上入局、上出局、下入局及下出局选择权的评价公式,而后对评价公式内的界线积分(从下界线积分至上界线)。以软著界线下入局买权(A Soft-Barrier Down-and-in Call)为范例。根据 Rubinstein 及 Reiner(1991),下入局买权 DIC 的评价模型为

$$DIC = S e^{-qT} (H/S)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT} (H/S)^{2(\lambda-1)} N(y - \sigma \sqrt{T}) \quad (10)$$

此处:

$$y = \frac{\ln(H^2/SK)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad (11)$$

$$\left( K = \text{履约价}, \lambda = \frac{(r-q)}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right)$$

设定界线的范围介于  $L$  及  $U$  之间, 即  $L \leq H \leq U$ 。

根据下入局买权  $DIC[(10)]$ , Hart 及 Ross(1994)对(9)的  $H$  从  $L$  积分至  $U$  而获得软著界限下入局买权(SBDIC)的评价公式如下:

$$\begin{aligned} \text{SBDIC} &= \frac{1}{U-L} \int_L^U DIC dH \\ &= \frac{1}{U-L} [Se^{-qT} S^{-2\lambda} [(SK)^{(\lambda+0.5)}/2(\lambda+0.5)] \\ &\quad \times ((U^2/SK)^{(\lambda+0.5)} N[y_1(U)] - A_S N[y_2(U)] \\ &\quad - (L^2/SK)^{(\lambda+0.5)} N[y_1(L)] + A_S N[y_2(L)] \\ &\quad - Ke^{-rT} S^{-2(\lambda-1)} [(SK)^{(\lambda-0.5)}/2(\lambda-0.5)] \\ &\quad \times ((U^2/SK)^{(\lambda-0.5)} N[y_3(U)] - A_K N[y_4(U)] \\ &\quad - (L^2/SK)^{(\lambda-0.5)} N[y_3(L)] + A_K N[y_4(L)])] \quad (12) \end{aligned}$$

此处:

$$y_1(H) = [\ln(H^2/SK)]/\sigma\sqrt{T} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_2(H) = y_1(H) - (\lambda+0.5)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_3(H) = [\ln(H^2/SK)]/\sigma\sqrt{T} + (\lambda-1)\sigma\sqrt{T}$$

$$y_4(H) = y_3(H) - (\lambda-0.5)\sigma\sqrt{T}$$

$$A_S = e^{-1/2[\sigma^2 T(\lambda+0.5)(\lambda-0.5)]}$$

$$A_K = e^{-1/2[\sigma^2 T(\lambda-0.5)(\lambda-1.5)]}$$

其他类型软著界线选择权的评价模型可依据原来入局或出局的评价公式加以对界线积分(从  $L$  至  $U$ )即可获得软著界线选择权的评价模型。

## 参 考 文 献

- Black, Fischer and Myson S. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* 81(3), p. 637—654, 1973.
- I. Hart and M. Ross, "Striking Continuity", Over The Rainbow, Chaper 25, *Risk* Publication (1994).
- M. Rubinstein and E. Reiner, "Breaking down the Barriers", *Risk*, September 1991, p. 23—35, 1991.

## 第二十六章 美式选择权效率评价法

### 一、简介

我们已知道,标的物不支付现金股利的美式买权其实是欧式买权,因此可以欧式买权模型评价此种美式买权。但对支付现金股利的标的,美式选择权无法以封闭解的模型加以评价,而必须借用二元树(或称二项树, Binomial Tree)或有限差法(Finite-Difference Methods)评价美式选择权,因此评价无法以公式解(或封闭解)的方式表示。若能以近似公式解的方式来评价美式选择权,则更会含有经济意义。比如说,美式买权(或卖权)价值等于欧式买权(或卖权)加上提前履约溢酬(Early-Exercise Premium),则此评价方式当然比二元树及有限差分法更具有经济意义。此外,若近似公式解的速度又快,且在某些情况下其准确度不逊于二元树及有限差法,则此种近似公式解可获得广泛接受。因此,在本章中我们将介绍 Barone-Adesi 及 Whaley(1987)的美式选择权近似公式解评价模型。

### 二、欧式选择权评价模型

我们首先假设标的物价格  $S$  的随机过程为几何布朗运动如下:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (1a)$$

此处:  $\sigma =$  报酬率的瞬间标准差  $\sqrt{\text{Var}(dS/S)}$

$\mu =$  瞬间期望报酬率(或变动百分比)

$S =$  标的物的价格(标的物可能是股票、外汇、金、银等等)

在风险中立下不同商品的持有成本,可详细表示如下:

1. 股票的持有成本:  $b = r - q$ ,  $r =$  本国无风险利,  $q =$  连续股利率(或利息)。

2. 外汇的持有成本:  $b = r - r_f$  (即改  $q$  成为外国无风险利率  $r_f$ )

3. 金、银或其他实物商品的持有成本:  $b = r +$  (储存费用 + 保险费 + 商品退时或腐坏成本等等)。因此,持有成本比无风险利率  $r$  高。(因实质商品存有储存费、保险费等)。

在风险中立下,若标的物支付股息的股票,则(1)可改写为:

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma dW = b dt + \sigma dW, \quad b = r - q \quad (1b)$$

若标的是外汇,则(1)成为:

$$\frac{dS}{S} = (r - r_f)dt + \sigma dW = b dt + \sigma dW, \quad b = r - r_f \quad (1c)$$

若标的是实质商品也可以(1b)及(1c)的类似公式表示之。

在无套利条件下,由期货理论可知,期货价格  $F$  是现货价格  $S$  以持有成本  $b$  成长的价格,以公式表示如下:

$$F = S e^{bt} \quad (T = \text{期货到期日}) \quad (2)$$

根据 Itô Lemma,期货价格的随机过程可表示为:

$$\frac{dF}{F} = (a + b)dt + \sigma dW \quad (3)$$

注:  $\frac{\partial F}{\partial t} = b S e^{bt}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial S} = e^{bt}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0$ , 将偏微分代入 Itô Lemma 即

是(3)。

按照 Black-Scholes(1973)或 Merton(1973),若  $f = f(S, t)$  是标的物的条件求偿证券(Contingent Claims)或选择权,则我们可根据  $f$  及标



的物建立一个避险组合： $H = -f + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S$ 。根据此避险组合，我们已知该选择权可由下列偏微分方程式求解：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}(r - b)S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \quad (\text{详见注解的证明}) \quad (4)$$

由(4)及欧式买权的临界条件： $\max(S_T - K, 0)$ ，我们已知欧式买权的评价公式为：

$$C = S e^{-(r-b)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (5)$$

此处：

$K =$  履约价

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T})$$

由(4)及欧式卖权的临界条件： $\max(K - S_T, 0)$ ，欧式卖权的评价公式为

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) + S e^{-(r-b)T} N(-d_1) \quad (6)$$

注：(4)的证明简单描述如下：

$$dH = -df - \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right)dt$$

在  $dt$  瞬间， $H$  的净报酬率（扣除持有成本后） $= rH dt - b\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S dt$

$$\begin{aligned} \therefore -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right)dt &= rH dt - b\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S dt \\ &= r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)dt - b\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S dt \end{aligned}$$

移项并简化即是(4)

若利用期货及现货间的持有成本关系(2)，将  $S = F e^{-bt}$  代入(5)及(6)，我们即可获得 Black(1976)的期货选择权评价模型如下：

期货买权：

$$C = e^{-rT} [FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (7)$$

$$d_1 = \frac{\ln(Fe^{-bt}/K) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

期货卖权:

$$P = e^{-rT} [KN(-d_2) - FN(-d_1)] \quad (8)$$

### 三、美式选择权评价

由欧式买权评价公式(5)可知,当  $S \rightarrow \infty$ ,  $N(d_1) \rightarrow 1$  及  $N(d_2) \rightarrow 1$  ( $\because d_1$  及  $d_2$  趋近  $+\infty$ )。因此  $C = Se^{-(r-b)T} - Ke^{-rT}$ 。这是欧式买权价值的最大极限值。若是美式买权,当提前履约时,其履约价值为  $S_t - K$ 。若  $(r-b) > 0$  (或  $b < r$ ), 当美式买权提前履约价值  $(S_t - K)$  可能大于欧式买权的(极限)价值时,

$$S_t - K \geq Se^{-(b-r)T} - Ke^{-rT} \quad (9)$$

则美式买权可能会被提前履约。

若  $(r-b) < 0$  或  $b > r$  时,

$$Se^{-(r-b)T} - Ke^{-rT} > S - Ke^{-rT} > S - K$$

因此,不可能发生提前履约。

在可能被提前履约的情况下(9),美式买权(或卖权)可表示为

$$C^A = C^E + \lambda \quad (10)$$

此处:  $C^A$  = 美式买权,  $C^E$  = 欧式买权

$\lambda$  = 提前履约溢酬(Early Exercise Premium)

或

$$P^A = P^E + \gamma [\text{如(10),作类似解释}] \quad (11)$$

观察(10)及(11),只要能求解提前履约溢酬,即可藉欧式选择权求解美式选择权的价值。这是下一节的介绍。

### 美式选择权的近似评价模型:美式买权

由(10),美式买权的提前履约溢酬为:

$$\lambda = C^A - C^E \quad (12)$$

将偏微分方程式(4)分别应用于欧式及美式买权( $C^E$  及  $C^A$ ),并且两者相减即可获得美式买权提前履约溢酬  $\lambda$  的偏微分方程式如下:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial S} bS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - r\lambda = 0$$

或

$$\lambda_t + \lambda_s(bS) + \frac{1}{2} \lambda_{ss}(\sigma^2 S^2) - r\lambda = 0 \quad (13)$$

此处:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial C^A}{\partial t} - \frac{\partial C^E}{\partial t} \\ \lambda_s &= \frac{\partial \lambda}{\partial S} = \frac{\partial C^A}{\partial S} - \frac{\partial C^E}{\partial S} \\ \lambda_{ss} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C^A}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 C^E}{\partial S^2} \end{aligned}$$

将(13)乘以  $2/\sigma^2$ ,并令  $m = 2r/\sigma^2$  及  $n = 2b/\sigma^2$ , 则(13)可改写成为

$$S^2 \lambda_{ss} - m\lambda + nS\lambda_s - (m/r)\lambda_T = 0 \quad (14)$$

此处:  $\lambda_T = \frac{\partial \lambda}{\partial T} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\lambda_t$

因为在此设定  $t^*$  为到期日,  $t$  为现在。故  $T = t^* - t$  代表存续时间。  $\therefore dT = -dt$

因提前履约溢酬  $\lambda$  是时间  $T$  及标的价格的函数,故令

$$\lambda = k(T)g(S, k) \quad (15)$$

$$\therefore \lambda_s = kg_s, g_s = \frac{\partial g(S, k)}{\partial S}$$

$$\lambda_{ss} = kg_{ss}, g_{ss} = \frac{\partial^2 g(S, k)}{\partial S^2}$$

$$\lambda_T = k_T g + k \frac{\partial g}{\partial T} = k_T g + k \frac{\partial g}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial T} = k_T g + k g_k K_T$$

将以上  $\lambda$  的偏微分代入(15)并简化即得

$$S^2 g_{ss} + n S g_s - mg \left[ 1 + \left( \frac{k_T}{rk} \right) \left( 1 + \frac{k g_k}{g} \right) \right] = 0 \quad (16)$$

提前履约溢酬应会随着时间过去(即  $T$  缩小)而逐渐降低,因此我们可令

$$k(T) = 1 - e^{-rT} \quad (17)$$

(当  $T \rightarrow 0$ ,  $k(T) \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$ )

$$\therefore k_T = \frac{\partial k}{\partial T} = r e^{-rT}$$

将  $k$  及  $k_T$  代入(16),并简化即是

$$\begin{aligned} S^2 g_{ss} + n g_s S - mg \left[ 1 + \left( \frac{r e^{-rT}}{rk} \right) \left( 1 + \frac{k g_k}{g} \right) \right] &= 0 \\ S^2 g_{ss} + n g_s S - mg - mg \left( \frac{e^{-rT}}{k} \right) - m e^{-rT} g_k &= 0 \\ S^2 g_{ss} + n g_s S - mg \left( 1 + \frac{1-k}{k} \right) - (1-k) m g_k &= 0 \\ (e^{-rT} = 1-k) \\ \therefore S^2 g_{ss} + n g_s S - (m/k)g - (1-k)m g_k &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

到此为止(18)仍代表  $\lambda$  的确实偏微分方程式,而不是近似偏微分方程式。但我们可以合理设定(8)式的最后一项  $(1-k)m g_k$  为零,理由如下:就很短期或很长期的选择权而言,其  $k$  值接近零( $\because$  当  $T \rightarrow \infty$ ,  $k(T) \rightarrow 1 \Rightarrow (1-k) \rightarrow 0$ 。又当  $T \rightarrow \infty$ ,  $k(T) \rightarrow 0 \Rightarrow g$  不是  $k$  的函数  $\Rightarrow g_k = 0$ , 故  $(1-k)m g_k \rightarrow 0$ )。所以,  $\lambda$  的偏微分方程式改写为:

$$S^2 g_{ss} + n S g_s - (m/k)g = 0 \quad (19)$$

(19)式代表一个二次项普通偏微分方程式(The Second-Order Differential Equations),其解答已经确知是  $aS^q$  的形式。因此,我们可令

$$g = aS^q$$

$$\therefore g_s = \frac{\partial g}{\partial S} = aqS^{q-1}, g_{ss} = \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} = aq(q-1)S^{q-2}$$

将  $g$ ,  $g_s$  及  $g_{ss}$  代入(19)简化并消除  $S$  即变成二次方程式如下:

$$q^2 + (n-1)q - (m/k) = 0 \quad (20)$$

它有两个独立解答:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{-(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m/k)}}{2} \\ &= \frac{-(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4(m/k)}}{2} > 0 \text{ (容易证明)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$q_2 = \frac{-(n-1) - \sqrt{(n-1)^2 + 4(m/k)}}{2} < 0 \quad (22)$$

(19)式的一般答案可改写为两个独立答案的线性组合如下:

$$g(S) = a_1 S^{q_1} + a_2 S^{q_2} \quad (23a)$$

下一步,我们必须决定  $a_1$  及  $a_2$ 。假设  $a_2 \neq 0$ , 则因  $q_2 < 0$ , 当  $S \rightarrow 0$  时,  $a_2 S^{q_2} \rightarrow \infty \Rightarrow g(S) \rightarrow \infty$ , 则  $\lambda$  无限大, 这是不合理的情况。故  $a_2$  应等于零 ( $a_2 = 0$ )。因此, 美式买权的价值可由(10), (15), (23)及  $a_2 = 0$  改写为

$$C^A(S, T) = C^E(S, T) + ka_1 S^{q_1} \quad (23b)$$

再次, 我们决定  $a_1$ 。当标的价格上升时,  $C^A(S, T)$  也随之上升。因此当标的价格上升至某一价位  $S^*$  时,  $C^A(S, T)$  的价值刚好等于其履约价值  $(S^* - K)$ 。也就是,  $C^A(S, T)$  价格线上升而与  $(S - K)$  直线相切于  $S^*$  ( $S^*$  为切点), 则在  $S^*$  点, 两线的价值相等:  $S^* - K = C^A(S^*, T)$ 。也就是,

$$S^* - K = C^E(S^*, T) + ka_1 S^{*q_1} [= C^A(S^*, T)] \quad (24)$$

在  $S^*$ , 直线  $(S^* - K)$  与  $C^A(S^*, T)$  线相切。因此(24)也代表两者在  $S^*$  点的斜率相等。对(24)的  $S^*$  微分:

$$1 = S^* e^{-(r-b)T} N(d_1) + ka_1 q_1 S^{*(q_1-1)} \quad (25)$$

此处:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^E}{\partial S^*} &= S^* e^{-(r-b)T} N(d_1^*) \\ d_1^* &= \frac{\ln(S^*/K) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \\ q_2 &= (22)\end{aligned}$$

由(25)解出  $a_1$  如下:

$$a_1 = [1 - S^* e^{-(r-b)T} N(d_1^*)] / (kq_1 S^{*(q_1-1)}) \quad (26)$$

再将  $a_1$  代入(24)即得

$$S^* - K = C^E(S^*, T) + [1 - e^{-(r-b)T} N(d_1^*)] S^* / q_1 \quad (27)$$

(27)只有一个未知数  $S^*$ , 可根据(27)以求解非线性方程式的数值方法求得  $S^*$ 。在本章另一节中, 会再详细介绍。

一旦  $S^*$  可由(27)求解后,  $a_1$  也可由(26)计算。最后将(26)的  $a_1$  代入(23)就是美式买权的近似评价公式, 表达如下:

1. 当  $S < S^*$  (尚未提前履约),

$$C^A(S, T) = C^E(S, T) + B_1 (S/S^*)^{q_1} \quad (28a)$$

此处:  $B_1 = (S^*/q_1) [1 - e^{-(r-b)T} N(d_1^*)] > 0 (\because r-b > 0)$

$S^*$  由(27)求解出。

2. 当  $S \geq S^*$  (提前履约)时,

$$C^A(S, T) = S - K \quad (28b)$$

### 美式卖权的近似评价模型

一旦美式买权的近似评价模型推导出后, 美式卖权的近似评价模型可以类似的方法求得。简述如下:

由(11), 美式卖权的提前履约溢酬为

$$\gamma = P^A - P^E \quad (29)$$

我们可设定  $\gamma$  是时间及标的价格的函数, 并表示如同(15)式:  $\gamma =$

$k(T)g(S, k)$ , 且  $k(T) = 1 - e^{-rT}$  [= (17)]。而经过如同(18), (19), (20), (21)及(22)的相同推导, 求解出  $q_1$  及  $q_2$ , 并可表示  $g(S, k)$  正如(23)式。而后, 就卖权而言,  $a_1 = 0$ 。若  $a_1 \neq 0$ , 则当  $S \rightarrow \infty$ ,  $a_1 S^{q_1} \rightarrow \infty$  ( $\because q_1 > 0$ )。因此  $\gamma$  变成无限大, 且  $P^A$  也变成无限大(而不是零, 当  $S \rightarrow \infty$ ,  $P^A \rightarrow 0$ )。因此  $a_1 \neq 0$  的假设不正确, 而是  $a_1 = 0$  才是正确。故美式卖权可表示为

$$P^A(S, T) = P^E(S, T) + ka_2 S^{q_2} \quad (30)$$

正如  $a_1$  的求法,  $a_2$  可表示为

$$a_2 = -[1 - e^{-(r-b)T}N(-d'_1)]/(kq_2 S'^{q_2-1}) \quad (31)$$

$$\text{此处: } d'_1 = \frac{\ln(S'/K) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$S'$  代表美式提前履约价格  $(K - S')$  与其内含值  $P^A(S', T)$  相等的股价。也就是  $S'$  是由求解下列等式而获得:

$$K - S' = P^A(S', T)$$

或

$$K - S' = P^E(S', T) - [1 - e^{-(r-b)T}N(-d'_1)]S'/q_2 \quad (32)$$

因此, 美式卖权的近似评价模型如下:

1. 当  $S > S'$  (尚未提前履约)

$$P^A(S, T) = P^E(S, T) + B_2(S/S')^{q_2} \quad (33)$$

$$\text{此处: } B_2 = -(S'/q_2)[1 - e^{-(r-b)T}N(-d'_1)] > 0$$

$$(\because q_2 < 0, r - b > 0 \text{ 及 } e^{-(r-b)T}N(-d'_1) < 1)$$

2. 当  $S \leq S'$  (提前履约)时,

$$P^A(S, T) = K - S \quad (34)$$

#### 四、数值分析法: 求出 $S^*$ 及 $S'$

在评价美式买权及卖权时, 我们必须首先分别求出  $S^*$  及  $S'$ 。  $S^*$

及  $S'$  可借由 Newton-Raphson 求解非线性方程式的数值分析法, 分别由 (27) 及 (32) 求出  $S^*$  及  $S'$ 。Newton-Raphson 数值分析很受广泛采用, 许多电脑软体都备有此种数值分析方法的程式。只要在数值分析开始时, 所设定解答的数值是合理, 则采用 Newton-Raphson (NR) 的重复求解程序 (Iterative Procedure) 会很快收敛, 并获得很准确的答案, 且可忍受的误差可自行设定 (例如答案误差小于  $10^{-5}$  或  $10^{-6}$  均可)。其中可以采用的起初答案 (Start Value) 为: 令  $S^* = K$  (履约价), 或令  $S' = K$ 。而后由 NR 数值分析求得最后的  $S^*$  或  $S'$ 。

Barone-Adesi 及 Whaley (1987, BW) 提供求解  $S^*$  及  $S'$  的近似公式如下:

$$S^* = K + [S_\infty^* - K](1 - e^{h_1}) \quad (35)$$

此处:

$$\begin{aligned} S_\infty^* &= \frac{K}{1 - q_1^*} \\ q_1^* &= [- (n - 1) + \sqrt{(n - 1)^2 + 4m}] / 2 \\ h_1 &= - (bT + 2\sigma \sqrt{T}) \left[ \frac{K}{S_\infty^* - K} \right] \\ S' &= K / (1 - 1/q_2^*) \\ q_2^* &= [- (n - 1) - \sqrt{(n - 1)^2 + 4m}] / 2 \end{aligned} \quad (36)$$

(35) 及 (36) 式的证明是属于数值分析法, 有兴趣的读者可自行参阅 BW 的论文。

此外, 若不采用 Newton-Raphson 方法时, BW 也提供另一种重复求解  $S^*$  的方法, 表示如下: (可参阅 BW 的推导)

$$S_{i+1} = [K + RHS(S_i) - b_i S_i] / (1 - b_i) \quad (37)$$

此处:

$$\begin{aligned} RHS(S_i) &= (27) \text{ 的右边} \\ &= C^E(S_i, T) + [1 - e^{-(r-b)T} N(d_1(S_i))] S_i / q_1 \\ b_i &= e^{-(r-b)T} N[d_1(S_i)] (1 - 1/q_1) \\ &\quad + [1 - e^{-(r-b)T} N[d_1(S_i)] / \sigma \sqrt{T}] / q_1 \end{aligned} \quad (38)$$



刚开始求解  $S^*$  时,可设定起初值  $S_1 = K$ ,而后计算(38)的  $b_1$ ,再将  $b_1$  代入(37)求得  $S_2$ 。再以  $S_2$  利用(38)及(37)求得  $S_3$ 。如此重复演算,直至达到某一可忍受的误差为止,例如:

$$\frac{|(S_i - K) - RHS(S_i)|}{K} < 10^{-6} \text{ (或 } 10^{-7} \text{)} \quad (39)$$

则最后能达到(39)所示误差准则的  $S_i$  即是答案  $S^*$ 。

BW 的实证结论如下:

1. 对到期日短于一年的美式选择权,BW 的评价模型不但准确,其速度也极快[相对于二元树及有限差分法(The Finite-Difference Method)]。

2. 若到期日一年以上,建议以二元树或限差法求解美式选择权,因 BW 方法的准确度不如前两者的准确度。

## 参 考 文 献

- F. Black and M. S. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 81 (May-June 1973), p. 637—654.
- M. J. Brennan and E. S. Schwartz. "The Valuation of American Put Options", *Journal of Finance* 32 (May 1977), p. 449—462.
- M. Brenner, G. R. Courtadon, and M. Subrahmanyam. "Option on the Spot and Options on Futures", *Journal of Finance* 40 (December 1985), p. 1303—1317.
- J. C. Cox, S. A. Ross and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics* 3 (September 1979), p. 229—263.
- M. Garman and S. Kchlhagen. "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance* 2 (December 1983), p. 231—237.
- R. Geske and H. E. Johnson. "The American Put Valued Analytically", *Journal of Finance* 39 (December 1984), p. 1511—1524.
- R. Geske and K. Shastri. "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Valuation Techniques", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20 (March 1985), p. 45—71.

- 
- H. E. Johnson. "An Analytic Approximation for the American Put Price", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18 (March 1983), p. 141—148.
- L. W. MacMillan. "Analytic Approximation for the American Put Option", *Advances in Futures and Operation Research* 1 (1986), p. 119—139.
- R. C. Merton. "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (Spring 1973), p. 141—183.
- R. Roll. "An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 5 (November 1977), p. 251—258.
- R. E. Whaley. "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics* 9 (June 1981), p. 207—211.
- \_\_\_\_\_. "Valuation of American (Futures) Options. Theory and Empirical Test", *Journal of Finance* 41 (March 1986), p. 127—150.

## 第二十七章 二元树选择权评价模型:CRR

### 一、简介

1973 年 Black-Scholes 发表了评价选择权的模型。该模型被认定为令人满意的选择权均衡评价模型。从此之后,选择权的理论与应用涉及各方面的财务金融,诸如投资、公司财务、银行、国际金融、金融商品创新等等各方面的发展。因此,进一步了解 Black-Scholes 模型及其经济意义是很重要的工作。但该模型的推导涉及高深数学,不容易了解,且其所隐含的重要经济意义因高深数学的使用而无法广泛为读者所了解。鉴于此,Cox, Ross 及 Rubinstein(1979,简称 CRR)利用二元树模型推导选择权的评价模型;其所涉及的数学不深,所隐含的重要经济意义容易为读者所了解。因此,本章的目的是要详细介绍 Cox-Ross-Rubinstein 的二元树评价模型。不但介绍该模型的详细推演,也增添说明其所隐含的重要经济意义。

### 二、评价选择权的基本概念

我们举例说明评价选择权的基本概念。

例:目前某股票的现价( $S$ )为 \$100。在下一期终止时,该股价有两种可能:上升至每股 \$150,或下降至每股 \$50。以该股票作为履约资产的买权履约价格( $X$ )为 \$100。在下一期的(借贷)利率为 25%。

在这种情况下,该买权契约应值多少?若无风险套利机会不存在,我们可评价该买权的价值。为决定该买权的价值,首先我们建立一个套利组合如下:

1. 出售 4 个买权。
  2. 以 \$100 的价格买入该股票 2 股(假设该股票不支付任何现金股利)。
  3. 以 25% 的利率借款 \$80,并在期终偿还。
- (借款 \$80 加上出售 4 个买权所得的资金购入 2 股)。
- 在期末时,该组合的损益结构(或报酬结构)如下:

组合成分	组合 现在价值	期终组合价值	
		$S^* = 50$	$S^* = 150$
出售 4 个买权	$4C$	0	$-200 [= 4(150 - 100)]$
买入 2 股	$-200 (= 2 \times 100)$	$100 (= 2 \times 50)$	$300 (= 2 \times 150)$
借款	80	$-100 [= 80(1.25)]$	-100
期终组合价值:		0	0

观察上表得知,该套利组合的期终价值都是零(不管股价是上升或下降)。因期终价值都是一样(零),故它是一个无风险套利组合。这代表无风险套利利润不存在。因此,该套利组合的现在成本应为零。也就是,

$$4C - 200 + 80 = 0$$

$$\therefore C = \$30$$

所以,该买权的均衡价格(或称合理价格)应为 \$30。若该买权的价格不是 \$30,则会有无风险套利的机会存在。举例两种情况如下:

1. 若  $C = \$40$ , 则上表中的套利组合在期初就会有  $\$40 (= 4 \times 40 - 200 + 80)$  的利润。但期终报酬为零。故投资者建立如同表中的套利组合就可获取无风险利润 \$40。

2. 若  $C = \$20$ , 投资者可采取与上表中的相反组合策略套利。也就是,买入 4 个权、出售 2 股、并贷放 \$80。则在期终时,该组合的报酬仍然是零(读者可自行计算、简单)。但在期初却可获得无风险利润  $40 (= -4 \times 20 + 2 \times 100 - 80)$ 。

由上面的介绍可知,只要无风险套利不存在,我们就可评价买权(同样原理也可评价卖权)。在竞争的市场下,无风险套利是不存在。同时,买权可由借入适当的金额,并买入适当数目的股数加以复制。〔在本例中,复制组合 =  $\frac{1}{4}(2 \text{ 股} - \text{借款 } \$80) = \frac{1}{2} \text{ 股} - \text{借款 } \$40 = \text{一个买权}$ 〕。此外,由决定买权价值的程序可知,决定买权(或卖权)的重要因素是:

1. 现在股价。
2. 未来股票的上升与下降价格。
3. 履约价格。
4. 利率。

因此,股价上升与下降的概率、股价的期望值与投资者的风险厌恶程度都不是评价选择权的重要因素。因此,不管未来一期是牛市或熊市,投资者对选择权的看法(即评价)都是完全一致。

上面的例题虽然简单,它正告诉我们评价选择权的特征与重要的经济意义。二项式(或二元树)评价模型的推导比 Black-Scholes 模型的推导简单,且容易了解其所隐含的经济意义,正如上面例题所示。在下一节中,我们将很详细的介绍 Cox-Ross-Rubinstein(1979, CRR)的二项式评价模型。

### 三、二项式评价模型

在推演二项式(或二元树)评价模型时, Cox, Ross 与 Rubinstein (1979)采用下列假设条件:

1. 资本市场是竞争性的市场(Competitive Market)。
2. 在资本市场内,诸如交易费用及税率均不存在。投资者可任意借与贷放资金而不受限制。任一投资者或市场交易者都无能力控制价格;也就是,他们接受市场所决定的价格(Price Takers)。
3. 投资者可无限制地卖空(或放空)任何资产(诸如股票)。

4. 无风险借贷利率存在, 固定不变且相等。备有条件 2、3 及 4 的资本市场, 我们称之为完全市场(Perfect Market)。

此外, 我们也假设:

5. 履约股票在选择权到期日或之前, 无股息的分发。

6. 投资者是有理性的, 他们寻求最高的利润。因此, 他们偏好高利润(Preferring More Wealth to Less)。

在推论二项式评价模型时, 我们需要下列符号:

$\Delta$  代表所应购买或卖空(或放空)的履约股数,

$B$  代表以无风险利率筹借或贷放的资金金额,

$(u-1)$  代表履约股价上升的百分比 ( $u > 1$ ),  $q$  代表股价上升的概率,  $(d-1)$  代表履约股价下降的百分比 ( $d > 1$ ),  $(1-q)$  代表股价下降的概率。

我们介绍如何以二项式模型评价欧式买权契约如下:

单一期的评价:

1. 由  $t=0$  至  $t=1$ , 履约股价可能上升  $(u-1)$  百分比或下降  $(d-1)$  百分比。在  $t=1$  时, 股价可由图 1 代表。

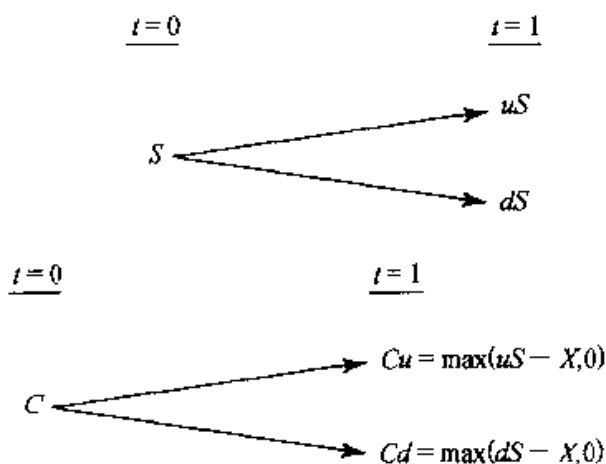


图 1

此处:  $X$  = 买权的履约价

$C_u$  代表, 在  $t=1$  时, 当股价上升  $(u-1)$  百分比的买权价格

$C_d$  代表, 在  $t=1$  时, 当股价下降  $(d-1)$  百分比的买权价格

$uS$  代表,在  $t = 1$  时,当股价上升 ( $u - 1$ ) 时的价格

$dS$  代表,在  $t = 1$  时,当股价上升 ( $d - 1$ ) 时的价格

我们的目的,是要评价在  $t = 1$  时该买权契约的合理价格。评价的方法是复制一个避险组合,使其在  $t = 1$  的资金结构(Payoff Structure)与该买权在  $t = 1$  的资金结构完全相同。该避险组合的成分包括履约股的股数( $\Delta$ )及筹借或贷放某些资金( $B$ )。所以,我们进行第二步,以求出  $\Delta$  及  $B$ 。

2. 由  $t = 0$  至  $t = 1$ , 因股价上升 ( $u - 1$ ) 或下降 ( $d - 1$ ), 以致避险组合的价值也发生变动。其价值变动可由图 2 表示。

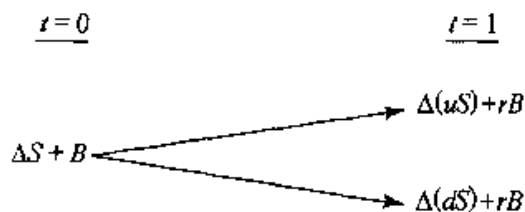


图 2

此处:  $r = (1 + i)$  ( $i$  = 无风险利率)

因我们要建立复制(避险)组合,使其在  $t = 1$  时的资金结构与买权的资金结构相同。故根据上面  $t = 1$  的图表,我们可建立下列两方程式:

$$C_u = \Delta uS + rB \quad (1)$$

$$C_d = \Delta dS + rB \quad (2)$$

解答上面二项方程式,我们得到:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u - d)} \quad (3)$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r} \quad (4)$$

公式(3)及(4)代表在  $t = 0$  时复制(避险)组合所应包含的履约股数及筹借或贷放资金的金额。

因在  $t = 1$  时复制组合与买权的资金结构完全相同(由公式(1)及(2)所代表),两者的现值( $t = 0$ )也应相同。也就是,

$$C = \Delta S + B \quad (5)$$

将公式(3)及(4)的  $\Delta$  及  $B$  代入公式(5),我们获得买权契约在  $t = 0$  时的价格如下:

$$C = \frac{1}{r} \left[ \frac{(r-d)}{u-d} C_u + \frac{(u-r)}{u-d} C_d \right] \quad (6a)$$

$$= \frac{1}{r} [pC_u + (1-p)C_d] \quad (6b)$$

此处:  $p = (r-d)/(u-d)$ ,  $1-p = (u-r)/(u-d)$

公式(6a)或(6b)可说是欧式买权的单一期评价模型(A Single Period Pricing Model)。买权价格是由其未来的价格( $C_u$  及  $C_d$ )、履约股价的未来变动百分比( $u$  及  $d$ )、履约价格( $X$ )与利率( $r$ )所决定。也可说,在  $t = 0$  时,买权价格是其期望价值  $[pC_u + (1-p)C_d]$  的现值;其原因如下:

(1)  $R_u > i > R_d$  必须成立,否则无风险套利机会存在( $R_u$  与  $R_d$  分别代表股价上升或下降时的报酬率)。若  $R_u (= 5\%) < i (= 7\%)$ , 则套利投资者可卖空股票,而将所得的资金以 7% 的利率贷放。在  $t = 1$  时,股价上升 5%,套利投资者损失 5%。但获得 7% 利息可以弥补 5% 的损失而有余。因此种无风险套利机会的存在,以及投资者的大量套利行为,将促使利率下降( $i$  下降)以及股价上升百分比的可能增大( $u$  可能增大)。终将造成  $R_u > i$ , 套利机会消失。同样的,若  $i < R_d$ , 投资者可以  $i$  的利率借款。而后,将所借的资金购买股票而获得套利 ( $R_d - i$ )。投资的套利行为终将促使  $i > R_d$  与套利机会的消失。所以,  $R_u > i > R_d$ 。也就是,  $u > r > d$  (因  $1 + R_u = u$  及  $1 + R_d = d$ ,  $r = 1 + i$ )。

(2) 因  $u > r > d$  及  $u > d$ , 故  $0 < p < 1$ ,  $0 < 1-p < 1$ 。而且  $p + (1-p) = 1$ 。所以,  $p$  可视为买权价格上升的概率;而  $(1-p)$  可视为买权价格下降的概率。 $p$  及  $(1-p)$  被称为拟似概率(Pseudo Probabilities),或风险中立概率(Risk-Neutral Probabilities);但它们不是股价上升或下降的真正概率。

(3) 根据第二原因,  $pC_u + (1-p)C_d$  正是买权在  $t = 1$  时的期望价值。所以,公式(6a)或(6b)代表买权在  $t = 1$  时的价值,也就是期望



价格的现价(以无风险利率  $R$  做为折现率)。

根据上面单一期买权的评价程序,CRR 评价模型具有下列重要的特征,分述如下:

1. 买权的价值一定大于其内含价值 ( $S - X$ ), 即  $C > S - X$ 。

证明

- (1) 若  $uS \leq X$ , 则  $S < X$  ( $\because u > 1$ ), 且  $C = 0$ 。

所以,  $S - X < 0 = C \Rightarrow C > S - X$

- (2) 若  $dS \geq X$ , 买权有价值, 且  $C = S - X/r > S - X$

- (3) 若  $dS < X < uS$ , 则  $C_d = 0$  及  $C_u = uS - X$

$\therefore C = \frac{1}{r}[pC_u + (1-p) \cdot 0] = \frac{1}{r}p(uS - X) > 0$ , 只要  $(1-p)dS > (p-r)$ , ( $r > 1$ )。

2. 正如第二节的例子所示,投资者的风险厌恶程度并不是决定买权价值的因素。所需要条件之一是,投资者喜好更多的财富,因此会利用套利机会获利。投资者是否是风险厌恶、风险中立或风险喜好都不是评价选择权的重要因素。因此,公式(6)对买权的评价适用于任何投资者。

3. 评价模型的唯一随机变量是履约资产的价格(或股价),而不是其他资产的价格或市场组合的价格(或报酬率)。

4. 虽然投资者的风险厌恶程度与其他资产的特征不是评价选择权的直接因素,它们可能透过  $S, u, d, r$  与  $X$  而对选择权有间接的影响。

5. 我们已提过拟似概率  $p$  是介于 0 与 1 之间。若投资者是风险中立,则  $p$  其实就是在均衡下的真正概率  $q$ 。证明如下:在风险中立下,股票的期望报酬率等于无风险利率:

$$q(uS) + (1-q)(dS) = rS$$

解出上式的  $q$  即得:

$$q = \frac{r-d}{u-d} = p$$

因此,我们可说买权的价格是,在风险中立环境下,买权未来现金流量期望值的折现值。这并不是说:买权的期望报酬率等于无风险利率。在均衡下,持有买权一个时期等于持有套利组合一个时期。因此,



如下:

由  $t = 1$  至  $t = 2$ , 股价由  $uS$  上升至  $u^2S$  或下降至  $udS$  的情况下, 买权在  $t = 1$  的价格应为:

$$C_u = \frac{1}{r} [pC_{uu} + (1-p)C_{ud}] \quad (7)$$

类似的, 由  $t = 1$  至  $t = 2$ , 股价由  $dS$  上升至  $udS$  或下降至  $d^2S$  的情况下, 买权在  $t = 1$  的价格为:

$$C_d = \frac{1}{r} [pC_{du} + (1-p)C_{dd}] \quad (8)$$

读者应注意的是, 在第二期初时, 套利组合(或称避险组合)的成分必须重新调整才能使套利组合维持无风险, 以及套利组合的期望报酬等于买权的期望报酬。利用公式(1), (2), (3)及(4), 在第二期初应调整的股数与借款金额如下:

在  $t = 1$ , 当股价是  $uS$  时,

$$C_{uu} = \Delta(uuS) + rB$$

$$C_{ud} = \Delta(udS) + rB$$

解出上面两公式的  $\Delta$  及  $B$  而得

$$\Delta = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{(uu - ud)S}, \quad B = \frac{uC_{ud} - dC_{uu}}{(u - d)r}$$

与单一期(或第一期)的原理相同, 根据上面公式调整后的套利组合与买权在  $t = 2$  的期望报酬都是相同。因此, 我们可决定买权在  $t = 1$  的价格, 正如公式(7)所示。决定买权在  $t = 1$  的价格( $C_u$  与  $C_d$ )后, 我们可进一步决定买权在  $t = 0$  的价格, 如下。

因在  $t = 0$  买权的现值是在其在  $t = 1$  时期望值的现值。由公式(7)及(8), 买权在  $t = 0$  的现值应为:

$$C = \frac{1}{r} [pC_u + (1-p)C_d] \quad (9)$$

将公式(7)及(8)代入公式(9), 我们即得买权的现值如下:

$$C = \frac{1}{r^2} [p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}] \quad (10a)$$

$$= \frac{1}{r^2} [p^2 \max(u^2 S - X, 0) + 2p(1-p) \max(udS - X, 0) + (1-p)^2 \max(d^2 S - X, 0)] \quad (10b)$$

而后,我们可运用统计上的二项分布函数(Binomial Distribution Function)重新改写公式(10b)如下:

$$C = \frac{1}{r^2} \left[ \binom{2}{2} p^2 \max(u^2 d^0 S - X, 0) + \binom{2}{1} p(1-p) \max(u^1 d^{2-1} S - X, 0) + \binom{2}{0} (1-p)^2 \max(d^2 u^0 S - X, 0) \right] \quad (11)$$

此处:  $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ,  $\binom{2}{0} = 1$ ,  $\binom{2}{1} = 2$ ,  $\binom{2}{2} = 1$

再加以简化(11),买权的现值可表示为:

$$C = \frac{1}{r^2} \left[ \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} p^j (1-p)^{2-j} \cdot \max(u^j d^{2-j} S - X, 0) \right] \quad (12a)$$

或者,

$$C = \frac{1}{r^2} \left[ \sum_{j=0}^2 \frac{2!}{j!(2-j)!} p^j (1-p)^{2-j} \cdot \max(u^j d^{2-j} S - X, 0) \right] \quad (12b)$$

公式(12a)或(12b)代表若买权的到期限为两个时期,其现值可由二项式程式来决定(或评价)。若我们将之延伸至  $n$  个分割时期 ( $n \geq 2$ ), 则买权的现值可由公式(13)所决定(即将公式(12b)内的 2 改成  $n$ ):

$$C = \frac{1}{r^n} \left[ \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \max(u^j d^{n-j} S - X, 0) \right] \quad (13)$$

但在公式(13)中,若  $u^j d^{n-j} S < X$ , 则  $\max(u^j d^{n-j} S - X, 0) = 0$ 。若  $u^j d^{n-j} S > X$ , 则  $\max(u^j d^{n-j} S - X, 0) = u^j d^{n-j} S - X > 0$ 。

故我们可将所有的零项消除,而只保留正项。在公式(13)中,假设  $k$  是一最小的整数能使  $u^k d^{n-k} S > X$ 。也就是,

$$k > \frac{\ln(X/Sd^n)}{\ln(u/d)} \quad (14)$$

所以,由公式(14)我们就可找出公式(13)中的所有正项,去除零项后的公式(13)成为:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{r^n} \left[ \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} (u^j d^{n-j} S - X) \right] \\ &= \frac{1}{r^n} \left[ \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j} S \right] \\ &\quad - \left[ \sum_{j=1}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} X \right] \\ &= S \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p'^j (1-p')^{n-j} \\ &\quad - \frac{X}{r^n} \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \end{aligned} \quad (15)$$

此处: 
$$p' = \frac{pu}{r}, 1-p' = \frac{(1-p)d}{r} \quad (16)$$

公式(15)就是二项式买权评价模型,其简化公式如下:

$$C = SB(n, k, p') - \frac{X}{r^n} B(n, k, p) \quad (17)$$

此处:

$$B(n, k, p') = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p'^j (1-p')^{n-j} \quad (n > k) \quad (18)$$

$$B(n, k, p) = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \quad (19)$$

注:若  $n < k$ ,  $C = 0$

### 利用完全市场解释二项式模型

在推导二项(或二元树)评价模型后,CRR说明也可利用完全市场解释二项式模型。假设 $\pi_u$ 及 $\pi_d$ 分别代表情况 $u$ 与 $d$ 出现的折现率。也就是,当股价上升 $u$ 时, $\pi_u$ 代表在期末收到一元的证券现值(现价)。在无套利的情况下,每一种证券(无风险债券、股票与选择权)未来报酬的折现率应是 $\pi_u$ 与 $\pi_d$ 。因此,

$$\pi_u r + \pi_d r = 1 \text{ (无风险债券)}$$

$$\pi_u (uS) + \pi_d (dS) = S \text{ (股票)}$$

$$\pi_u (C_u) + \pi_d (C_d) = C \text{ (买权)}$$

由上面无风险债券与股票的公式可求出

$$\pi_u = \left( \frac{r-d}{u-d} \right) \frac{1}{r}, \quad \pi_d = \left( \frac{u-r}{u-d} \right) \frac{1}{r}$$

再将 $\pi_u$ 及 $\pi_d$ 代入上面买权公式即得:

$$C = \left( \frac{r-d}{u-d} \right) \frac{C_u}{r} + \left( \frac{u-r}{u-d} \right) \frac{C_d}{r} = [pC_u + (1-p)C_d]/r$$

此处:  $p = (r-d)/(u-d)$

这也就是公式(6b)买权的评价公式。因此,利用完全市场的理论,也可解释二项式评价模型。

在此值得一提的是,若以三元树(3种股价)可能变动的情况来评价买权,则我们无法利用套利的方法求出买权的评价模型。因为在三元树模型(Trinomial)下,我们会有3个方程式与两个未知数( $\Delta$ 及 $B$ ),因此所求出的无风险套利组合成分( $\Delta$ 及 $B$ )不会是独一的答案(Unique)。就完全市场的理论而言,我们会有3个未知数( $\pi_u$ ,  $\pi_d$ 及 $\pi_0$ ,  $\pi_0$  = 股价不变的折现率)。由无风险债券及股票两个方程式,只能求出其中的两个未知数。但第三个未知数无法求解。

既然我们已完成二项式买权评价模型[公式(15)或(17)]的推演,现在让我们介绍如何运用它来评价欧式买权。

例:假设某标的股票(或标的物)的现价为\$100。以该股票为基础

所发行 6 个月到期欧式买权的履约价格为 \$95。该股票价格每个月可能上升 6% 或下降 3%。无风险利率为 5%，根据上述资料决定该欧式买权的价格。

答:  $S = 100$ ,  $n = 6$ ,  $X = 95$ ,  $u = 1.06$ ,  $d = 0.97 (= 1.0 - 0.03)$ ,  $r = 1.05$ 。

$$p = \frac{r-d}{u-d} = \frac{1.05-0.97}{1.06-0.97} = \frac{0.08}{0.09} = 0.89, 1-p = 0.11$$

$$q = \frac{pu}{r} = \frac{(0.89)(1.06)}{1.05} = 0.90, 1-q = 0.10$$

$$\frac{\ln(X/Sd^n)}{\ln(u/d)} = \frac{\ln[95/(100)(0.97)^6]}{\ln(1.06/0.97)} = \frac{0.131}{0.028} = 4.69 < 5$$

∴ 公式(17)中的正项应从  $k = 5$  开始。

由公式(18)及(19), 我们可得

$$B(6, 5, 0.90) = \sum_{j=5}^6 \frac{6!}{j!(6-j)!} (0.9)^j (0.1)^{6-j} = 0.8857$$

$$B(6, 5, 0.89) = \sum_{j=5}^6 \frac{6!}{j!(6-j)!} (0.89)^j (0.11)^{6-j} = 0.8656$$

利用公式(17), 该欧式买权的价格应为:

$$\begin{aligned} C &= 100(0.8857) - \frac{95}{(1.05)^6} (0.8656) \\ &= 88.57 - 61.36 = \$27.21 \end{aligned}$$

#### 四、二项式评价模型的极限——Black-Scholes 模型

由第三节介绍可知, 二项式(或二元树)模型的推导容易、且极富经济意义。这些经济意义不会因该模型的数学推演而令人模糊不清。但也许有人会问, 二项式模型的每一分割期间长度应是每一个月, 每一周或每一日, 到底哪一个对? 其实二项式模型可适用于任一时间长度。因此, 它也适用于每一小时、或每一分钟的时间长度。若与 Black-

Scholes(BS)模型比较,当每一分割期间的长度愈缩小,二项式模型愈会接近 BS 模型。当资产的交易时间是连续性时(即每一分割期间的长度是极度微小时,Infinitesimally Small),二项式模型的极限就是 BS 模型。也就是 BS 模型是隐含于二项式模型内。所以,在本节中,我们将介绍如何推展 CRR 的二项式模型收敛至 BS 模型。

当我们将每一分割时期缩短至极度微小时,我们要确定资产或股票价格在这极度微小期间内做极小幅度的变动,而不是大幅度的往上或往下跳动(或大幅度跳动的概率很小)。这也就是 BS 模型的一个重要假设条件之一。此外,股票上升与下降的幅度不必一定相同。

假设每一时期原来的长度是固定为  $t$ 。将  $t$  的长度分割成  $n$  个小时段。每一小时段的长度为  $h$ 。也就是,

$$h = t/n$$

此处: $n$  代表在时间  $t$  内的交易次数。若交易次数愈多(即  $n$  愈多), $h$  就会愈短。且当  $n \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow 0$  这意味交易是连续进行。对  $h$  设下定义后,我们也必须对  $r$ ,  $u$  与  $d$  的数值下个定义,使它的数值能够有实证的意义。首先,我们设定  $\hat{r}$  代表在每一小时段  $h$  内的利率(1+无风险报酬率)。(  $\hat{r}$  的大小须视小时段数目  $n$  的多寡而定)。在  $n$  个  $h$  长度的时期内(即  $t$  时期内),总无风险报酬率应是  $\hat{r}^n$ (以复利计算)。此外,我们也设定  $r$  代表每一单位时间的无风险报酬率,则在时间  $t$  上的无风险报酬率应是  $r^t$ 。因此,

$$\hat{r}^n = r^t \Rightarrow \hat{r} = r^{t/n}$$

所以,  $\hat{r}$  的大小是由分割时段数目  $n$  的多寡决定。读者要注意  $\hat{r}$  与  $r$  都是 1+无风险利率  $i$ 。

再次,我们必须对  $u$  与  $d$  设下定义。因为我们要证明,二项式模型的极限是 BS 模型,因此  $u$  及  $d$  的设定应能使股价在极微小时间内的变动成为小幅度的随机变动,而不会有往上或往下大幅度变动的可能。前者股价的变动是一种连续随机变动(当  $n \rightarrow \infty$ ),而后者是一种跳跃随机变动。在以下的证明中,股票都是以连续随机变动,但不是大



幅跳动(或大幅跳动的概率很小)。

正如第二节所述,  $u$  代表每一元股价上升的数值(即  $1 +$  股价上升的报酬率), 它的概率为  $q$ 。  $d$  代表每一元股价下降的数值(即  $1 +$  股价下跌的比率), 其概率为  $(1 - q)$ 。对  $u$  与  $d$  取对数值, 则  $\ln u$  与  $\ln d$  代表连续复利报酬率。(以连续复利来计算与证明较容易)。为求得在连续复利下的股票报酬率, 我们先考虑下列股价的连续变量:  $uddud$ 。则最后的股价应为  $S^* = uddudS = u^2d^3S$ 。故  $\ln(S^*/S) = 2\ln u + 3\ln d$ 。若在  $n$  个分割小时段内, 股价有  $j$  次向上变动,  $(n - j)$  次往下变动, 则在  $n$  小时段内的股票连续复利报酬率为:

$$\begin{aligned}\ln(S^*/S) &= j\ln u + (n - j)\ln d \\ &= j\ln(u/d) + n\ln d\end{aligned}$$

故

$$E[\ln(S^*/S)] = E(j)\ln(u/d) + n\ln d$$

$$\text{Var}[\ln(S^*/S)] = \text{Var}(j)[\ln(u/d)]^2$$

因在  $n$  个小时段内, 股价有  $j$  次向上变动, 其概率为  $q$ 。但向下变动的次数为  $(n - j)$ , 其概率是  $(1 - q)$ , 股价往上(或往下)变动过程正好是二项式概率分布。因此, 由数理统计可知,  $E(j) = nq$ ,  $\text{Var}(j) = nq(1 - q)$ 。因此,

$$\begin{aligned}E[\ln(S^*/S)] &= nq\ln(u/d) + n\ln d = [q\ln(u/d) + \ln d] \cdot n \\ &= \hat{\mu}n \quad (\hat{\mu} = q\ln(u/d) + \ln d)\end{aligned}\quad (20)$$

$$\text{Var}[\ln(S^*/S)] = nq(1 - q)[\ln(u/d)]^2 = \hat{\sigma}^2n \quad (21)$$

$$\hat{\sigma}^2 = q(1 - q)[\ln(u/d)]^2$$

在公式(20)及(21)内, 我们必须选择  $u$  与  $d$  能使  $\hat{\mu}n \rightarrow ut$ ,  $\hat{\sigma}^2n \rightarrow \sigma^2t$  (当  $n \rightarrow \infty$ ); 此处  $u$  代表在一个时间单位下  $\ln(S^*/S)$  的期望报酬率, 而  $\sigma^2$  代表在一个时间单位下  $\ln(S^*/S)$  的方差。 $u$  与  $d$  的选择方法如下: 在未来,  $\ln(S^*/S)$  可能上升  $\ln u$ , 也可能下降  $\ln d$ 。在时间  $t$  内,  $\ln(S^*/S)$  的标准差为  $\sigma\sqrt{t}$ 。故在小时段  $h$  内,  $\ln(S^*/S)$  的标准差是  $\sigma\sqrt{t/n}$ , ( $h = t/n$ )。所以, 我们可选择股价上升或下降的连续复利报酬

率为其波动幅度(即标准差)。也就是:

$$\begin{aligned}\ln u &= \sigma\sqrt{t/n}, \ln d = -\sigma\sqrt{t/n} \\ \therefore u &= e^{\sigma\sqrt{t/n}}, d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}\end{aligned}\quad (22)$$

再次将  $u$  及  $d$  的定义代入  $\hat{\mu}n = ut$  内。即

$$\begin{aligned}\{q\ln(e^{\sigma\sqrt{t/n}}/e^{-\sigma\sqrt{t/n}}) - \sigma\sqrt{t/n}\}n &= ut \\ (2q-1)\sigma\sqrt{t/n} &= ut/n \\ \therefore q &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u/\sigma)\sqrt{t/n}\end{aligned}\quad (23)$$

此种选择的  $q$  能使  $\hat{\mu}n = ut$ 。证明如下:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}n &= [q\ln(u/d) + \ln d]n = [(2q-1)\sigma\sqrt{t/n}]n \\ &= [(u/\sigma)\sqrt{t/n}\sigma\sqrt{t/n}]n = ut\end{aligned}$$

此外,我们也必须计算  $\hat{\sigma}^2n$  如下:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2n &= q(1-q)[\ln(u/d)]^2n \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u/\sigma)\sqrt{t/n}\right]\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(u/\sigma)\sqrt{t/n}\right][2\sigma\sqrt{t/n}]^2n \\ &= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(u/\sigma)^2(t/n)\right]4\sigma^2(t/n)n \\ &= [\sigma^2 - u^2(t/n)]t\end{aligned}$$

因此,我们已求得,就任何  $n$  而言,

$$\hat{\mu}n = ut, \hat{\sigma}^2n = [\sigma^2 - u^2(t/n)]t \quad (24)$$

而且,当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\sigma}^2n \rightarrow \sigma^2t$ ; 且  $\hat{\mu}n = ut$  (就所有  $n$  而言)。

在以上的证明中,我们已知道,在时期  $t$ , 随机连续复利报酬率  $\ln(S^*/S)$  是  $n$  个相互独立的随机(复利)报酬率。其变动值为  $\ln u$ , 概率为  $q$ 。若变动值为  $\ln d$ , 其概率为  $1-q$ 。而且,  $\ln(S^*/S)$  的期望值为  $\hat{\mu}n$ , 标准差为  $\hat{\sigma}\sqrt{n}$ 。根据中央极限定理(Central Limit Theorem),  $\ln(S^*/S)$  的标准化会趋近标准正态分布(当  $n \rightarrow \infty$ )。也就是,

$$P_{rob} \left[ \frac{\ln(S^*/S) - \hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \right] \rightarrow N(z) \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty) \quad (25)$$

此处:  $N(z)$  代表标准正态分布函数  $f(z)$  的累积概率, 即

$$N(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz \quad \left( f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, -\infty < z < \infty \right)$$

要使(25)成立, 我们必须检验  $\ln(S^*/S)$  概率分布的有关较高层次的动差性质, 诸如偏态系数(Skewness)会趋近于零, 而成为不重要(当  $n \rightarrow \infty$  时)。故利用 Aitchison 及 Brown(1957, p. 14)的结果,  $\ln(S^*/S)$  概率分布的三阶动差为:

$$\frac{u_3}{u_2^{3/2}} = \frac{q |\ln u - \hat{\mu}|^3 + (1-q) |\ln d - \hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3 \sqrt{n}} = \text{偏态系数} \quad (26)$$

此处:  $u_2$  与  $u_3$  分别为  $\ln(S^*/S)$  概率分布的二阶动差与三阶动差(The Second and Third Moments)。我们证明此偏态系数会趋近于零如下:

已知:  $\hat{\mu} = q \ln u + (1-q) \ln d$

则

$$\begin{aligned} |\ln u - \hat{\mu}|^3 &= |\ln u - q \ln u - (1-q) \ln d|^3 \\ &= |(1-q) \ln u - (1-q) \ln d|^3 \\ &= (1-q)^3 [\ln(u/d)]^3 = (rq)^3 [8\sigma^3 (t/n)^{3/2}] \\ |\ln d - \hat{\mu}|^3 &= |\ln d - q \ln u - (1-q) \ln d|^3 \\ &= -q^3 |\ln u - \ln d|^3 \\ &= -q^3 [8\sigma^3 (t/n)^{3/2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^3 \sqrt{n} &= \left\{ q(1-q) [\ln e^{2\sigma\sqrt{t/n}}]^2 \right\} n \\ &= 4q(1-q)\sigma^2 t / \sqrt{n} \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \text{偏态系数} &= \frac{q(1-q)^3 \cdot 8\sigma^3 (t/n)^{3/2} - (1-q)q^3 \cdot 8\sigma^3 (t/n)^{3/2}}{4q(1-q)\sigma^2 t / \sqrt{n}} \quad (27) \\ &= \frac{2\sigma^2 t}{n} [(1-q)^2 - q^2] \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

注:  $q \rightarrow 1/2$ , 当  $n \rightarrow \infty$

因此, 利用中央极限定理,  $\ln(S^*/S)$  的标准化会趋近标准正态分布。也就是公式(25)会成立。故我们可利用中央极限定理来证明: 当  $n \rightarrow \infty$  时, 二项式评价模型的极限就是 BS 评价模型。为方便计, 我们将二项式评价模型重新改写在此:

$$C = S \cdot B(n, k, p') - \frac{X}{r^n} B(n, k, p)$$

此处:

$$B(n, k, p') = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p'^j (1-p')^{n-j}$$

$$B(n, k, p) = \sum_{j=k}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} = P_{nb}(j \geq k)$$

BS 评价模型为:

$$C = SN(z) - Xr^{-t}N(z - \sigma\sqrt{t})$$

$$\text{此处: } z = \frac{\ln(S/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

所以, 对照比较两模型可知, 我们要证明的是: 当  $n \rightarrow \infty$ ,

$$B(n, k, p') \rightarrow N(z), B(n, k, p) \rightarrow N(z - \sigma\sqrt{t})$$

首先, 我们证明:  $B(n, k, p) \rightarrow N(z - \sigma\sqrt{t})$

$$\begin{aligned} 1 - B(n, k, p) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= P_{nb}[j \leq k-1] \\ &= P_{nb}\left[\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{(k-1) - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \end{aligned} \quad (28)$$

再次, 我们证明(28)与连续股价变动率  $\ln(S^*/S)$  是一致的。我们已知, 在每一时期, 股价将会向上升至  $uS$  或下降至  $dS$ , 其概率分别为  $p$  与  $1-p$ 。由前面分析已知,  $\ln(S^*/S) = j\ln(u/d) + n\ln d$ 。而且, 连续复利的股票期望报酬率与方差分别为[根据公式(20)及(21)]:

$$\hat{\mu}_p = p \ln(u/d) + \ln d \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_p^2 = p(1-p)[\ln(u/d)]^2 \quad (30)$$

将  $\hat{\mu}_p$  及  $\hat{\sigma}_p^2$  代入(28)的第一项(左边项):

$$\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\ln(S^*/S) - \hat{\mu}_p n}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \quad (31)$$

再次,我们计算(28)内的第二项如下:由  $k$  的定义[公式(14)],我们可将  $k-1$  改写如下:

因  $k$  是最小的整数大于  $\ln(X/Sd^n)/\ln(u/d)$ , 故我们可改写  $k-1$  成为:

$$\begin{aligned} k-1 &= \ln(X/Sd^n)/\ln(u/d) - \epsilon \\ &= [\ln(X/S) - n \ln d]/\ln(u/d) - \epsilon \end{aligned} \quad (32)$$

此处:  $\epsilon$  的选择是能使(32)的等号成立 ( $0 < \epsilon < 1$ )。

将  $\hat{\mu}_p$  与  $\hat{\sigma}_p^2$  的定义[(29)与(30)]代入(28)的第二项,并计算与简化:

$$\text{因 } \hat{\mu}_p = p \ln(u/d) + \ln d \text{ 与 } \hat{\sigma}_p^2 = p(1-p)[\ln(u/d)]^2$$

$$\text{则 } \ln d = \hat{\mu}_p - p \ln(u/d) \text{ 与 } \ln(u/d) = \sigma / \sqrt{p(1-p)}$$

因此,

$$\begin{aligned} a-1-np &= [\ln(X/S) - n \ln d]/\ln(u/d) - \epsilon - np \\ &= [\ln(X/S) - n(\hat{\mu}_p - p \ln(u/d))]/\frac{\hat{\sigma}_p}{\sqrt{p(1-p)}} - \epsilon - np \\ &= \frac{[\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p + np \ln(u/d)]\sqrt{p(1-p)}}{\hat{\sigma}_p} - \epsilon - np \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \frac{\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p + np \ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} - \frac{\epsilon + np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ &= \frac{\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p + np \ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} - \frac{\epsilon + np}{\sqrt{n} \frac{\hat{\sigma}_p}{\ln(u/d)}} \end{aligned}$$

$$\left( \text{此处 } \sqrt{p(1-p)} = \frac{\hat{\sigma}_p}{\ln(u/d)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p - np\ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} - \frac{(\epsilon + np)\ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \\
&= \frac{\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p - \epsilon\ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \quad (33)
\end{aligned}$$

然后,将(31)与(32)代入(28)即得

$$1 - B(n, k, p) = P_{rob} \left[ \frac{\ln(S^*/S) - \hat{\mu}_p n}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \leq \frac{\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p - \epsilon\ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \right] \quad (34)$$

在尚未应用中央极限定理时,我们必须检验偏态系数是否趋近于零(当  $n \rightarrow \infty$  时)。与公式(27)的证明相同:

$$\begin{aligned}
\text{偏态系数} &= \frac{p |\ln u - \hat{\mu}_p|^3 + (1-p) |\ln d - \hat{\mu}_p|^3}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \\
&= \frac{2\sigma^2 t}{n} [(1-p)^2 - p^2] \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty) \quad (35)
\end{aligned}$$

此处:  $p \rightarrow 1/2$ , 当  $n \rightarrow \infty$ ; 其证明简单如下:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\hat{r} - d}{u - d} = \frac{r^{u/n} - e^{-\sigma\sqrt{t/n}}}{e^{\sigma\sqrt{t/n}} - e^{-\sigma\sqrt{t/n}}} = \frac{r^{u/n} e^{\sigma\sqrt{t/n}} - 1}{e^{2\sigma\sqrt{t/n}} - 1} \\
&= \frac{r^{u/n} (\sigma\sqrt{t/2} + t/\sqrt{n})}{e^{\sigma\sqrt{t/n}} \sigma\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

(利用 L'Hopital's Rule, 并简化之即得)

$\therefore p \rightarrow 1/2$  当  $n \rightarrow \infty$

我们已证明偏态系数趋近于零[见公式(35)]。下一步骤,我们就可将中央极限定理应用于公式(34)。公式(34)内的  $n\hat{\mu}_p$  及  $\hat{\sigma}_p \sqrt{n}$  可分别证明为:

$$\hat{\mu}_p n \rightarrow \left( \ln r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \quad (\hat{\sigma}_p \sqrt{n} \rightarrow \sigma\sqrt{t}, \text{当 } n \rightarrow \infty) \quad (36)$$

首先证明上面第一式如下:

由对数正态分布可知,其期望报酬率为:

$$E(S^*/S) = \exp\left(\mu_p t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \quad ((S^*/S) \text{ 是对数正态分布})$$

$$\therefore \ln E(S^*/S) = \mu_p t + \frac{1}{2}\sigma^2 t \quad (\text{对概率 } p \text{ 测度而言})$$

因为  $p = (\hat{r} - d)/(u - d)$ , 所以  $\hat{r} = pu + (1 - p)d$ 。因  $\hat{r}$  是在固定时间  $t$  内每一小时段的无风险报酬率(共有  $n$  个小时段), 故

$$E(S^*/S) = [pu + (1 - p)d]^n = \hat{r}^n = r^t$$

将之代入  $\ln E(S^*/S)$  公式即得:

$$t \ln r = \mu_p t + \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

$$\therefore \mu_p = \ln r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

证明第二式如下:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_p^2 n &= \left[ \sigma^2 - \left( \ln r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 (t/n) \right] t \quad (\text{利用(24)}) \\ &= \sigma^2 t - \left( \ln r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 (t^2/n) \rightarrow \sigma^2 t \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

此外,  $\ln(u/d) = 2\sigma\sqrt{t/n} \rightarrow 0$  (当  $n \rightarrow \infty$ )

故公式(34)内的第二项成为:

$$\frac{\ln(X/S) - n\hat{\mu}_p - \epsilon \ln(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{n}} \rightarrow \frac{\ln(X/S) - (\ln r - \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}} = y \quad (37)$$

所以, 公式(34)成为:

$$1 - B(n, k, p) \rightarrow N(y) = N\left[\frac{\ln(Xr^{-t}/S)}{\sigma \sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma \sqrt{t}\right] \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty)$$

$$\therefore B(n, k, p) \rightarrow 1 - N(y) = N(-y)$$

此处:

$$-y = \frac{-\ln(Xr^{-t}/S)}{\sigma \sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma \sqrt{t}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ln(S/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \\
 &= z - \sigma\sqrt{t}
 \end{aligned}$$

此处:

$$z = \frac{\ln(S/Xr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \quad (38)$$

故  $B(n, k, p) \rightarrow N(z - \sigma\sqrt{t})$ 。利用类似的证明方法,我们也可证明:

$$B(n, k, p') \rightarrow N(z)$$

因此,我们已证明了 BS 模型是 CRR 二项式模型的极限。也就是, CRR 二项式模型包含 BS 模型在内。

## 五、二项式模型的其他评价应用

### 连续时间股价跳动过程

在第四节中,我们已证明 CRR 的二项式模型的极限是 BS 模型。在这项证明中,代表股价上升或下降  $u$  与  $d$  的选择是能使股价在极微小期间内做小幅度的变动,而不是大幅度的往上或往下跳动,或大幅度跳动的概率很小。能够符合此条件的  $u$  与  $d$  已设定于公式(22)内。若我们认为股价有呈现大幅度跳动的可能,且要评价在此情况下的选择权,我们可另选择适当的  $u$  与  $d$  来代表股价跳动的过程。如此,二项式模型的极限就是在股价连续时间跳运过程(A Continuous-Time Jump Process)下的选择权评价模型。为证明它,CRR 选择:

$$u = u, d = e^{1/3(u/n)}, q = \lambda(t/n) \quad (39)$$

此种选择能捕捉股价跳动的过程;因为当  $n \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow 0$  及  $(1-q) \rightarrow 1$ , 因此股价往下跳动( $d$ )的概率愈增大。而往上跳动( $u$ )的概率愈小。在这种情况下,股价变动  $[\ln(S^*/S)]$  的过程不会趋近对数常态分布,但会趋近对数柏松分布(Log-Poisson Distribution)。CRR 证明:当



$n \rightarrow \infty$ 时,二项式评价模型的极限成为跳动过程的选择权评价模型(Jump-Process Option Pricing Formula)如下:

$$C = S\phi(x; y) - Xr^{-t}\phi(X; y/u) \quad (40)$$

此处:  $y = (\ln r - \zeta)ut/(u-1)$

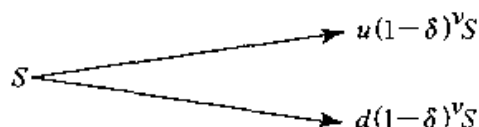
$x$  是大于  $[\ln(K/S) - \zeta t]/\ln u$  的最小整数

$$\phi(x; y) = \sum_{j=x}^{\infty} \frac{e^{-y}y^j}{j!}$$

### 在到期前分布股利

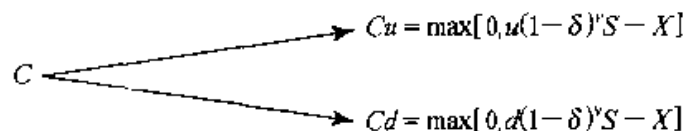
在以上的分析中,我们假设履约股票在到期前不分布现金股利。若在到期前履约股票分布现金股利,二项式模型可修改,并可评价在股利分发下的选择权。

假设在每一股利发放登记日(Ex-Dividend Dates),履约股票的现金股利发放是一固定比率  $\delta$ 。则在该期内,股票持有者可能收到股利  $\delta uS$  或  $\delta dS$ 。但股利发放后,股价将会下降等于所收到的股利。因此,在期末时,股票的价格会有两种情况如下:



此处:  $\nu = 1$  代表期末是股利发放登记日;若不是,  $\nu = 0$ 。

在期末时,买权价值为:



利用第三节的结果,买权在期初的价值为:

$$C = [pC_u + (1-p)C_d]/\hat{r}$$

由此可知,利用第三节的方法,我们可决定在多期下买权的价值。当然

二项式模型的方式也可用来决定卖权、美式选择权与期权的价值。有兴趣的读者可参阅下一章的介绍或作者的另一著作：选择权与期货：衍生性商品，第三章有关二项式模型的各种应用。

## 参 考 文 献

- J. Aithison, and J. A. C. Brown, "The Lognormal Distribution", Cambridge University Press, London (1957).
- J. C. Cox, S. A. Ross and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics* 7 (1979), p. 229—263.
- 陈松男：选择权与期货：衍生性商品（新陆书局）。

## 第二十八章 二元树评价模型之应用： 美式及新奇选择权评价

### 一、简介

在前一章我们已经很详细介绍 CRR 二元树(或二项式)评价模型的理论。二元树评价模型是 Black-Scholes 评价模型的模拟(或近似)模型(The Approximation Model)。其极限答案是 Black-Scholes 模型的答案。在理论上,虽然二元树模型是模拟模型,但它的实务应用层面却是很广泛。凡是无法以封闭解评价的选择权几乎都可以二元树评价法求解。此外,它也可应用于新奇选择权的评价。在本章中,我们将着重于二元树评价模型的应用,采用许多范例详细介绍如何使用二元树评价不同类型的选择权。第二节介绍如何使用二元树评价美式选择。第三节介绍使用二元树评价美式外汇选择权。第四节介绍使用二元树评价新奇选择权。第五节做结论。

### 二、美式选择权的评价:二元树模型

在本节中,我们介绍如何利用二元树(或二项式)评价美式选择权。在评价的过程中,我们同时介绍如何决定提前执行的时间。

#### 1. 到期前标的资产(股票)不支付股利

若到期前标的股票不支付现金股利,美式买权不应该于到期前执

行(或履约),它的价值可由 Black-Scholes 模型来决定。在此我们介绍如何利用二元树(或二项式)模型评价美式卖权。举例如下:

### 例 1 美式卖权的评价

假设标的股票在到期前不支付任何股利。目前该股市价为 \$50。该股价上升的幅度是 5%,而下降的幅度也是 5%。每一期的无风险利率是 5%。某美式卖权是以该股票作为履约股票,其履约价格为 \$50,且其到期日为两期(或一个月)。根据上述资料,评价该美式卖权的价值。

答:  $S = 50$ ,  $X = 50$ ,  $u = 1.05$ ,  $d = 1/u = 0.95$ ,  $R = e^{r\Delta t} = e^{(0.05)(1/12)} = 1.004$ 。由前一章二项式评价理论可知,股价在下一期价格上升的(拟似)概率(Pesudo-Probability,或称 Risk-Neutral Probability)是

$$p = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.004 - 0.95}{1.05 - 0.95} = \frac{0.054}{0.1} = 0.54 \quad (1)$$

股价在下一期下降的(拟似)概率是  $1 - p = 0.46$

美式卖权的评价过程如下:

(1) 首先计算标的股票在下两期的各种可能价格。以图 1 表示。

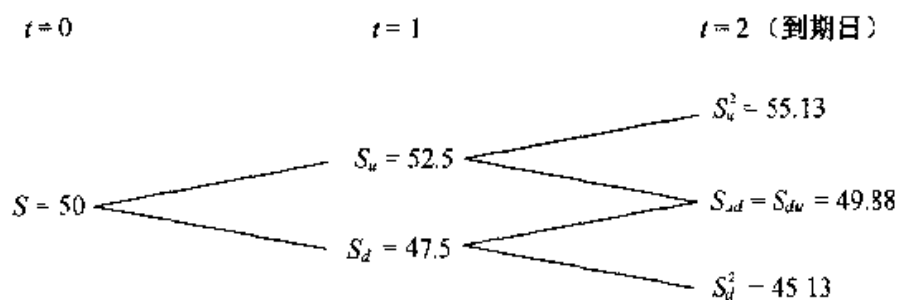


图 1 标的股票的各种可能价格

上面各种可能股价的计算如下:

$$S_u = 50(1.05) = 52.50, S_d = 50(0.95) = 47.50$$

$$S_u^2 = 50(1.05)^2 = 55.13, S_{ud} = 50(1.05)(0.95) = 48.88$$

$$S_d^2 = 50(0.95)^2 = 45.13$$

(2) 第二步骤,我们决定该卖权在每一时期的各种可能执行价格。卖权的执行价格 =  $\max(X - S, 0)$ 。以图 2 表示。

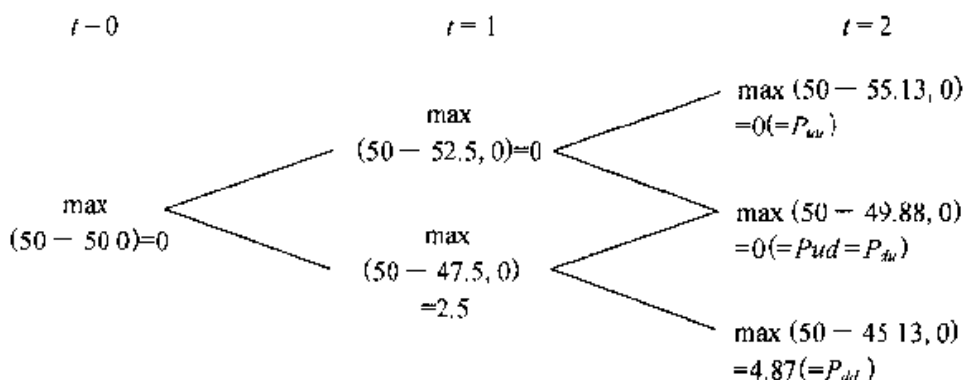


图 2 卖权的各种可能执行价格

注:执行价格是结束美式选择权的价格(即死的价格),而合理价格是活着的价格(不被执行的价格)。故执行价格不等于合理价格。

(3) 第三步骤,我们利用前章二项式评价模型的理论,卖权(或买权)的合理价值可从到期日起倒推计算;以卖权(买权)在后期的执行价格倒推计算前一期的合理价格[详见前章公式(7),(8)与(9)]。并与该前期的执行价格比较是否提前执行(或履约)较有利。

在  $t = 1$  :

$$\begin{aligned}
 P_u &= \frac{1}{R} [p(P_{uu}) + (1-p)(P_{ud})] \\
 &= \frac{1}{1.004} [(0.54)(0) + (0.46)(0)] = 0 \\
 P_d &= \frac{1}{1.004} [(0.54)(0) + (0.46)(4.87)] \\
 &= 2.23 < 2.5 \Rightarrow P_d = 2.5
 \end{aligned} \tag{2}$$

所以,在  $t = 1$ , 当股价下降至 47.5 时,卖权的合理价格是 2.23, 低于此时的执行价格 2.5。因此,在  $t = 1$ , 股价下跌至 47.5 时,应提前执行(或履约)该卖权有利。

(4) 在  $t = 0$  的卖权合理价格决定,应基于在  $t = 1$  时的理性提前执行策略为主:在  $t = 1$ , 卖权的两种可能价格是 0 ( $= P_u$ ) 与 2.5 ( $=$

$P_d$ )。因此,在  $t=0$  时该卖权的合理价格应为:

$$P = \frac{1}{1.004} [(0.54)(0) + (0.46)(2.5)] = 1.15$$

(不应该用 2.23 计算)

此合理价格高于在  $t=0$  的执行价格(0)。因此,不宜于  $t=0$  时执行该卖权。根据上面的计算结果,我们将  $t=1$  与  $t=0$  时的执行价格与合理价格以图 3 表示。

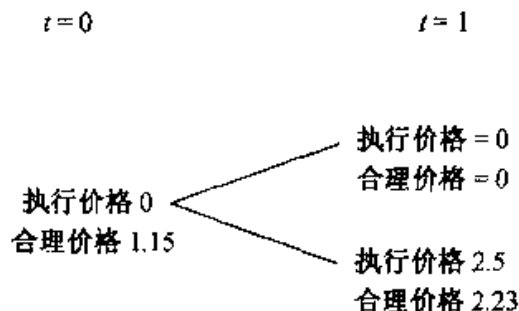


图 3 执行价格与合理价格比较

上图清楚指出,在  $t=1$  时,当股价下跌至 47.5 时,提前执行价格 2.5 高于合理价格 2.23,故应于此时提前执行该卖权。上例的评价程序可延长至更多的时期,其计算方法相同。此外,利用二项式模型评价时,所采用的分割时期愈多、且每期的时间愈短,评价愈准确(详见前章第三节的论述)。

## 2. 到期前履约资产(股票)支付股利

**例 2** 我们仍然利用前例的资料来说明如何利用二项式模型评价美式买权。假设某(未受保)美式买权也以该股票作为履约股票(标的股),其履约价格为 \$50,但在  $t=1$  时确知该股会发放 \$1 的股利(每股)。有关资料综合表示如下:

$$S = 50, X = 50, u = 1.05, d = 0.95, R = 1.004 (= e^{r\Delta t})$$

$$p = 0.54, 1 - p = 0.46, D = 1(\text{股利})$$

我们评价该美式买权的程序如下:

(1) 根据前例的计算,股价在下两期的可能价格见图 4。

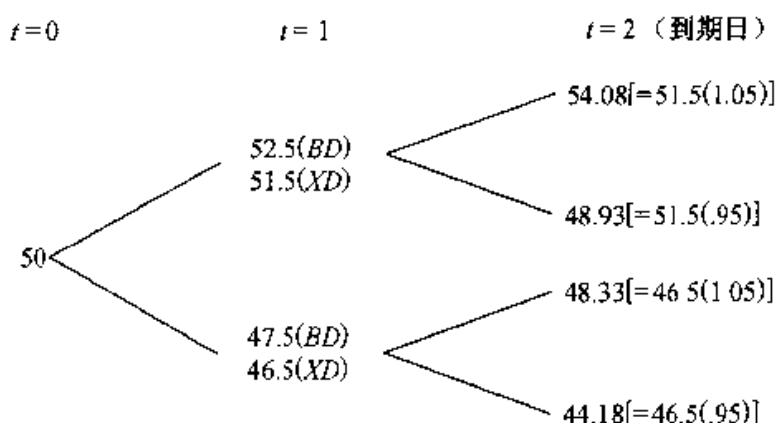


图4 履约股价的可能情况

此处:XD 代表发放 \$1 元股利后的股价

BD 代表未发放股利的股价

(2) 然后计算在每一时期的各种可能执行价格(见图5)。买权的执行价格 =  $\max(S - X, 0)$  ( $X = 50$ )

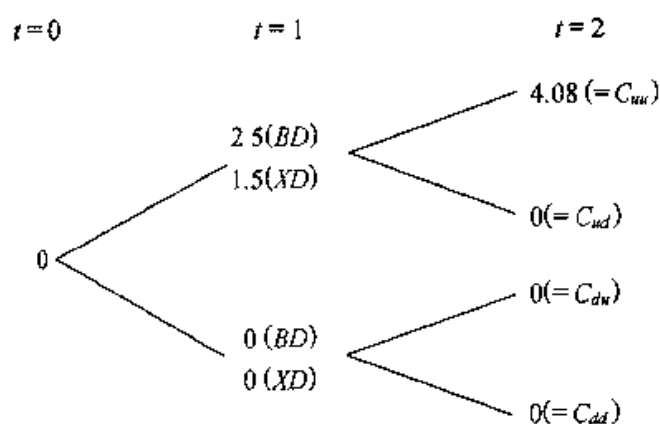


图5 买权的可能执行价格

上面的部分计算如下:

$$\begin{aligned} 2.5 &= \max(52.5 - 50, 0), \quad 1.5 = \max(51.5 - 50, 0), \\ 4.08 &= \max(54.08 - 50, 0), \quad 0 = \max(47.5 - 50, 0), \end{aligned}$$

其余计算类推。

(3) 根据第二步骤的各种可能执行价格计算该买权的合理价格,

并决定应提前执行的时间。

在  $t = 1$

$$\begin{aligned} C_u &= \frac{1}{1.004} [(0.54) \underbrace{(4.08)}_{C_{uu}} + (0.46) \underbrace{(0)}_{C_{ud}}] \\ &= 2.19 < 2.5(BD) \Rightarrow C_u = 2.5 \end{aligned}$$

$$C_d = \frac{1}{1.004} [(0.54)(0) + (0.46)(0)] = 0$$

观察上面的计算可知,在  $t = 1$  时,当股价上升至 52.5 时,应在股利发放日之前立即提前执行(履约)(因执行价格 2.5 高于此时的合理价格 2.19。故在此时提前执行较有利)。

(4) 在  $t = 0$  的买权合理价格决定应基于在  $t = 1$  时的理性提前执行策略:在  $t = 1$ , 买权的两种可能价格是 2.5 ( $= C_u$ ) 与 0 ( $= C_d$ )。故在  $t = 0$  时该美式买权的合理价格应为:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1.004} [(0.54) \underbrace{(2.5)}_{C_u} + (0.46) \underbrace{(0)}_{C_d}] \\ &= 1.34 \end{aligned}$$

合理价格 1.34 高于在  $t = 0$  的执行价格(0),故不宜于  $t = 0$  时执行(或履约)该买权。根据上面的计算结果,我们将  $t = 1$  与  $t = 0$  的执行价格与合理价格由图 6 表示。

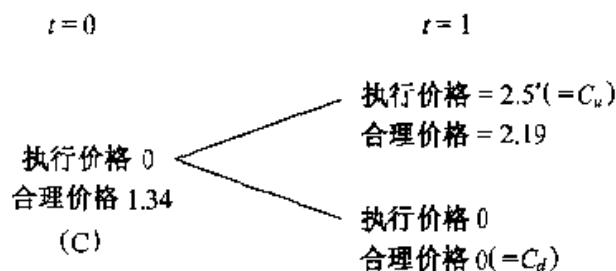


图 6 买权执行价格与合理价格的比较

\* 代表应在  $t = 1$  当股价上升至 52.5 时,应于股利发放日之前立即提前执行履约。



以上所介绍的二元树模型也适用于评价美式卖权。只要提前执行(或履约)较有利,美式卖权随时都应提前履约(不管有无支付股利)。在评价美式卖权的过程中,应在每期检验是否提前履约较有利。反观,未受保美式买权只在有股利分布的情况下,才导致提前履约的可能性。因此,只要在有股利分布的时期才检验是否提前履约较有利;若股利分布促使股价下跌的幅度足以抵消延迟执行履约的利益(即保险价值与履约价格的时间价值)时,应提前执行履约。其他的时期不应提前执行履约(详见前一节的分析)。

### 三、美式外汇选择权的评价

在本节中,我们将以台币/美元汇率为例,说明如何利用二项式模型评价美元买权(以美元为履约资产)。美元买权相当于台币卖权(以台币为履约资产)。

**例 3** 假设目前台币/美元汇率是  $S(\text{NT}\$/\$) = \text{NT}\$25$ (每一美元)。未来每期汇率的变动可能是+2%或-2%。在有效期内,中国台湾的无风险利率是5%,而美国无风险利率是9.56%。该汇率变动呈现二项式过程。某一个月期美式美元买权的履约价格为 NT \$25(每一美元)。根据以上资料,以二项式模型评价该美式美元买权的价值。是否可提前执行履约?

答:

$$S = \text{NT}\$25, u = 1.02, d = 1/u = 0.98$$

$$R = e^{(0.05)(1/12)} = 1.004 \text{ (中国台湾无风险利率)}$$

$$R_f = e^{(0.0956)(1/12)} = 1.008 \text{ (美国无风险利率)}$$

$$X = \text{NT}\$25$$

该美式美元买权的评价过程如下:

(1) 首先计算美元在未来两期的可能变动(以台币计)(见图7)。

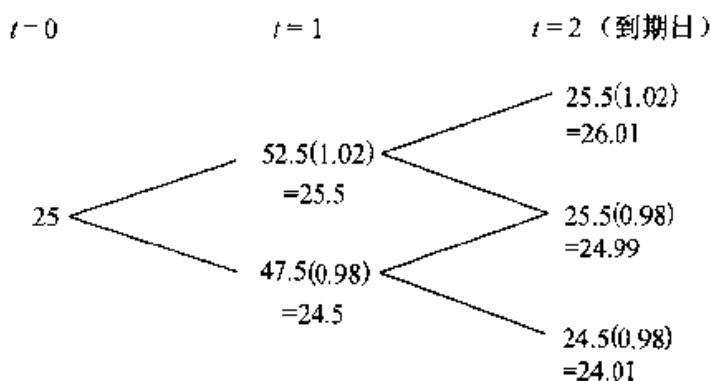


图7 美元的可能变动情况

(2) 下一步骤,我们根据美元的可能变动情况与履约价格计算该美元买权的执行价格( $= \max(S - X, 0)$ )(见图8)。

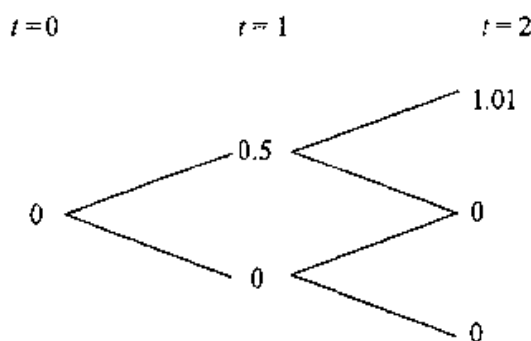


图8 美元买权的执行价格

(3) 根据第二步骤的执行价格,我们计算该美元买权的合理价格。其中所采用的拟似概率  $p$  应以公式(3)来计算如下:

$$p = \frac{R/R_f - d}{u - d} = \frac{1.004/1.008 - 0.98}{1.02 - 0.98} = 0.40 \quad (3)$$

[其证明与公式(4)的证明相似,但须考虑利率为衡关系;证明稍繁,故略]根据图8内  $t=2$  的执行价格,我们计算在  $t=1$  时该美元买权的合理价格:

$$C_u = \frac{1}{1.004} [(0.40)(1.01) + (0.60)(0)] = 0.40 < 0.50 \Rightarrow C_u = 0.50$$

$$C_d = \frac{1}{1.004} [(0.40)(0) + (0.60)(0)] = 0$$

在  $t = 1$  时,当美元上升至 25.5 时,该美元买权的合理价格 0.40,低于执行价格 0.50,故应在此时提前执行(履约)该美元买权较有利。

(4) 在  $t = 0$  时,该美元买权合理价格的计算应以在  $t = 1$  的理性执行策略为主:在  $t = 1$  时,该买权的可能合理价格为 0.50( $= C_u$ ) 与 0( $= C_d$ )。故在  $t = 0$  时该美元买权的合理价值为:

$$C = \frac{1}{1.004}[(0.4)(0.5) + (0.6)(0)] = 0.20$$

根据上面的计算,我们将该美元买权的执行价格与合理价格表示见图 9。

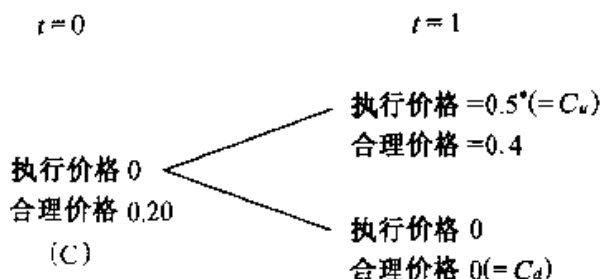


图 9 美元买权执行价格与合理价格的比较

\* 代表在  $t = 1$  时,当美元上升至 25.5 时,应提前执行(履约)该美元买权。

以上所介绍的二项式模型同样适用于美元卖权的评价。唯一不同的是美元卖权的执行价格为  $\max(X - S, 0)$ 。

因为美元买权相当于台币卖权,故当提前执行美元买权有利时,也很可能对提前执行台币卖权有利。所以,在外币选择权的情况下,很可能发生买权与卖权同时提前执行有利。其原因如下:

根据国际利率均等论(Interest Rate Parity),若美国名义利率预期相对低于中国台湾名义利率时,美元将会对台币升值。因此,美元(相对台币)升值促使美元买权成为更价内,这更增加提前执行该买权的概率。又台币(相对美元)贬值促使台币卖权成为更价内,这更增加提前执行(履约)卖权的概率。因此,两国或地区利率差距的变动很可能造成同时提前执行外汇买权与卖权较有利。这种情况不会发生于其他选择权。

#### 四、美式期货选择权的评价：二项式评价模型

在前一节分析中,我们已知道,未受保美式买权会因股利的分布而导致可能提前履约较有利。这是因为发放股利的结果造成履约资产(股票)的价格下降,以致增加提前履约的概率。这种情况适用于任何标的资产价格随时间消逝而降低的美式选择权(即美式选择权以价格递减的履约资产做基础)。比如说,以期货做标的资产的美式选择权是属于此类。期货价格会因持有成本随时间递减而降低。所以,正如前节介绍,我们可以利用二项式模型来评价美式期货选择权。另一例子是,美式外汇选择权;外币(标的资产)会因贬值而使其价值下降。在本节中,我们介绍如何利用二项式模型评价美式期货选择权与如何决定提前履约的时期。我们以举例的方式介绍如下:

**例 4** 假设某履约资产(或标的物)(金、银、大豆等等)的现货价格为 \$50 (= S)\$。该资产未来每期的价格上升率为 0.05,下降率也是 0.05。其他有关资料如下:

$$u = 1 + 0.05 = 1.05, d = 0.95, R = 1.004, X = 50$$

其期货是以该资产作为履约资产,而某种美式买权是以该期货作为履约资产。该美式期货买权的评价程序如下:

(1) 计算履约资产未来各期的可能价格,其计算方法与前节所述的完全相同。其结果如图 10 表示。

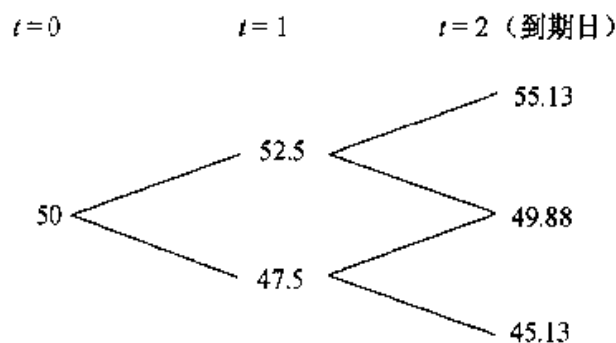


图 10 履约资产的各种可能价格

(2) 计算该期货在各期的可能价格。期货价格应是即期价格加上未来持有现货的持有成本(以无风险利率  $r$  计算)。以公式表示则为

$$F_t = S_t(1+r)^t$$

此处:  $S_t$  = 在时间  $t$  的现货价格

$F_t$  = 在时间  $t$  的期货价格

$r$  = 无风险利率

根据上面公式与各期的可能现货价格,我们计算未来各期的可能期货价格见图 11。

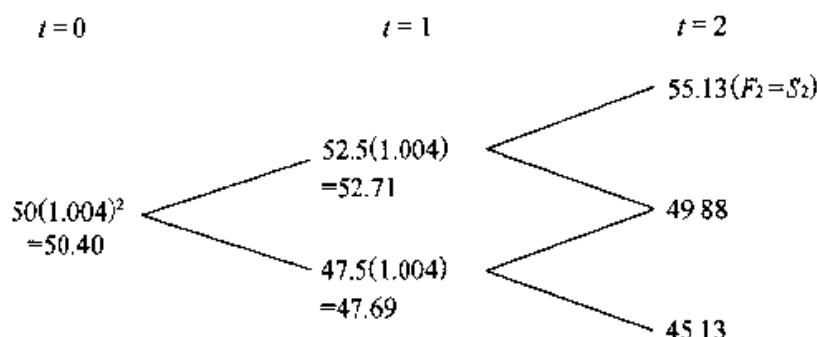


图 11 期货未来各期的可能价格

注:在到期时,期货价格收敛等于现货价格( $F_T = S_T$ ,  $T$  代表到期日)。

(3) 根据第二步骤所得的期货价格,我们计算该期货买权的执行价格(见图 12); 执行价格 =  $\max(F_t - X, 0)$  ( $X = 50$ )

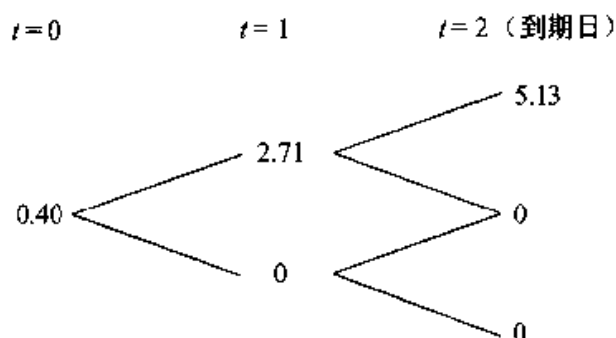


图 12 期货买权的执行价格

(4) 下一步骤是计算该期货买权的合理价格。其中所采用的拟似

概率  $p$  应以公式(4)计算如下:

$$p = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1-0.95}{1.05-0.95} = 0.5 \quad (4)$$

在  $t=0$  时,期货交易并不发生任何现金流量,故拟似概率  $p$  内的  $R$ [见公式(1)]改换成 1(详见附录的证明)。

根据图 12,  $t=2$  的执行价格,我们计算在  $t=1$  的合理价格:

$$\begin{aligned} C_u &= \frac{1}{1.004}[(0.5)(5.13) + (0.5)(0)] \\ &= 2.55 < 2.71 \Rightarrow C_u = 2.71 \end{aligned}$$

$$C_d = \frac{1}{1.004}[(0.5)(0) + (0.5)(0)] = 0$$

在  $t=1$  时,当期货价格上升至 52.71 时,期货买权的合理价格是 2.55 低于执行价格 2.71,故应在此时提前执行该买权较有利。

(5) 在  $t=0$  时,该期货买权合理价格的计算应以在  $t=1$  的理性执行策略为主:在  $t=1$  该买权的可能合理价格应是 2.71 ( $= C_u$ ) 与 0 ( $= C_d$ )。故在  $t=0$  时,该买权的合理价格应为:

$$C = \frac{1}{1.004}[(0.5)(2.71) + (0.5)(0)] = 1.35$$

根据上面的计算,我们将该期货买权的执行价格与合理价格表示见图 13。

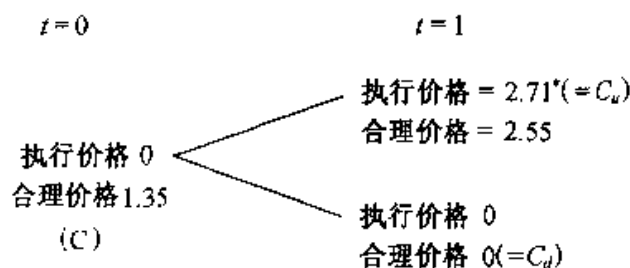


图 13 期货买权执行价格与合理价格的比较

\* 代表在  $t=1$  时,当期货价格上升至 52.71 时,应提前执行该期货买权。

以上所介绍的二项式模型同样适用于美式期货卖权的评价。唯一不同的是美式期货卖权的执行价格应为  $\max(X - F_t, 0)$ 。

## 五、新奇选择权的评价

### (一) 亚洲选择权与评价

亚洲选择权可分为亚洲买权与卖权。亚洲买权提供持有人(或购买者)于契约到期时可以履约价格购买某一预定数量(单位)的履约资产。在到期日时,若履约资产在契约有效期内的平均价格( $\bar{S}$ )大于履约价格( $X$ )时,持有人获利:可以履约价格(较低)买进履约资产(或标的物)。在到期时,亚洲买权的损益结构可由公式(5)代表:

$$C_A = \begin{cases} \bar{S} - X - \rho, & \text{若 } \bar{S} > X \\ -\rho, & \text{若 } \bar{S} < X \end{cases} \quad (5)$$

此处: $\rho$ 代表买进亚洲买权的成本(或权利金)。

类似的,亚洲卖权提供持有人于契约到期时可以履约价格出售某一预定数量的履约资产。在到期日时,若履约资产在契约有效期内的平均价格( $\bar{S}$ )低于履约价格( $X$ )时,持有者获利:可以履约价格(较高)出售履约资产。在到期时,亚洲卖权(持有者)的损益结构如下:

$$P_A = \begin{cases} X - \bar{S} - \rho, & \text{若 } \bar{S} < X \\ -\rho, & \text{若 } \bar{S} \geq X \end{cases} \quad (6)$$

此处: $\rho$ 代表购买亚洲卖权的成本(或权利金)

履约资产的平均价格 $\bar{S}$ 可以算术平均价格,或以几何平均价格作为计算基础。若以算术平均价格,则

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$$

此处: $S_t (1 \leq t \leq n) =$  在契约有效期内,履约资产在时间 $t$ 的价格, $n$ 代表计算平均价格所采用的价格数目。

若以几何平均价格作为计算基础,则

$$\bar{S} = (S_1 S_2 \cdots S_n)^{1/n}$$

在契约有效期内,为计算平均价格,履约资产价格的观察( $S_1 S_2 \dots S_n$ )可以每周、每两周、或每个月观察一次。若以每周观察价格一次,可以星期三收盘价格(或中午价格)作为基础,或其他准则作为观察价格的基础。我们举例说明亚洲选择权的使用如下:

**例 5** 我们利用例 1 的资料作为说明基础。假设现在时间是  $t_0$ , 该公司购买亚洲(美元)买权,以规避美元的价格风险。该买权的履约价格 NT \$ 25.90(每一美元),到期日 6 个月,购买该买权的成本为 NT \$ 0.20(每一美元)。假设在契约有效期内,台币/美元汇率的平均汇率是以每月最后交易日的收盘价格作为计算平均值的资料。因此,平均汇率是 6 个收盘价格(汇率)的平均值。在 6 个月到期时,平均汇率可能高于或低于履约汇率(或履约价格)。我们分析如下:

1. 在到期时,若平均汇率( $\bar{S}$ )是 NT \$ 26.25,高于履约汇率(NT \$ 25.90),则该公司获得的净利是

$$26.25 - 25.90 - 0.20 = \text{NT } \$ 0.15 \text{ (每一美元)}$$

也就是说,该公司可以履约价格(较低的价格)购买美元,而后偿还美元贷款。

2. 在到期时,若平均汇率是 NT \$ 25.75,低于履约汇率,该公司可放弃该买权;损失只是购买该买权的成本(NT \$ 0.20)而已。但该公司平均可以低于履约汇率的价格购入美元,以偿还美元贷款。

### 亚洲选择权价值的评价

若履约资产价格是以几何平均值作为基础,在对数正态(或常态)概率分布假设下,几何平均值也是对数正态分布。亚洲选择权可利用 Black-Scholes 模型决定其价格。Kemna 与 Vorst(1990)以及 Turnbull 与 Wakeman(1991)都对亚洲选择权的评价做了详细的介绍。但若履约资产价格是以算术平均值作为基础,则并无准确的模型(或公式)可用来评价亚洲选择权。若以算术平均值做基础,二项式评价模型可用来评价亚洲选择权。我们将以下列资料来介绍如何利用二项式评价模型决定亚洲买权的价值:



**例 6**  $X = \text{NT\$ } 25.90$ ,  $T = 3/12 = 0.25$ , 即期汇率 = NT\$ 25.95 =  $S_0$ 。为评价该买权,我们将 3 个月期分割成 3 个一月期。每一月期的长度为  $h = T/n = 0.25/3 = 0.083$ (年)。此外,假设我们已知(或估计)台币/美元汇率的(瞬息)标准差为 0.05( $\sigma$ );中国台湾的无风险利率(短期债券利率)为 4%( $=r$ );美国无风险利率为 3%( $=r_f$ )。利用二项式模型与外币选择权评价模型,我们可计算下列重要评价参数(Parameters):

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} = e^{0.05\sqrt{0.083}} = 1.0145$$

$$d = 1/u = 0.9857$$

$$r^* = e^{(r-r_f)(T/n)} = e^{(0.04-0.03)(0.83)} = 1.0008$$

$$p = \frac{r^* - d}{u - d} = \frac{1.00083 - 0.9857}{1.0145 - 0.9857} = 0.524$$

$$1 - p = 0.476$$

汇率的平均价值是以期初汇率与以后每个月最后交易日汇率的算术平均值作为计算标准。因此,在到期日(即 0.25 年)时,该亚洲买权的价值应是

$$\max\left(\frac{S_0 + S_1 + S_2 + S_3}{4} - 25.90, 0\right) \quad (7)$$

此处: $S_t$  代表时间  $t$  的台币/美元汇率( $t = 0, 1, 2, 3$ )

首先,我们根据二项式模型的树图(Tree Diagram)来计算在不同时段( $t = 0, 1, 2, 3$ )下的所有汇率可能情况。这可由图 14 清楚表示如下:

图 1 的计算如下:

$$S_u = (25.95)(1.0145) = 26.33$$

$$S_d = (25.95)(0.9857) = 25.58$$

$$S_{uu} = (25.95)(1.0145)^2 = 26.71$$

$$S_{ud} = (26.33)(0.9857) = 25.95$$

$$S_d^2 = (25.58)(0.9857) = 25.21$$

$$S_u^3 = (26.71)(1.0145) = 27.10$$

其余计算可类推

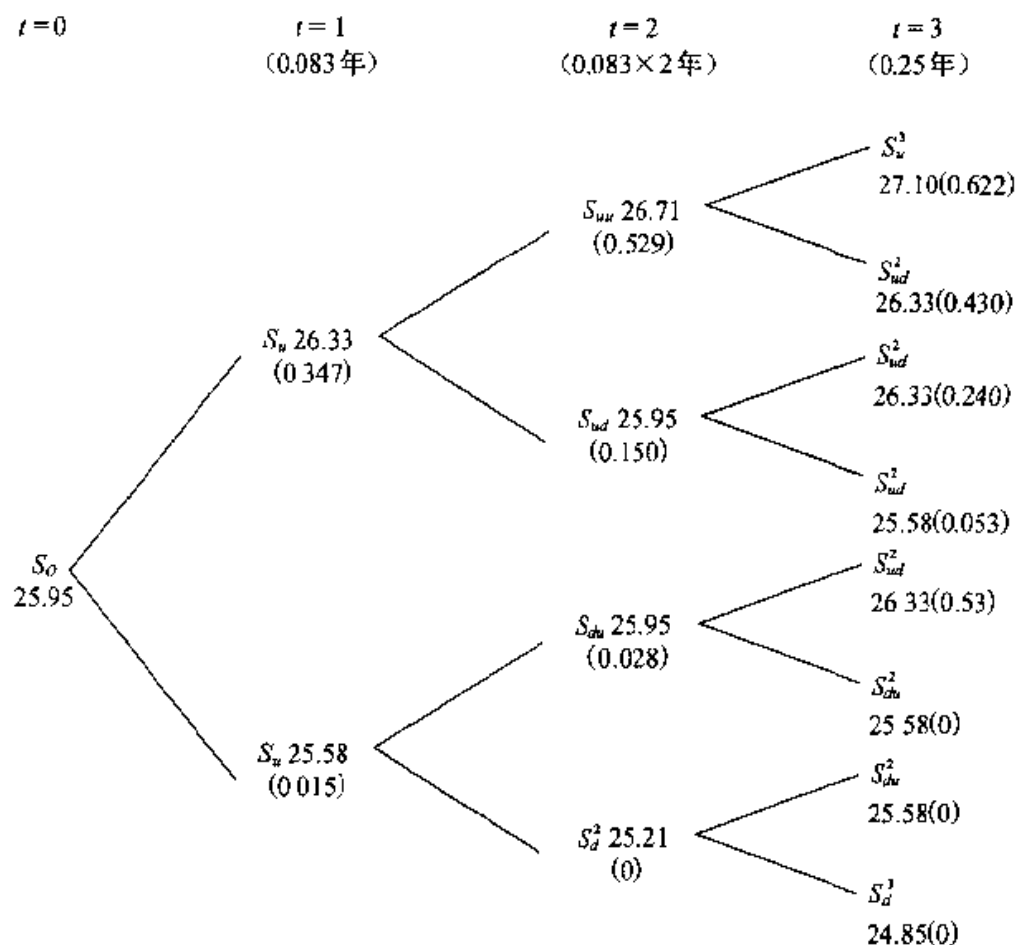


图 14 汇率变动的树图

然后根据图 14 中每一树结(Tree Node)的 5 个汇率计算到期日( $t=3$ )的平均汇率( $\bar{S}$ )与在每一树结下的买权价值[利用公式(7)]。我们计算如下:

$$\begin{aligned} & \max[(25.95 + 26.33 + 26.71 + 27.10)/4 - 25.90, 0] \\ & = \max(0.622, 0) = 0.622 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max[(25.95 + 26.33 + 26.71 + 26.33)/4 - 25.90, 0] \\ & = \max(0.43, 0) = 0.430 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max[(25.95 + 26.33 + 25.95 + 26.33)/4 - 25.90, 0] \\ & = \max(0.24, 0) = 0.240 \end{aligned}$$

$$\max[(25.95 + 26.33 + 25.95 + 25.58)/4 - 25.90, 0]$$

$$= \max(0.053, 0) = 0.053$$

$$\max[(25.95 + 25.58 + 25.95 + 26.33)/4 - 25.90, 0]$$

$$= \max(0.053, 0) = 0.053$$

$$\max[(25.95 + 25.58 + 25.95 + 25.58)/4 - 25.90, 0]$$

$$= \max(-0.135, 0) = 0.0$$

最后两树结所代表的买权价值将是零。

将每一树结所代表的期终买权价值标示于图 14 中(以括号内的数值代表)。根据图 14 中买权在  $t = 3$  的价值配对,倒推计算买权在  $t = 2$  的价值(买权在  $t = 2$  的现值)。而后再根据买权在  $t = 2$  的价值配对,再倒推计算买权在  $t = 1$  的现值。最后,计算买权在期初( $t = 0$ )的价值。我们计算如下:

在  $t = 2$  时,买权有两种可能的配对价值:

$$[(0.622)(0.524) + (0.430)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.529 \text{ (标示于图 14)}$$

$$[(0.240)(0.524) + (0.053)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.150 \text{ (标示于图 14)}$$

$$[(0.053)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.028$$

$$[(0)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.0$$

在  $t = 1$  时,买权的可能配对价值为:

$$[(0.529)(0.524) + (0.150)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.347$$

$$[(0.028)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.015$$

最后,该买权在  $t = 0$  的价值是

$$[(0.347)(0.524) + (0.015)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.188$$

由上面的计算程序可知,我们首先计算买权在到期日时的所有可能价值。而后,利用现值方法倒推计算买权在  $t_2$ ,  $t_1$  与  $t_0$  的价值。利用二项式模型也可计算,以几何平均价格作为基础的买权价值。若计算时间的间隔  $h (= T/n)$  愈小,二项式模型所估计的买权价值愈准确。

亚洲选择权(或称平均选择权)采用平均价格,而不是即期价格。因此,平均价的方差一般比即期价格的方差低。故平均选择权的价值低于纯选择权的价值;利用平均选择权规避价格风险的成本低于利用纯选择权的成本。

在上例中,我们以汇率作为介绍基础。亚洲选择权也适用于股票、商品或其他资产的价格风险规避工具。

## (二) 打赌选择权(Bet Options)

当投资人(或共同基金经理人、财务经理人员)对某种价格变动走势(诸如股价、利率或汇率)的预测具有相当的把握,但对变动幅度的大小并无把握时,可利用打赌选择权来获取(或打赌)判断正确的报酬。比如说,某基金经理人预测股票指数将会在两个月后上升至7 000点,但超过7 000点的幅度并无预测的信心。为了将他的观点(或预测)加以利润化(即打赌),他可购买打赌买权:在两个月后,若股票指数真正达到7 000点(预测正确),他可获利50万元。但若他的预测不正确,他只损失购买比买权的成本而已。或者,某投资若认为在未来3个月利率会下降至5%,但不知道利率下降的幅度。则他可购买打赌卖权,将他的预测加以利润化。若他的预测是正确,他可获得10万元。若不正确,则只损失购买卖权的成本而已。因打赌选择权将投资人的观点或预测加以利润化(或量化),故也称为数据选择权(Binary Options)。

根据上面两个例子,我们可将打赌选择权的损益结构表示如下:

### 1. 打赌买权( $C_B$ )的损益结构

$$C_B = \begin{cases} M - \rho, & \text{若 } S_T > E(\text{履约价}) \\ -\rho, & \text{若 } S_T \leq E \end{cases}$$

此处: $M$  = 预测正确的报酬(即当  $S_T > E$  时的报酬)

$\rho$  = 购买打赌买权的成本

### 2. 打赌卖权( $P_B$ )的损益结构

$$P_B = \begin{cases} M - \rho, & \text{若 } S_T < E \\ -\rho, & \text{若 } S_T \geq E \end{cases}$$

此处:  $M$  = 预测正确( $S_T < E$ )的报酬

$\rho$  = 购买打赌卖权的成本

从持有人的观点,纯买权与打赌买权的损益结构比较可由图 15 表示。

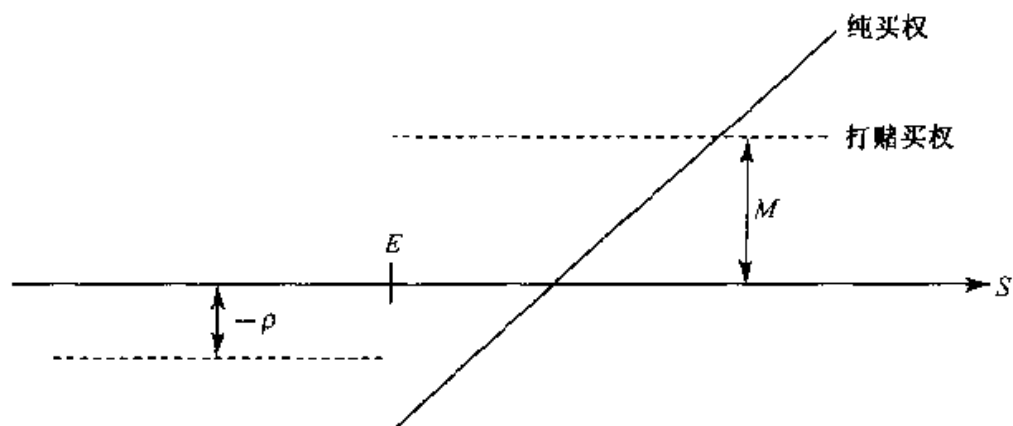


图 15 纯买权与打赌买权的损益结构—持有人观点

注:虚线代表打赌买权的损益结构。

从持有人的观点,纯卖权与打赌卖权的损益结构比较可有图 16 表示。

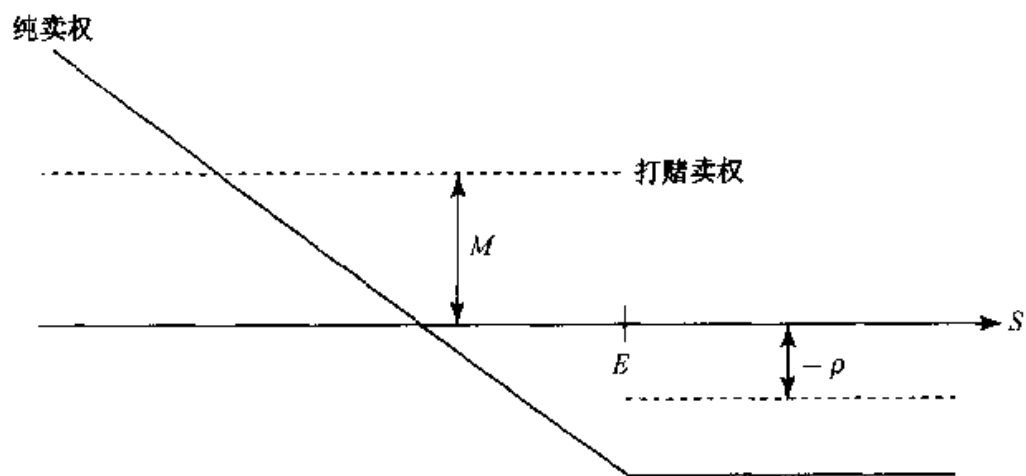


图 16 纯卖权与打赌卖权的损益结构—持有人观点

注:虚线代表打赌卖权的损益结构。

打赌选择权的评价:

**例 7** 我们仍采用例 6 的资料。目前即期汇率为 NT \$ 25.95 (每一美元)。某共同基金经理人预测台币/美元汇率在未来 3 个月很可能上升至 NT \$ 26.20。为将他的预测加以利润化,他购买打赌(美元)买权。若他的预测正确,他可获得一元台币(每一美元)。若预测不正确,不得分毫。在这种损益结构下,3 个月到期时,该买权价值的可能情况可由图 17 表示。

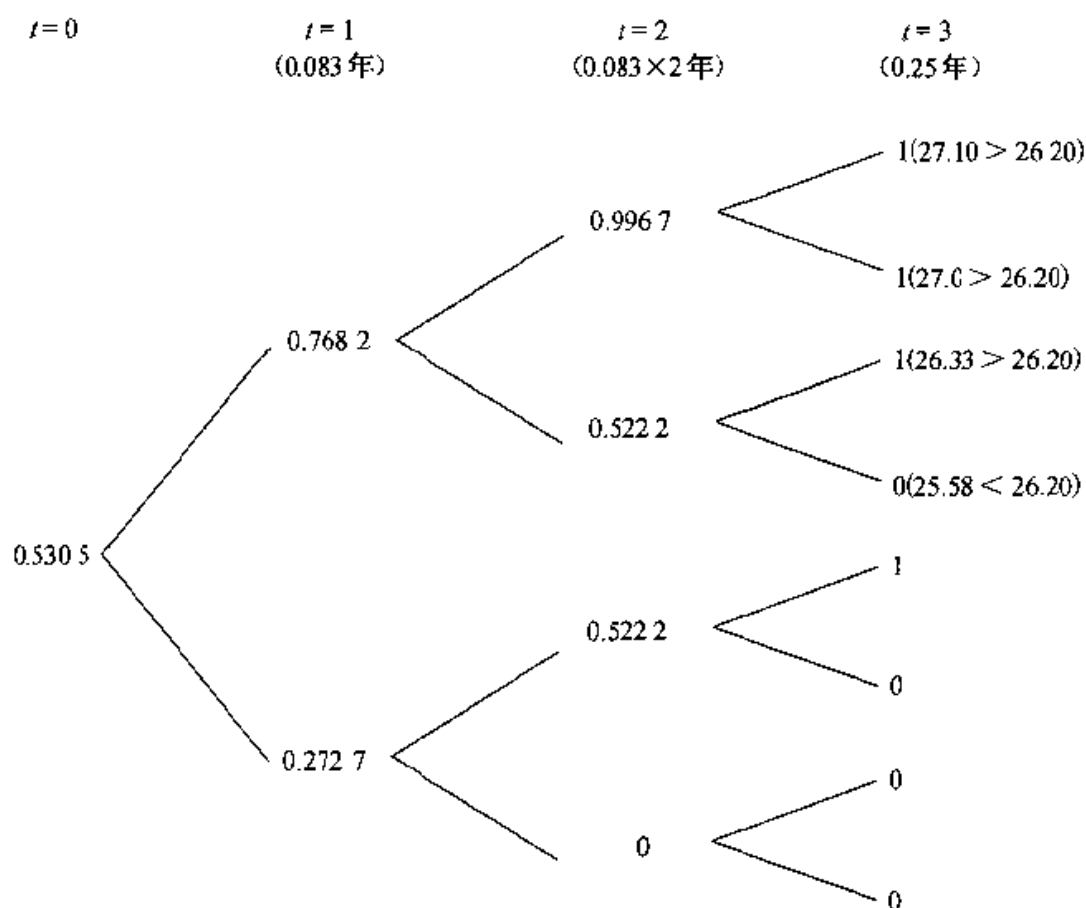


图 17 打赌买权的评价树图

在  $t = 2$ , 打赌买权的可能价值:

$$[(1)(0.524) + (1)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.9967$$

$$[(1)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.5222$$

在  $t = 1$ , 打赌买权的可能价值:

$$[(0.9967)(0.524) + (0.5222)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.7682$$

$$[(0.5222)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.2727$$

在  $t = 0$ , 打赌买权的可能价值:

$$[(0.7682)(0.524) + (0.2727)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.5305 \text{ (每一美元)}$$

所以,若赌金为一百万元(1m),该买权的合理价值应为

$$0.5305 \times 1m = 530500 \text{ 台币}$$

正如前所述,若计算时间的间隔  $[h = T/n]$  愈小,二项式模型所估计的价值会愈准确。

### (三) 后定选择权(Chooser Options, or "As You Like It" Options)

后定选择权允许持有人在到期前某一定时期选择(决定)该选择权应是买权或是卖权。若持有人的选择是买权,则持有人有权在到期时,可以履约价格购买某一定数量的履约资产。但若持有人的选择是卖权,则持有人有权在到期时,可以履约价格出售某一定数量的履约资产(给契约的卖方)。后定选择权内买卖权的履约价格可以设定相同,也可以不相同。此外,选择买权与卖权的时期也可相同、也可不相同。后定选择权的损益结构分析如下:

1. 买权与卖权都有相同的到期日( $T$ )与相同的履约格( $E$ ):

(1) 在选择期  $t_1$ ,若持有人选择买权,则在到期时后定选择权(买权)的价值为

$$\max(S_T - E - \rho, -\rho) = \begin{cases} S_T - E - \rho, & \text{若 } S_T > E \text{ (履约价)} \\ -\rho, & \text{若 } S_T \leq E \end{cases}$$

(2) 在选择期  $t_1$ ,若持有人选择卖权,则在到期时后定选择权(卖权)的价值为

$$\max(E - S_T - \rho, -\rho) = \begin{cases} E - S_T - \rho, & \text{若 } S_T < E \\ -\rho, & \text{若 } S_T \geq E \end{cases}$$

2. 买权的到期日为  $T_1$ , 而卖权的到期日为  $T_2$ 。又, 买权与卖权的履约价格分别为  $E_1$  与  $E_2$ :

(1) 在选择期, 若持有人选择买权, 则在到期 ( $T_1$ ) 时后定选择权 (买权) 的价值为:

$$\max(S_{T_1} - E_1 - \rho, -\rho) = \begin{cases} S_{T_1} - E_1 - \rho, & \text{若 } S_{T_1} > E_1 \\ -\rho, & \text{若 } S_{T_1} \leq E_1 \end{cases}$$

(2) 在选择期, 若持有者选择卖权, 则在到期 ( $T_2$ ) 时后定选择权 (卖权) 的价值为:

$$\max(E_2 - S_{T_2} - \rho, -\rho) = \begin{cases} E_2 - S_{T_2} - \rho, & \text{若 } S_{T_2} < E_2 \\ -\rho, & \text{若 } S_{T_2} \geq E_2 \end{cases}$$

我们举例如下:

**例 8** 假设目前台币/美元汇率为 NT\$25.95。在一个月后, 汇率预期会上升 (台币贬值)。某投资者对选举的结果无法预知。因此, 他决定购买后定选择权, 允许一个月后决定是买权、或是卖权。买卖权的履约价格都是 NT\$25.90, 且到期日都是 3 个月 (自购买后定选择权日起计算)。在一个月后, 选举结果不如意。因此, 美元对台币升值至 NT\$26.16/\$。买权成为价内, 而卖权成为价外, 因此, 该投资人决定选择买权。两个月过后 (在到期时), 该买权的价值须视当时的台币/美元汇率而定:

1. 在到期时, 若汇率是 NT\$26.20, 则该投资人的净获利是

$$26.20 - 25.90 - 0.10 = \text{NT\$}26.20 \text{ (每一美元)}$$

[假设购买该后定选择权的成本为 NT\$0.10 (每一美元)]

2. 在到期时, 若汇率 NT\$25.88, 则该投资人的损失只是购买该选择权的成本而已 (即 NT\$0.10)。

后定选择权的评价:

**例 9** 我们利用例 6 的资料来评价后定选择权。因基本资料与例 6 相同, 我们仍可利用图 14 来评价该选择权。在到期时 (3 个月), 我们首



先计算在不同汇率情况下,买卖权的个别价值(见图 18)。在  $T = 3$  时:

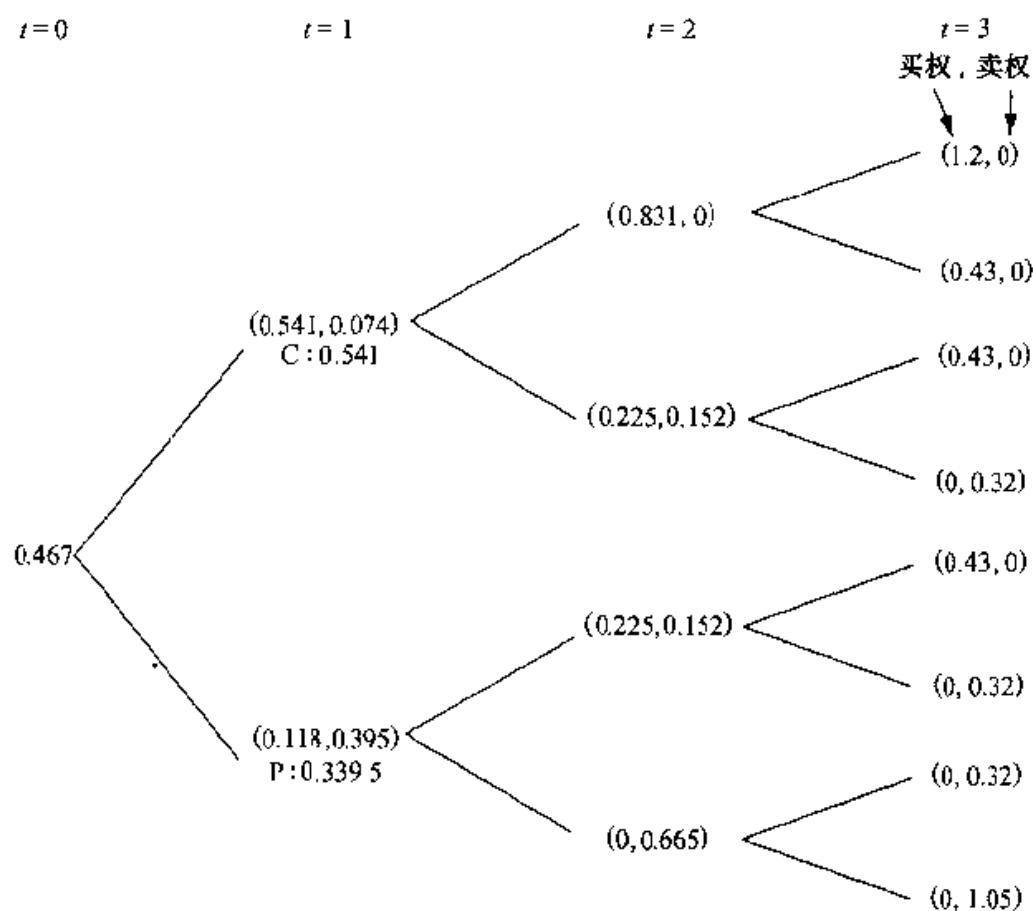


图 18 后定(买权)选择权的评价过程

当  $S_u^3 = 27.10$ , 买权价值( $C$ )  $= 27.10 - 25.90 = 1.2$

卖权价值( $P$ )  $= 0$

当  $S_{ud}^2 = 26.33$ ,  $C = 26.33 - 25.90 = 0.43$

$P = 0$

当  $S_{ud}^2 = 25.58$ ,  $C = 0$

$P = 25.9 - 25.58 = 0.32$

当  $S_d^3 = 24.85$ ,  $C = 0$

$P = 25.9 - 24.85 = 1.05$

在  $t = 2$  时,我们利用  $t = 3$  买权的可能配对价值,倒推计算在  $t = 2$  买权的价值。同时,利用类似的程序计算在  $t = 2$  卖权的价值。详细计算如下:

$$C: [(1.2)(0.524) + (0.43)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.831$$

$P: 0$

$$C: [(0.43)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.225$$

$$P: [(0)(0.524) + (0.32)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.152$$

$$C: [(0.43)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.225$$

$$P: [(0)(0.524) + (0.32)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.152$$

$$C: [(0)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0$$

$$P: [(0.32)(0.524) + (1.05)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.665$$

在  $t = 1$  时,基于买权与卖权的价值,投资人决定应选择买权或卖权。(即选择价值较高者)。抉择如下:

$$C: [(0.831)(0.524) + (0.225)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.541$$

$$P: [(0)(0.524) + (0.152)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.72$$

因买权价值较高,故应选择买权。

$$C: [(0.225)(0.524) + (0)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.118$$

$$P: [(0.152)(0.524) + (0.665)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.395$$

因卖权价值较高,故应选择卖权。

最后,在  $t = 0$  时该后定选择权的合理价值应为:

$$[(0.541)(0.524) + (0.395)(0.476)]e^{-(0.04)(0.083)} = 0.467$$

若计算时间的间隔( $T/n$ )愈小,二项式模型所估计的价值会愈准确。

其实,后定选择权的价值也可以买卖权平价公式(Put-Call Parity)加以评估。道理很简单:

后定选择权价值 =  $\max(C, P)$

$$= \max(C, C + Ee^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)})$$

$$= C + e^{-q(T-t)} \max(0, Ee^{-(r-q)(T-t)} - S_t) \quad (8)$$

此处:买卖权平价关系是

$$P = C + Ee^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)} \quad (t \text{ 是选择期日})$$

$\max(0, Ee^{-(r-q)(T-t)} - S_t)$  代表卖权在时间  $t$ (选择日)的价值。

根据公式(8),后定选择权是由下列两种选择权组合而成:

1. 买权:其到期日为  $T$ ,履约价格为  $E$ 。
2.  $e^{-q(T-t)}$  单位的卖权,其履约价格为  $Ee^{-(r-q)(T-t)}$ ,到期日为  $T$ 。

所以,评价上面两种买卖权后,后定选择权的价值就可容易地决定。

后定选择权的适用情况

当未来某一重要事件的发生会影响价格、利率或汇率的(大幅)变动,但未能预知变动的方向[上升或下降,须视重要事件发生的结果]。比如说,若执政党竞选成功,不确定因素消失,股价反应上升。若失败,股价下挫。所以,股价上升或下降须视竞选的结果。此外,决定某种重要事件的公民投票、调降证交税、可能发生的战争、或可能发生的罢工等等都是重要事件。这些事件的结果决定股价、利率或汇率的上升或下降。投资人可不必承负这些重要事件所增加的价格变动风险;避免此种风险的方法是采用后定选择权;俟重要事件发生后,再决定应选择买权或卖权。

其他新奇选择权的二元树评价可参见“选择权与期货”一书(陈松男著)。

## 六、结 论

我们用了很大的篇幅来介绍如何利用二项式模型评价美式买权与卖权,并讨论如何决定提前执行(履约)的时间。当执行价格高于合理价格时,应提早执行。在股利分布情况下,评价程序与决定提前执行的策略有所不同,我们也举例详细说明之。我们也介绍如何利用二项式模型评价美式期货选择权,美式外汇选择权与多种新奇选择权。

## 参 考 文 献

- G. Barone-Adesi, and R. Whaley. "Efficient Analytical Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, 42(1987), p. 301—320.
- F. Black, and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(1973), p. 637—659.
- R. Breen, "The Accelerated Binomial Option Pricing Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(1991), p. 53—164.
- M. Brennan, and E. Schwartz. "The Valuation of American Put Options", *Journal of Finance*, 32(1997), p. 449—462.
- M. Broadie, and J. Detemple. "American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods", *Review of Financial Studies*, 9(1996), p. 1211—1250.
- D. S. Bunch, and H. Johnson. "A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach", *Journal of Finance*, 47(1992), p. 809—816.
- J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7(1979), p. 229—264.
- S. Figlewski, and B. Gao. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing", *Journal of Financial Economics*, 53 (1999), p. 313—351.
- R. Geske, and H. E. Johnson. "The American Put Valued Analytically", *Journal of Finance*, 39(1984), p. 1511—1524.
- J. Huang, M. Subrahmanyam, and G. Yu, "Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method", *Review of Financial Studies*, 9 (1996), p. 277—300.
- H. Johnson, "An Analytical Approximation for the American Put Price", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1983), p. 141—148.
- N. Ju, "Pricing an American Option by Approximating Its Early exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function", *Review of Financial Studies*, 11, 3 (1998), p. 627—646.

- \_\_\_\_ and R. Zhong "An Approximating Formula for Pricing American Options",  
*The Journal of Derivatives*, Winter 1999, 31—41.
- L. W. MacMillan, "An Analytical Approximation for the American Put Prices",  
*Advances in Futures and Options Research*, 1(1986), p. 119—139.

## 附 录

公式(4)的证明如下:

首先我们建立一个避险组合。它包括购买一个期货买权(长部位),并出售  $\Delta$  个履约期货(短部位)。该组合是由长、短部位合并组成,因此,它是个无风险组合。这是因为长部位的损益正好与短部位的损益刚好冲消,以致无风险。此无风险组合的报酬率应等于无风险利率。

假设该期货价格变动呈现二项式程式。其价格上升与下降的概率分别为  $u$  与  $d$  ( $u = 1 + \text{上升率}$ ,  $d = 1 - \text{下降率}$ )。期货买权在下一期的可能价格可以  $C_u$  与  $C_d$  代表。 $C_u$  代表当期货上升时,该期货买权的价格; $C_d$  代表当期货下降时,该期货买权的价格。

在下一期,若期货上升,该无风险组合的价值可表示为:

$$\begin{array}{r} \text{长部位} = C_u \\ +) \text{短部位} = \Delta(F - F_u) \\ \hline \text{组合价值} = C_u + \Delta(F - F_u) \end{array}$$

此处: $F$  期初期货价格,  $F_u$  = 下一期期货的上升价格

在下一期,若期货下降,该无风险组合的价值应为:

$$\begin{array}{r} \text{长部位} = C_d \\ +) \text{短部位} = \Delta(F - F_d) \\ \hline \text{组合价值} = C_d + \Delta(F - F_d) \end{array}$$

此处: $F_d$  = 下一期期货的下降价格

因该组合是一个无风险组合,故它的上升与下降价格应相等:

$$C_u + \Delta(F - F_u) = C_d + \Delta(F - F_d) \quad (\text{A. 1})$$

由上面公式求解出而得

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{F_u - F_d} \quad (\text{A. 2})$$

将公式(A. 2)的  $\Delta$  代入公式(A. 1)的左方而得

$$\begin{aligned} \text{左方} &= C_u + \frac{C_u - C_d}{F_u - F_d}(F - F_u) \\ &= C_u + \frac{C_u - C_d}{u - d}(1 - u) \\ &= \left(\frac{1-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-1}{u-d}\right)C_d \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

若将(A. 2)的  $\Delta$  代入公式(A. 1)的右方,我们也同样得到(A. 3),即

右方 = (A. 3) (因该组合是无风险组合)

公式(A. 3)代表在下一期( $t = 1$ )该无风险组合的价值。因此,在期初( $t = 0$ )时该组合的合理价值应是  $t = 1$  价值的现值。也就是,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{R} \left[ \left(\frac{1-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-1}{u-d}\right)C_d \right] \\ &= \frac{1}{R} [pC_u + (1-p)C_d] \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

此处: $R = 1 + \text{无险利率}$

$$p = \frac{1-d}{u-d} \quad (\text{也就是公式(13)})$$

$$1-p = \frac{u-1}{u-d}$$

因该组合内包括  $\Delta$  个期货、且在期初( $t = 0$ )期货并未发生任何现金流量,故公式(A. 4)所代表的组合价值其实是期货买权的价值。(在期初建立无风险组合时,必须支付现金购买期货买权)。

## 第二十九章 三元树选择权评价模型

### 一、简介

在前两章,我们已介绍二元树选择权评价模型,它可用来评价欧式与美式选择权以及其他新奇选择权。尤其是,封闭解(The Closed-Form Solutions)不存在的选择权,也可以二元树模型评价选择权,但缺点是,其解答的收敛速度慢,尤其是求解界限选择权(Barrier Options)及其他较复杂的选择权,答案的收敛速度很慢,且需要更多的时间步骤(Time Steps)才能达满意的答案(即误差很小的答案)。因此我们需要一种更有效率的近似解答模型来评价选择权及其他较复杂的选择权。虽然 Boyle(1989), Boyle, Evnine 及 Gibbs(1989), 以及 Boyle 及 Lau(1994)都有提供较有效率的树解模型,但 Kamrad 及 Ritchken(1991)的三元树评价方法及其延伸提供了很有效率的方法,答案收敛速度快且很准确。因此,我们在本章将介绍 Kamrad 及 Ritchken(1991,简称 K&R)的三元树评价模型及其延伸。

### 二、三元树模型:单一情况变量模型

正如 Black-Scholes 模型,在风险中立下股价动态过程(单一情况变量)可表示为:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dZ \quad (1)$$

对数股价  $\ln S$  的动态过程为:

$$d\ln S = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dZ = \mu dt + \sigma dZ \quad (2)$$

此处:  $\mu = r - \sigma^2/2$

根据(2),在时间  $\Delta t$  下,(2)式可另表示为:

$$\ln S(t + \Delta t) = \ln S(t) + Z(t) \quad (3)$$

因此,  $\Delta \ln S(t)$  是正态分布,其期望值为  $\mu \Delta t$ , 方差为  $\sigma^2 \Delta t$ 。在时段  $[t, t + \Delta t]$  内,令  $S^*(t)$  的概率分布代表  $\ln S(t)$  概率分布的近似概率分布(The Approximating Distribution)。也就是说,在  $[t, t + \Delta t]$  时段,间断性对数股价  $S^*(t)$  的变动有 3 种情况如下:

$$S^*(t) = \begin{cases} V, & \text{概率为 } p_1 \\ 0, & \text{概率为 } p_2 \\ -V, & \text{概率为 } p_3 \end{cases} \quad (4)$$

此处:  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

换另一方式表示股价在  $(t, t + \Delta t)$  时段的变动为:

$$S(t + \Delta t) = \begin{cases} S_0 e^V = S_0 e^{\lambda \sigma \sqrt{\Delta t}}, & \text{概率为 } p_1 \\ S_0, & \text{概率为 } p_2 \\ S_0 e^{-V} = S_0 e^{-\lambda \sigma \sqrt{\Delta t}}, & \text{概率为 } p_3 \end{cases} \quad (5)$$

此处:  $S_0$  为期初股价

$V$  值取决为

$$V = \lambda \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (\lambda \geq 1) \quad (6)$$

注:  $\lambda \geq 1$  才能使概率  $p_1, p_2$  及  $p_3$  不会是负值。下文将会知晓。我们可根据  $S^*(t)$  的一阶动差及二阶动差(The First and The Second Moments) 求解概率,如下:

$$E(S^*(t)) = p_1 V + 0 - p_3 V = V(p_1 - p_3) = \mu \Delta t \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Var(S^*(t)) &= E[S^*(t) - E(S^*)]^2 \\ &= p_1 [V - V(p_1 - p_3)]^2 + [0 - V(p_1 - p_3)]^2 p_2 \end{aligned}$$



$$+ [-V - V(p_1 - p_3)]^2 p_3 \\ = V^2(p_1 + p_3) \text{ (简化得之)}$$

$$\therefore V^2(p_1 - p_3) = \sigma^2 \Delta t + O(\Delta t) \quad (8)$$

此处:  $O(\Delta t)$  代表涉及  $\Delta t$  一次方以上的项目, 诸如  $\Delta t^2$  可视为零。利用 (7) 及 (8) 解出  $p_1$  及  $p_3$  如下:

$$p_1 = \frac{\mu \Delta t}{V} + p_3 \quad (\text{由 (7)}) \quad (9)$$

将 (9) 代入 (8) 解出  $p_3$ :

$$p_3 = \frac{\sigma^2 \Delta t}{V^2} - p_1 = \frac{\sigma^2 \Delta t}{V^2} - \frac{\mu \Delta t}{V} - p_3 \\ \therefore p_3 = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu \sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \quad (10)$$

将  $p_3$  代入 (9) 即得  $p_1$ :

$$p_1 = \frac{\mu \Delta t}{V} + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu \sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu \sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \quad (11)$$

此外,

$$p_2 = 1 - p_1 - p_3 = 1 - 1/\lambda^2 \quad (12)$$

只要  $\lambda \geq 1$ , 则  $p_1$ ,  $p_2$  及  $p_3$  将不会成为负值, 而是大于或等于零, 且  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 。若  $\lambda = 1$ , 则

$$V = \sigma \sqrt{\Delta t}$$

而且股价的概率分布变成

$$S(t + \Delta t) = \begin{cases} S_0 e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}, & p_1 = \frac{1}{2} + \frac{\mu \sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \\ S_0 e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}, & p_3 = \frac{1}{2} - \frac{\mu \sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \end{cases} \quad (13)$$

(注:  $p_2 = 0$ ,  $p_1 + p_3 = 1$ )

所以, 当  $\lambda = 1$ , 三元树模型变成为 Cox, Ross 及 Rubinstein (CRR) 的

二元树模型(或称二项式模型)。<sup>[详见二元树模型一章内的(22)及(23)式]</sup>。

### 三元树结构

根据(5),在 $[t, t + \Delta t]$ 时段股价的变动过程,三元树的结构可如图1表示。

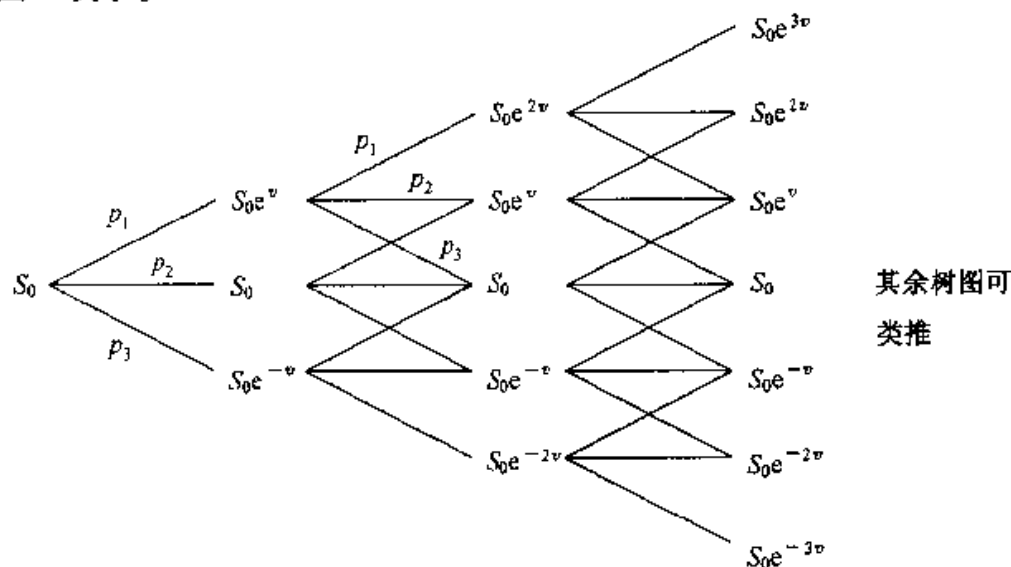


图 1

### 与二元树模型比较

为说明三元树模型优于二元树模型,K&R(1991)分别以价平价内及价外3种不同买权来做验证。在此,我们列报其中部分实证结果见表1。

实证参数:  $S_0 = 40$ ,  $r = 4.879\%$ ,  $T = 7$  个月(0.583 33 年),  $\sigma = 0.20$

表 1 二元树及三元树评价误差比较

履约价 K	$\lambda$	总时段(n)			
		10	30	50	70
35	1.414 21	0.015	-0.002	-0.001	0.001
	1.054 09	-0.009	-0.002	0.001	0.001
	1(二元树)	-0.019	-0.006	0.005	-0.002

(续表)

履约价 $K$	$\lambda$	总时段( $n$ )			
		10	30	50	70
40	1.414 21	0.030	0.007	0.003	0.000
	1.054 09	0.008	-0.001	-0.003	-0.003
	1(二元树)	0.056	0.017	0.008	0.005

注: 评价误差 = Black-Scholes 评价 - (三元树评价或二元树评价)

解释:

1. 在三元树评价下,不管在任何  $\lambda$  值之下,其评价误差都比二元树评价误差小,且其解答收敛快。比如说,就价内买权( $K = 35$ )而言,当  $n = 30$  及  $\lambda = 1.414\ 21$  时,三元树评价误差为  $-0.002$ ,但二元树评价误差为  $-0.006$ 。到  $n = 50$  时,前者误差为  $-0.001$ ,后者误差仍是大  $0.005$ 。在其他的  $n$  及  $\lambda$  值下,也显示相同的结论。因此,三元树评价可以较小的总分割时段  $n$  达到二元树需要以较大的  $n$  获得相同的准确度。例如当  $\lambda = 1.414\ 21$  及  $n = 30$ ,三元树评价误差为  $-0.002$ 。但二元树评在  $n = 70$  才能达到  $-0.002$  的误差。因此,二元树评价需要一倍以上的  $n$  才能达到所要求的准确度。

2. 就价平( $K = 40$ )买权而言,三元树评价仍然比二元树评价准确,且答案的收敛速度快。价外买权( $K = 45$ )也显示类似的结果(未列表在此)。

表一的实证结果,可以图 2 表示更清楚。

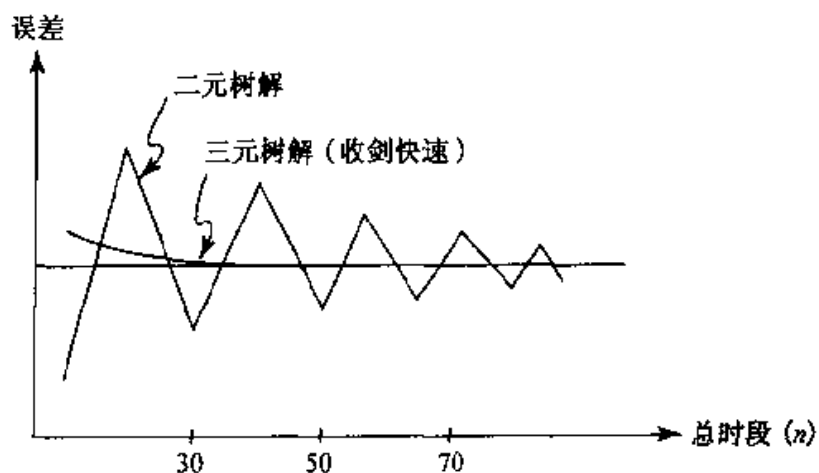


图 2

在尚未介绍下一节界限选择权评价之前,我们举例说明如何利用三元树评价欧式及美元选择权如下:

例:  $S_0 = 100$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\Delta t = 1/12 = 0.083$  年,  $n = 2$ ,  $\lambda = 1.225$ 。

根据上述资料,解答下列问题:

(1) 评价  $K = 100$  的欧式买权。

(2) 评价  $K = 95$  的美式卖权。

答:首先计算相关参数如下:

$$V = \lambda \sigma \sqrt{\Delta t} = 0.0706 \quad \mu = r - \frac{\sigma^2}{2} = 0.03$$

$$p_1 = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} = 0.3508$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0.3336$$

$$p_3 = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} = 0.3156$$

三元树图 3 如下:

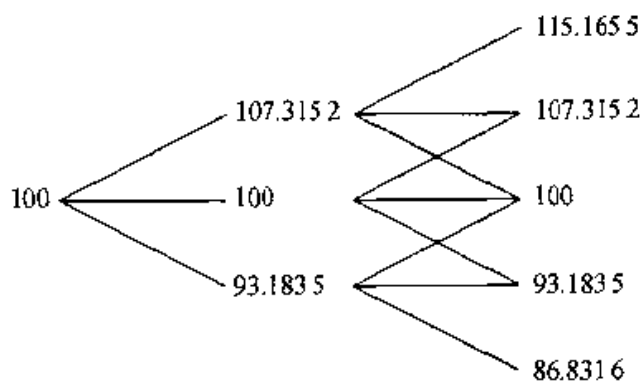


图 3

三元树图上的股价计算如下:

$$S_0 e^v = 100 e^{0.0706} = 107.3152$$

$$S_0 e^{-v} = 100 e^{-0.0706} = 93.1835$$

$$S_0 e^{2v} = 100 e^{2(0.0706)} = 115.1655$$

$$S_0 e^{-2v} = 100 e^{-2(0.0706)} = 86.8316$$

(1) 评价欧式买权 ( $K = 100$ )(见图 4):

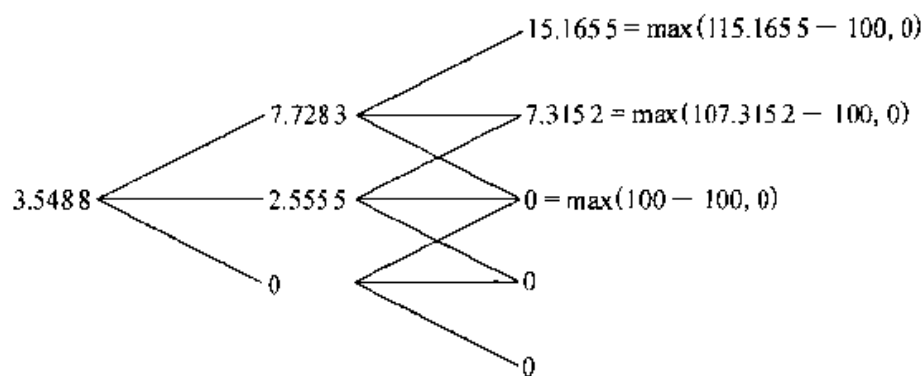


图 4

倒推计算如下:

当  $t = 1$

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 15.1655) + (0.3336 \cdot 7.3152) \\ &\quad + (0.3156 \cdot 0)] \\ &= 7.7283 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,0} &= e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 7.3152) + (0.3336 \cdot 0) \\ &\quad + (0.3156 \cdot 0)] \\ &= 2.5555 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,-1} &= e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 0) + (0.3336 \cdot 0) \\ &\quad + (0.3156 \cdot 0)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

在  $t = 0$ , 该买权的合理价格为:

$$\begin{aligned} C &= e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 7.7283) + (0.3336 \cdot 2.555) \\ &\quad + (0.3156 \cdot 0)] \\ &= 3.5488 \end{aligned}$$

(2) 评价美式卖权 ( $K = 95$ )(见图 5):

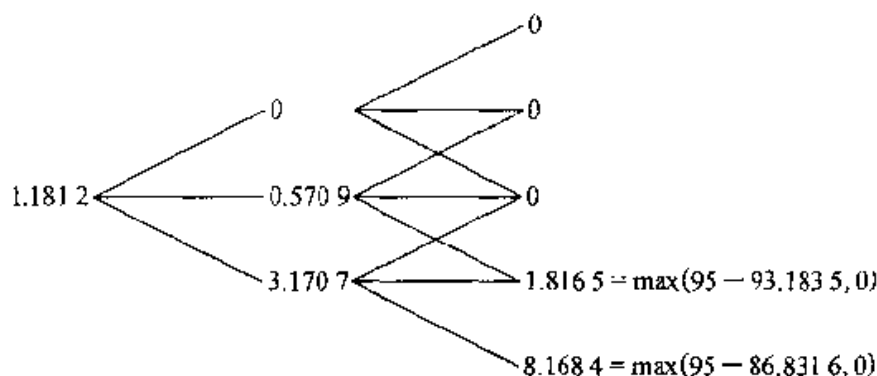


图 5

当  $t = 1$

$$P_{1,1} = e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 0) + (0.3336 \cdot 0) + (0.3156 \cdot 0)] \\ = 0 \text{ (不提前履约, } \because \text{ 执行价格} = \max(95 - 107.3152, 0))$$

$$P_{1,0} = e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 0) + (0.3336 \cdot 0) + (0.3156 \cdot 1.8165)] \\ = 0.5709 > 0 (= \max(95 - 100, 0)) \text{ (不提前履约)}$$

$$P_{1,-1} = e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 0) + (0.3336 \cdot 1.8165) \\ + (0.3156 \cdot 8.1684)] \\ = 3.1707 > 1.817 (= 95 - 93.1835) \text{ (不提前履约)}$$

在  $t = 0$ , 该美式卖权的合理价格为:

$$P = e^{-(0.05)(0.083)} [(0.3508 \cdot 0) + (0.3336 \cdot 0.5709) \\ + (0.3156 \cdot 3.1707)] \\ = 1.1862$$

因都无提前履约, 该美式卖权价值也是等于欧式卖权价值(无提前履约溢价, Early Exercise Premium)。

### 三、界限选择权评价

除了一般欧式及美式选择权外, 三元树评价方法也可应用其他选择权的评价, 诸如界限选择权(Barrier Options)。Ritchken(1995)介绍

如何将三元树评价模型应用于界限选择权的评价,并以下出局买权(A Down-and-Out Call Option)为例。其评价方法如下:参数 $\lambda$ 的选择应能使三元树的某树结(A Tree Node)刚与界限 $B$ (The Barrier)相接触。刚开始,我们可先试选 $\lambda = 1$ ,而后建构三元树,直到某一个时段 $n^*$ ,股价下探至界限 $B$ 之上的最低树结。该时段 $n^*$ 可以下列公式求得

$$n^* = [B^*] \quad (14)$$

此处: 
$$B^* = \frac{\ln(S_0/B)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (15)$$

也就是, $n^*$ 是小于 $B^*$ 的最大整数。例:若 $B^* = 6.2$ ,则 $n^* = [6.2] = 6$ 。若由(15)算出的 $B^*$ 为整数,则 $\lambda$ 仍然维持为1,即 $\lambda = 1$ 。但若 $B^*$ 不是整数,则重设 $\lambda = B^*/n^*$ 。在这种情况下 $1 \leq \lambda < 2$ 。Ritchken(1995)说明,在此范围内的 $\lambda$ ,所建造的三元树一定有一系列(或一层)的树结价格会坐落在界限 $B$ 之上(即触及 $B$ )。也就是,从时段 $n^*$ 之后,三元树股价下探的树结价格定会触及界线 $B$ 。Ritchken(1995)实证证明,用三元树评价下出局买权的答案收敛速度非常快。在此提供部分的结果如表2。

表2 二元树及三元树评价误差比较

	总时段( $n$ )				
	25	50	100	1 000	4 000
三元树	6.006 9	5.994 2	5.997 7	5.997 2	5.996 9
二元树	8.848 6	7.240 5	7.504 5	6.100 2	6.099 8

注:真正答案:5.996 8

此处:参数: $S_0 = 95$ ,  $K = 100$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $T = 1$ 年

$$r = 10\%, B = 90$$

观察上面的结果可知,三元树方法只要 $n = 50$ 就可达到比二元树法( $n = 4 000$ )更准确的答案。

#### 四、双情况变量模型

第二节的三元树模型是在单一情况变量(即单一股价变动)下的评价模型。K&R(1991)将评价理论延伸至双情况变量以及更多情况变量的评价模型。我们在本节中介绍双情况变量的评价模型。

正如(3)式,两个变量的概率分布假设是二元正态分布(Bivariate Normal Distribution)。其对数价格( $\ln S_i, i = 1, 2$ )的动态过程为:

$$d\ln S_i = \mu_i dt + \sigma_i dz_i \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

此处:  $\text{Corr}(dz_1, dz_2) = \rho dt$  ( $\mu_i = (r - \sigma_i^2/2)$ )

在时段 $[t, t + \Delta t]$ , (16)可另表示为:

$$\ln S_i(t + \Delta t) = \ln S_i(t) + z_i(t) \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

该二元正态分布可以多元间断随机变量(Multinomial Discrete Variables)  $\{S_1^*(t), S_2^*(t)\}$  来模拟,并可表示如下:

$S_1^*(t)$	$S_2^*(t)$	概率
$V_1$ (或 $S_{1,0}e^{v_1}$ )	$V_2$ (或 $S_{2,0}e^{v_2}$ )	$p_1$
$V_1$ (或 $S_{1,0}e^{v_1}$ )	$-V_2$ (或 $S_{2,0}e^{-v_2}$ )	$p_2$
$-V_1$ (或 $S_{1,0}e^{-v_1}$ )	$-V_2$ (或 $S_{2,0}e^{-v_2}$ )	$p_3$
$-V_1$ (或 $S_{1,0}e^{-v_1}$ )	$V_2$ (或 $S_{2,0}e^{v_2}$ )	$p_4$
0 (或 $S_{1,0}$ )	0 (或 $S_{2,0}$ )	$p_5$

或另可表示为:

$S_1^*(t)$ 及 $S_2^*(t)$ 的联合概率分布(The Joint pdf)				Marginal $S_2^*(t)$ pdf	
		$S_1^*(t)$			
		$V_1$	$-V_1$	0	
$S_2^*(t)$	$V_2$	$p_1$	$p_4$	0	$p_1 + p_4$
	$-V_2$	$p_2$	$p_3$	0	$p_2 + p_3$
	0	0	0	$p_5$	$p_5$
Marginal $S_1^*(t)$ pdf		$p_1 + p_2$	$p_3 + p_4$	$p_5$	1

此处: 概率分布代表在 $[t, t + \Delta t]$ 有5种不同的跳动情况(The Five-jump Model,  $S_{i,0}$ )分别代表标的1及2的期初股价,  $i = 1, 2$ 。



正如(6),  $V_i = \lambda_i \sigma_i \sqrt{\Delta t}$ ,  $i = 1, 2$ 。当  $\Delta t \rightarrow 0$ , 为使这个模拟概率分布收敛至二元正态分布, 模拟概率分布的第一及第二动差(期望值与方差)应分别等于二元正态分布的第一及第二动差。(与单·一情况变量下的(7)及(8)式的理由相同)。以数学表示如下:

$$\begin{aligned} E(S_1^*(t)) &= V_1(p_1 + p_2) - V_1(p_3 + p_4) \\ &= V_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \mu_1 \Delta t \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E(S_2^*(t)) &= V_2(p_1 + p_4) - V_2(p_2 + p_3) \\ &= V_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4) = \mu_2 \Delta t \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Var(S_1^*(t)) &= E[S_1^*(t) - E(S_1^*(t))]^2 \\ &= [V_1 - V_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)]^2(p_1 + p_2) \\ &\quad + [-V_1 - V_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)]^2(p_3 + p_4) \\ &= V_1^2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \sigma_1^2 \Delta t + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Var(S_2^*(t)) &= E[S_2^*(t) - E(S_2^*(t))]^2 \\ &\quad (\text{简化可获得下一等式}) \\ &= [V_2 - V_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)]^2(p_1 + p_4) \\ &\quad + [-V_2 - V_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)]^2(p_2 + p_3) \\ &= V_2^2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \sigma_2^2 \Delta t + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Cov[S_1^*(t), S_2^*(t)] &= E\{[S_1^* - E(S_1^*(t))][S_2^* - E(S_2^*(t))]\} \\ &= [V_1 - V_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)] \\ &\quad \times [V_2 - V_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)]p_1 \\ &\quad + [-V_1 - V_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)] \\ &\quad \times [-V_2 - V_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)]p_4 \\ &\quad + \cdots + [0 - V_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)] \\ &\quad \times [0 - V_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)]p_5 \\ &= V_1 V_2(p_1 - p_2 + p_3 - p_4) \\ &= \rho \sigma_1 \sigma_2 \Delta t + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (22)$$

$O(\Delta t)$ 可忽略。将  $V_i = \lambda_i \sigma_i \sqrt{\Delta t}$  代入(18)–(22), 并简化可获概率  $p_1$ ,

$p_2$ ,  $p_3$  及  $p_4$  方程式如下:

$$p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 \sigma_1} \sqrt{\Delta t} \quad (23a)$$

$$p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = \frac{\mu_2}{\lambda_2 \sigma_2} \sqrt{\Delta t} \quad (23b)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1/\lambda_1^2 \quad (23c)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1/\lambda_2^2 \quad (23d)$$

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (23e)$$

由(23c)及(23d)得知,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (设定等于  $\lambda$ )。因此, (23c)及(23d)代表只有一个方程式:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \lambda \quad (23f)$$

因由 4 个方程式(23a), (23b), (23f)及(23e)可解出 4 个概率未知数如下:

$$p_1 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{\rho}{\lambda^2} \right\} \quad (24)$$

$$p_2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \frac{\rho}{\lambda^2} \right\} \quad (25)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( -\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{\rho}{\lambda^2} \right\} \quad (26)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( -\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \frac{\rho}{\lambda^2} \right\} \quad (27)$$

$$\therefore p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \quad (28)$$

观察(24)—(28)可知, 只要  $\lambda \geq 1$ , 5 个概率都会大于或等于零 (不会是负概率)。若  $\lambda = 1$ , 则  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ , 且双情况变量模型就会变成 Boyle, Evnine & Gibbs (BEG) 的 4 个跳动 (或变动) 随机过程 (The Four-Jump Process)。

为验证 5 个跳动模型 (The Five-Jump Model) 的准确度, K&R (1991) 利用 5 个跳动模型求解极大资产值的欧式买权 (Call Options

on the  $\text{Max}(S_1, S_2)$ )). 该买权已有封闭解(详见本书相关章节的介绍)。因此,可以观察 5 个跳动模型的准确性。为让读者更进一步了解,K&R 的部分实证结果报告如表 3。

表 3 5 个跳动模型对封闭解的误差

履约价 $K$	$\lambda$	$\rho_s$	总时段( $n$ )		
			10	30	70
35	1.414 21	0.500	0.085	0.015	0.006
	1.118 03	0.200	0.018	0.005	0.002
	1.000	0.000	0.020	-0.002	0.000
40	1.414 2	0.500	0.078	0.025	0.011
	1.118 03	0.200	0.026	0.009	0.004
	1.000	0.000	0.087	0.030	0.013

注: $S_{1,0} = S_{2,0} = 40$ ,  $\sigma_1 = 20\%$ ,  $\sigma_2 = 30\%$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $r = 4.879\%$ ,  $T = 7$  个月。

表 2 证明,K&R 5 个跳动模型的误差很小,特别是当  $n$  是 70,而且答案收敛速度也快。(至于履约价  $K = 45$  的实证结果也与上表相似)。

对于较复杂的  $K$  个情况变量( $K \geq 3$ )模型,K&R(1991)也有推导,有兴趣的读者,可参阅该论文。

## 参 考 文 献

- P. Boyle, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35,1(1988),p. 1—12.
- P. Boyle, J. Evnine and S. Gibbs, "Valuation of Options on Several Underlying Assets", *Review of Financial Studies*, 2(1989),p. 241—250.
- P. Boyle, and S. H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method", *Journal of Derivatives*, 1,4(1994),p. 6—14.
- R. Heynen, and H. Kat, "Crossing Barriers", *Risk Magazine*, 7,6 (June 1994), p. 192—195.
- J. Hull, and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite

- Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23,3 (1990), p. 237—252.
- E. Kamrad, and P. Ritchken, "Multinomial Approximating Models for Options with K-State Variables", *Management Science*, 37, 12 (1991), p. 1 640—1 652.
- D. Madan, F. Milne and H. Shefrin, "The Multinomial Option Pricing Model and its Limitations", *Review of Financial Studies*, 2(1989), p. 251—265.
- A. Pelsser, and T. Vorst, "The Binomial Model and the Greeks", *Journal of Derivatives*, Spring 1994, p. 45—49.
- P. Ritchken, "On Pricing Barrier Options", *Journal of Derivatives*, Vol. 3 (1995).
- R. M. Stulz, "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications", *J. Financial Economics*, 10 (July 1982).

## 第三十章 利率衍生性商品：单因子模型

### 一、简介

一般利率模型,诸如 CIR (Cox, Ingersoll and Ross, 1985), Vasicek (1977), Brennan & Schwartz (1979, BS), Courtadon (1982), Longstaff (1982)等等,都有下列的缺点:

1. 无法准确描述(Cannot Fit)现行利率期间结构(The Current Term Structure of Interest Rates)。

2. 无法准确描述利率(或债券价格)的波动度期间结构(The Term Structure of Volatility)。

3. 无法准确评价上限率买权(Caps)、下限率卖权(Floors)及交换选择权(Swaptions)。也就是模型价格(The Model Prices)无法与利率选择权(Caps, Floors 及 Swaptions)的市场价格一致(即由模型计算出来的价格不准确,与市场价格不同)。

Ho 及 Lee(1986)采用新的方法,使他们的利率模型可以描述任何特种型式的利率期结构。之后,相继有 BDT (Black, Derman and Toy (1990)), Milne and Turnbull (1989),以及 HJM (Heath, Jarrow 及 Morton(1987))的多因子利率模型的改进,并能够准确描述现行利率期间结构(The Current Term Structure of Interest Rates)。但因模型较复杂,需要更多的计算时间(尤其是 HJM 方法)。

此外,实务界经常采用不同的利率模型来评价利率衍生性商品,举例如下:

1. 一般假设远期利率是对数正态分布,并假设远期利率的波动度是时间的递减函数。而后采用 Black(1976)的期货买权评价模型  $C = e^{-rT} [FN(d_1) - KN(d_2)]$  来评价利率买权(Caps)。

2. 当评价欧式债券选择权及利率交换选择权时,另外假设债券远期价格是对数正态分布,而后以 Black(1976)模型评价。

以上两例的前后假设不一致,以致远期利率的模型波动度及债券远期价格的模型波动度无法作一致性的比较。因此,无法决定不同利率衍生性商品波动度的综合风险(Aggregate Exposures),比如:利率买权的波动度风险是否可以抵消交换选择权的波动度风险。在风险控管方面形成难以估计的情况。

Hull 及 White(1990)建议一种较概化的利率模型,它不但能准确描述现行的利率期间结构与波动度期间结构,其模型价格也能与利率衍生性商品(Caps, Floors 及 Swaptions)的市场价格一致(即由模型计算出的价格与市场价格一致,准确)。因此,在本章中,我们将介绍 Hull-White 的利率模型及利率选择权评价模型。但仅限于单因子利率模型(A One-Factor Interest Rate Model)。对于两个因子利率模型,我们将另辟专章介绍。

## 二、单因子利率模型

一般平均反转模型(The Mean-Reversion Model)可表示为:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma^2 dZ \quad (1)$$

此处:  $dr$  = 利率的瞬间变动,  $r$  代表瞬间利率,或称短期利率(The Short Rate)

$a$  = 利率反转速度(Mean-Reversion Speed),或反转力道

$b$  = 利率的长期水准

$\sigma^2$  = 利率变动的瞬间标准差(每单位时间  $dt$ ),或  $Var(dr) = \sigma^2 r^{2\beta} dt$

$\beta =$  正值常数

$dZ =$  标准布朗运动的变量,  $Z \sim N(0, dt)$

对(1)式中的参数做不同的假设值,就可产生不同的利率模型,例如:

1. CIR 利率模型:令  $\beta = \frac{1}{2}$

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dZ \quad (2a)$$

当  $\beta = \frac{1}{2}$ , 在某些情况下模型利率会等于零,且不能准确描述利率期间结构。但对债券及利率选择权则会有封闭解的评价模型。

2. Vasicek(1977)利率模型:令  $\beta = 0$

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dZ \quad (2b)$$

当  $\beta = 0$  时,在某些情况下,模型利率会变成负值,与实务不符,且也无法准确描述利率期间结构。

3. Ho-Lee(1986)利率模型:令  $b = 0, \beta = 0$

$$dr = a dt + \sigma dZ \quad (2c)$$

Ho-Lee 模型对利率期间结构比较有满意的描述,但因无利率平均反转项,利率可能会变成负值。

Hull-White(1990)建议采用较一般式(或概化)的利率模型如下:

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b-r)]dt + \sigma(t)r^{\beta}dZ \quad (3)$$

此处:(3)式内的漂浮项(The Drift)多增加一项  $\theta(t)$ ,它是时间的函数。其实(3)式也是平均反转模型的一种,将(3)改写成为:

$$dr = a(t)[b'(t) - r]dt + \sigma(t)r^{\beta}dZ \quad (4)$$

此处:  $b'(t) = \frac{\theta(t)}{a(t)} + b$

所以,  $b'(t)$  代表随时间变动的利率长期水平,  $a(t)$  代表利率反转速度,也会随着时间变动(增强或变弱)。因(3)或(4)的参数自由度增加,故对描述现行利率期间结构及利率波动度期间结构的能力强,可准确描

述这些期间结构。且也能更准确评价利率衍生性商品。此外,由(3)及(4)也可产生前述各种利率模型的延伸型,并成为 Hull-White 模型的特别模型(Special Cases)。例如:

1. 延伸型的 CIR 模型:

$$dr = a(t)[b'(t) - r]dt + \sigma(t)\sqrt{r}dZ \quad (5a)$$

(请与(2a)比较。)

2. 延伸型的 Vasicek 模型:

$$dr = a(t)[b'(t) - r]dt + \sigma(t)dZ \quad (5b)$$

(请与(2b)比较。)

3. 延伸型的 Ho-Lee 模型:

$$dr = a(t)dt - \sigma(t)dZ \quad (5c)$$

(请与(2c)比较。)

4. Black-Derman-Toy(BDT)模型:

$$d\ln r = [\theta(t) - \frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t} \ln r]dt + \sigma(t)dZ \quad (5d)$$

此处:以  $\ln r$  代替  $r$ ,  $\frac{\partial \ln \sigma(t)}{\partial t} = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ ,  $\sigma'(t) = \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$

由上面几个延伸型特例可知,Hull-White 利率模型是相当概化的模型,它包括许多单因子利率模型,这些模型都是 Hull-White 的特别模型。

### 三、折价债券评价

在本节中,我们将采用 Hull-White(3)或(4)式做基础推导折价债券(Pure Discount Bond)的评价模型。至于付息债券的评价可采用 Jamshidian(1989)方法,我们将会在第 10 章介绍。

令  $f(r, t)$  为任何条件求偿证券(Contingent Claims)在时间  $t$  的价



值。根据 CIR 的论文,求偿证券  $f(r, t)$  必须满足下列微分方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \mu_r - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sigma_r(t)^2 = rf + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial r} \sigma_r(t) \quad (6)$$

此处:(6)的左边其实是  $df$  的漂浮项(利用 Itô Lemma),也是等于瞬间期望报酬率。它等于无风险报酬  $rf$  加上风险溢酬  $\lambda(t) \frac{\partial f}{\partial r} \sigma_r(t)$

$\frac{\partial f}{\partial r} \sigma_r(t)$  代表  $df$  的波动度(它是  $df$  内的扩散项系数)

$\lambda(t)$  = 风险的市场价格(Market Price of Risk) 即风险溢酬

$\mu_r = \theta(t) + a(t)(b-r)$  (是(3)的漂浮项)

$\sigma_r(t) = \sigma(t)r^\beta$  (是(3)的扩散项(Diffusion Term))

将(3)式的漂浮项  $\mu_r$  及扩散项  $\sigma_r(t)$  代入(6)重新整理即可获得

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [\phi(t) - a(t)r] \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sigma(t)^2 r^{2\beta} - rf = 0 \quad (7)$$

此处:  $\phi(t) = \theta(t) + a(t)b - \lambda(t)\sigma(t)r^\beta$

因(7)式微分方程式是概化模型(4)下的 pde。为简单计,我们令  $\beta = 0$ , 则(7)成为延伸型的 Vasicek 模型下的 pde 如下:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [\phi(t) - a(t)r] \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sigma^2(t) - rf = 0 \quad (8)$$

此处:  $\phi(t) = \theta(t) + a(t)b - \lambda(t)\sigma(t)$

根据(8)我们将求解折价债券的评价模型。以  $P(t, T)$  代表时间  $t$  折价债券的价值,其到期日为  $T$ 。到期价值为  $P(T, T) = 1$ , 到期支付一元。根据(8)及到期条件  $P(T, T) = 1$ , 我们求解  $P(t, T)$ 。因无法由(8)直接求解,我们先以财务经济概念猜解  $P(t, T)$  的答案为

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (9)$$

CIR 也以(9)式做求解。但我们必须求解适当的  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$ , 能使(9)式的  $P(t, T)$  满足(8)式的 pde。为求解(9)式内的  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$ , 首先计算  $P(t, T)$  的偏微分如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= -B(t, T)P, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B(t, T)^2 P \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= A(t, T) \left[ e^{-B(t, T)r} \frac{\partial B}{\partial t} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} e^{-B(t, T)r} \\ &= P \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

将上面 3 项偏微分代入(8)并整理:

$$\begin{aligned}(8) \text{ 式左边} &= P \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} \right) - [\phi(t) - a(t)r]B(t, T)P \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2(t)B(t, T)^2 P - rP \\ &= -Pr \left[ \frac{\partial B}{\partial t} - a(t)B + 1 \right] \\ &\quad + \frac{P}{A} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} - \phi(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2(t)AB^2 \right]\end{aligned}$$

(8)式会等于零的条件是,中括号的两项等于零,亦即  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$  必须满足下列两条件:

$$\frac{\partial B}{\partial t} - a(t)B + 1 = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \phi(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2(t)AB^2 = 0 \quad (10b)$$

$$\text{以及 } A(T, T) = 1, B(T, T) = 0 \Rightarrow P(T, T) = 1 \quad (10c)$$

因此,只要  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$  满足(10a)、(10b)及(10c),则折现债券  $P(t, T)$  的评价公式就是(9)式,并满足 pde(8)式。

在(9)式中,若令  $a(t)$ ,  $\theta(t)$  及  $\sigma(t)$  为固定常数,则(9)成为 Vasicek 的折价债券评价模如下:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r} \quad (11a)$$

此处:

$$B(t, T) = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \quad (11b)$$

$$A(t, T) = \exp \left[ \frac{(B(t, T) - T + t) \left( a\phi - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right] \quad (11c)$$

因(9)式所代表的债券评价是延伸型 Vasicek 模型,我们必须进一步探讨如何根据(10a)及(10b)求解  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$ 。这是我们下步的工作。

求解  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$

因  $A(0, T)$  及  $B(0, T)$  可由现行的利率期间结构估计(后文会详细交代),我们首先假设两者已知,而后利用  $A(0, T)$  及  $B(0, T)$  来计算  $A(t, T)$  及  $B(t, T)$ 。进行如下:

对(10a)的  $T$  偏微分,即  $\frac{\partial}{\partial T}[10a]$ , 获得

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} - a(t) \frac{\partial B}{\partial T} = 0 \quad (12a)$$

对(10b)的  $T$  偏微分,即  $\frac{\partial}{\partial T}[10b]$ , 获得

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial T} - \phi(t) \left[ B \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\partial B}{\partial T} \cdot A \right] + \frac{1}{2} \sigma(t)^2 \left[ B^2 \frac{\partial A}{\partial T} + 2AB \frac{\partial B}{\partial T} \right] = 0 \quad (12b)$$

再将(10a)的  $a(t) = \frac{\left( \frac{\partial B}{\partial t} + 1 \right)}{B}$  代入(12a),并整理得

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} - \frac{1}{B} \left( \frac{\partial B}{\partial t} + 1 \right) \frac{\partial B}{\partial T} = 0$$

$$\text{亦即} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial T} \right) - B \left( \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} \right) + \frac{\partial B}{\partial T} = 0 \quad (13a)$$

由(10b)求解:  $\phi(t) = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma(t)^2 AB^2 \right]$ , 再将  $\phi(t)$  代入(12b):

$$0 = \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial T} - \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) AB^2 \right] \left[ \frac{\partial A}{\partial T} A + A \frac{\partial B}{\partial T} \right] \\ + \frac{1}{2} \sigma(t)^2 \left[ \frac{\partial A}{\partial T} B^2 + 2AB \frac{\partial B}{\partial T} \right]$$

并整理即得

$$0 = AB \left( \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial T} \right) - \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right) B - A \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial T} \right) \\ + \frac{1}{2} [\sigma(t) AB]^2 \frac{\partial B}{\partial T} \quad (13b)$$

根据(13a)与(13b)以及临界条件  $A(T, T) = 1$  与  $B(T, T) = 0$ , 求解  $B(t, T)$  及  $A(t, T)$ 。Hull-White 利用猜解方式获得答案如下:

$$B(t, T) = \frac{B(0, T) - B(0, t)}{\frac{\partial B(0, t)}{\partial t}} \quad (14a)$$

$$\hat{A}(t, T) = \hat{A}(0, T) - \hat{A}(0, t) - B(t, T) \frac{\partial \hat{A}(0, t)}{\partial t} \\ - \frac{1}{2} \left[ B(t, T) \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right]^2 \int_0^t \left[ \frac{\sigma(\tau)}{\frac{\partial B(0, \tau)}{\partial \tau}} \right]^2 d\tau \quad (14b)$$

此处:  $\hat{A}(t, T) = \ln A(t, T)$ 。因此,  $B(t, T)$  及  $A(t, T)$  可由已知的  $A(0, t)$ ,  $A(0, T)$ ,  $B(0, t)$  及  $B(0, T)$  等资料, 再根据(14a)及(14b)计算  $B(t, T)$  及  $\hat{A}(t, T)$ 。为证明(14a)及(14b)是正确答案, 我们在此提供证明(14a)的  $B(t, T)$  可满足(13a)的 pde。

**证明** 首先求解  $\frac{\partial B}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial T}$  及  $\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T}$ :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{B(0, T) - B(0, t)}{\frac{\partial B(0, t)}{\partial t}} \right] \\ = \left( \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right)^{-2} \left[ - \left( \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right)^2 - (B(0, T) \right. \\ \left. - B(0, t)) \left( \frac{\partial^2 B(0, t)}{\partial t^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \left( \text{利用 } \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \right) \\ = \frac{1}{B(0, t)_t^2} [-B(0, t)_t^2 - (B(0, T))B(0, t)_{tt}] \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\text{此处: } B(0, t)_t = \frac{\partial B(0, t)}{\partial t}, \quad B(0, t)_{tt} = \frac{\partial^2 B(0, t)}{\partial t^2}$$

$$B_{\tau\tau} = \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) = \frac{1}{B(0, t)_t^2} [-B(0, T)_T B(0, t)_{tt}] \quad (15b)$$

$$\text{此处: } B(0, T)_T = \frac{\partial B(0, T)}{\partial T} \approx \frac{B(0, T + \Delta T) - B(0, T)}{\Delta T}$$

$$B_{\tau} = \frac{\partial B}{\partial T} = \frac{\frac{\partial B(0, T)}{\partial T}}{\frac{\partial B(0, t)}{\partial t}} = \frac{B(0, T)_T}{B(0, t)_t} \quad (15c)$$

将(15a)、(15b)及(15c)的三项偏微分代入(13a)检验是否等于零：  
代入(13a)后，并整理确实证明

$$B_t B_{\tau} - B \cdot B_{\tau\tau} + B_{\tau} = 0 \text{ (各项相抵消掉)。}$$

因此，(14a)的  $B(t, T)$  是正确答案。对(14b)内的  $A(t, T)$  验证也是先从(14b)求出各项偏微分  $A_t$ ,  $A_{\tau}$ ,  $A_{\tau\tau}$  及  $B_{\tau}$ ，并代入(13b)，即可证明它等于零。因很繁杂，在此省略。

最后根据(12a)及(12b)分别求算  $a(t)$  及  $\phi(t)$  如下：

由(12a)解出  $a(t)$ ，并令  $t = T$ ：

$$a(t) = \frac{\left( \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right)}{\left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)} = - \frac{\frac{\partial^2 B(0, t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial B(0, t)}{\partial t}} \quad (16a)$$

$$\text{此处: } \frac{\partial^2 B(0, t)}{\partial t^2} \approx \frac{B(0, t) - 2B(0, t + \Delta t) + B(0, t + 2\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

此外，由(12b)求算  $\phi(t)$  如下：

$$\phi(t) = -a(t) \frac{\partial \hat{A}(0, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{A}(0, t)}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left[ \frac{\sigma(\tau)}{\frac{\partial B(0, \tau)}{\partial \tau}} \right] d\tau \quad (16b)$$

一旦  $a(t)$  及  $\phi(t)$  可由 (15a) 及 (15b) 求出后, 延伸型 Vasicek 模型的 pde (8) 式就能由已知的参数决定。

#### 四、债券选择权的评价

在第二节, 我们已介绍延伸型 Vasicek 模型 (是 Hull-White 的一种特殊模型), 可表示为

$$dr = \mu_r(t)dt + \sigma_r(t)dZ \quad (17)$$

此处:  $\mu_r(t) = \theta(t) + a(t)(b - r)$

$$\sigma_r(t) = \sigma(t) \quad (\beta = 0)$$

(17) 说明: 短期利率 (Short Rate) 的变动呈现正态分布。Short Rate 代表瞬间利率。在实务上, 可以流动性高的隔夜拆款利率、一月期或三月期利率替代之。为评价折价债券选择权, 我们必须先知道折价债券价格  $P(t, T)$  的变动随机过程。利用 Itô Lemma 即可求得。

根据前一节  $P(t, T)$  的各项偏微分  $\frac{\partial P}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial r}$  及  $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$  代入 Itô Lemma:

$$\begin{aligned} dP &= \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} \mu_r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_r^2(t) \right) dt + \frac{\partial P}{\partial r} \sigma_r(t) dZ \\ &= \left[ P \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} \right) - B(t, T) P \mu_r + \frac{1}{2} B(t, T)^2 P \sigma^2(t) \right] dt \\ &\quad - B(t, T) P \sigma(t) dZ \\ \therefore \frac{dP}{P} &= \mu_p(t) dt + V(t, T) dZ \end{aligned} \quad (18)$$

此处:  $\mu_p(t) = \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} - B(t, T) \mu_r + \frac{1}{2} B(t, T)^2 \sigma^2(t) \right)$

$$V(t, T) = B(t, T)\sigma(t) \quad (-dZ = dZ, \text{概率分布相同})$$

(18)式的意义如下：因为利率变动呈现正态分布，因此  $d\ln P(t, T)$  也会呈现正态分布（由 Itô Lemma 可求证），亦即债券价格是对数正态分布，标准差为  $V(t, T)$ 。若假设现在的时点为零（期初为零）， $t$  代表某折价债券买权的到期日（ $t < T$ ），则  $P(t, T)$  代表折价债券的远期价格（在期初评估债券未来  $t$  点的价格）。债券远期价格  $P(t, T)$  可进一步表示为：

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)}$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{dP}{P}\right) &= \text{Var}(d\ln P) = \text{Var}(\ln P(0, T) - \ln P(0, t)) \\ &= \text{Var}(\ln P(0, T)) + \text{Var}(\ln P(0, t)) - 2\rho V(0, t)V(0, T) \\ &= V^2(0, T) + V^2(0, t) - 2\rho V(0, t)V(0, T) \\ &= [V(0, T) - V(0, t)]^2 \\ &\quad (\rho = 1 \text{ (因是单因子模型)}) \end{aligned} \quad (19)$$

从期初至时点  $t$  债券远期价格的总风险可表示为：

$$V_p^2(t, T) = \int_0^t [V(\tau, T) - V(\tau, t)]^2 d\tau \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} &\left( \text{远期价格变动百分比的总风险或方差 } \text{Var}\left(\frac{dP}{P}\right) \right) \\ &= \int_0^t \sigma(\tau) [B(\tau, T) - B(\tau, t)]^2 d\tau \end{aligned} \quad (20b)$$

因  $P(t, T)$  是对数正态分布，且它代表远期价格，故我们可采用 Black (1976) 商品期货选择权的评价模型来评价折现债券选择权。因此，折价债券买权的评价公式为

$$C = P(0, t)[P(t, T)N(d_1) - KN(d_2)] \quad (21a)$$

或

$$= P(0, T)N(d_1) - KP(0, t)N(d_2) \quad (21b)$$

此处:  $d_1 = \frac{\ln(P(t, T)/K) + V_p^2(t, T)/2}{V_p(t, T)}$

$$d_2 = d_1 - V(t, T)$$

$$P(t, T) = P(0, T)/P(0, t)$$

$P(0, t)$  = 折价债券的现在价格

$K$  = 履约价,  $t$  = 买权到期日

买权评价模型(21a)或(21b)内的  $P(0, t)$ ,  $P(0, T)$ 及  $P(t, T)$ 与  $V_p^2(t, T)$ 内的  $B(\tau, T)$ 及  $B(\tau, t)$ 可根据前一节所介绍的  $B(0, t)$ ,  $B(0, T)$ 及  $B(t, T)$ 求解方法计算。在下一节中,我们将会详细介绍之。

折价债券卖权的评价模型可由(21a)转换正负符获得:

$$P = P(0, t)[KN(-d_2) - P(t, T)N(-d_1)] \quad (22a)$$

或

$$= KP(0, t)N(-d_2) - P(0, T)N(-d_1) \quad (22b)$$

( $t$  为卖权到期日)

## 五、利用利率期间结构估计参数:

### $B(0, T)$ 及 $A(0, T)$

在最后一节中,我们将介绍如何利用现行利率期间结构(Current Term Structure of Interest Rates)估计  $B(0, t)$ ,  $B(0, T)$ ,  $A(0, t)$ 及  $A(0, T)$ 。

根据殖利率(Yield to Maturity)的定义:

$$R'(t, T) = {}^{T-t}\sqrt{1/P(t, T)} - 1$$

所以连续(复利)殖利率为

$$R(t, T) = \ln[1 + R'(t, T)] = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} \quad (23)$$

再根据债券价格评价模型(11a),  $R(t, T)$ 也可表示为



$$R(t, T) = \frac{\ln A(t, T) - rB(t, T)}{T - t} \quad (24)$$

利用 Itô Lemma, 我们可求出连续殖利率  $R(t, T)$  的波动度(标准差):  $R(t, T)$  变动随机过程内的随机项(即布朗运动项)可表示为

$$\frac{\partial R}{\partial r} \sigma(t) dZ = \frac{B(t, T)}{T - t} \sigma(t) dZ \quad \left( \because \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{-B(t, T)}{T - t} \right)$$

因此, 殖利率的波动度为:

$$\sigma_R(t, T) = \sqrt{\text{Var}(dR)} = \frac{B(t, T)}{T - t} \sigma(t) \quad (25)$$

由(25)解出:

$$B(t, T) = \frac{(T - t)\sigma_R(t, T)}{\sigma(t)} \quad (26)$$

令  $t = 0$ , 则

$$B(0, T) = \frac{T\sigma_R(0, T)}{\sigma(0)} \quad (27)$$

因  $\sigma(0)$  是很短期利率的波动度(即在评价时点, 高流动性隔夜拆款率、一个月期或三个月期利率的波动度)以及在评价时点殖利率的波动度  $\sigma_R(0, T)$  都可根据利率期间结构求得, 而后再由(27)求算  $B(0, T)$ 。最后利用(14a)求算  $B(t, T)$ , 其中的偏微分项可以下列公式估计:

$$\frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \approx \frac{B(0, t + \Delta t) - B(0, t)}{\Delta t} \quad (\Delta t \text{ 愈小, 愈准确})$$

$B(0, t)$  也根据(27)求得。

再次,  $A(0, T)$  可利用债券价格公式求解如下:

$$P(0, T) = A(0, T)e^{-B(0, T)r} \quad (28)$$

此处:  $P(0, T)$  可根据现行的利率期间结构求之, 或利用它的市场价格替代之。则(28)内的  $A(0, T)$  就可迎刃而解:

$$A(0, T) = P(0, T)e^{B(0, T)r}$$

最后, 利用  $B(0, T)$  及  $A(0, T)$  求解(14.1)及(14.2)的  $B(t, T)$

及  $A(t, T)$ , 则债券价格(11a)也自然可求得。债券买权及卖权也可分别由(21a)及(22a)解出。

因此, 根据 Hull-White 利率模型(3)或延伸型 Vasicek 模型(5b)允许利率变动可反转回归某一(长期)水准, 我们可达成下列事项:

1. 可利用(11a)准确地评价折价债券。

2. 利用(21a)及(22a)可准确评价债券买权及卖权。

3. 可利用(25)来求算殖利率的未来波动度  $\sigma_R(t, T)$ , 以及可准确描述利率波动度  $\sigma(t)$  的任何期间结构。

## 参 考 文 献

- F. Black, 1976, "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, p. 167—179.
- F. Black, and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, p. 637—659.
- F. Black, E. Derman and W. Toy, 1990, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Jan-Feb, p. 33—39.
- M. J. Brennan, and E. S. Schwartz, 1979, "A Continuous Time Approach to The Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, p. 133—155.
- M. J. Brennan, and E. S. Schwartz, 1982, "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, p. 301—329.
- G. Courtadon, 1982, "The Pricing of Options on Default-Free Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, p. 75—100.
- J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1985a, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53, p. 363—384.
- J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1985b, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, p. 353—467.
- D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, 1992, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Evaluation", *Econometrica*, Vol. 60.

- T. S. Y. Ho, and S. B. Lee, 1986, "Term Structure Movements and Pricing of Interest Rate Claims", *Journal of Finance*, 41, p. 1 011—1 029.
- J. Hull, and A. White, 1990, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, p. 87—100.
- \_\_\_\_ and \_\_\_\_\_, 1990, "Pricing Interest-Rate Derivatives", *The Review of Financial Studies*, Vol. No. 4, p. 573—592.
- F. Jamshidian, 1988, "The One-Factor Gaussian Interest Rate Model: Theory and Implementation", working paper, Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, New York.
- F. Jamshidian, 1989, "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, 44, p. 205—209.
- F. A. Longstaff, 1989, "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 23, p. 195—224.
- R. C. Merton, 1973, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, p. 141—183.
- O. A. Vasicek, 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, p. 177—188.

## 第三十一章 双因子利率衍生性商品模型

### 一、简介

在前一章我们介绍 Hull-White(1990)单因子利率模型。它能描述现行利率期间结构,以及一般结构的波动度。此外,对上限率买权(Caps)、下限率卖权(Floors)以及交换选择权(Swaptions)的评价也能与这些衍生性商品的市场价格一致。它的实证结果更优于先前的一些利率模型,诸如 CIR, BS, Courtadon (1982), Hongstaff (1982), Ho-Lee, BDT 等等(详见前一章)。虽然 Hull-White 的单一因子利率模型具有良好的表现,但对一些比较复杂性的波动度期间结构,诸如驼峰状(Humped Shape)的远期利率波动度结构,以及 S 形肠状(Sigmoid Shape)的远期利率相关系数结构,单因子模型仍无法到达满意的实证效果。因此,Hull-White(1994b)再度建议采用双因子利率模型(Two-Factor Model)来解决驼峰或 S 形肠状的结构问题。在本章中,我们将会详细介绍他们的理论模型。至于理论的实证应用,读者可参见 Hull-White(1994b)。

### 二、双因子利率模型

在本节中,我们介绍如何采用双因子利率模型来描述利率期间结构。双因子利率模型可表示如下:

$$dr = [\theta(t) + u(t) - ar]dt + \sigma_1 dz_1 \quad (1)$$

此外,漂浮参数  $u(t)$  随时间而呈现随机变动,且期初值为零 [ $u(0) = 0$ ]。其随机变动过程可表示为:

$$du = -budt + \sigma_2 dz_2 \quad (2)$$

此处:  $Cov(dz_1, dz_2) = \rho dt$ ,  $\rho$  是  $z_1$  及  $z_2$  的相关系数。

(1)及(2)组合成为双因子利率模型,两者共同决定单一的利率期间结构。为能清楚了解(1)及(2)的意义,(1)及(2)重新改写为:

$$dr = [\theta(t) + a(u^*(t) - r)]dt + \sigma_1 dz_1 \quad (3)$$

$$du^* = b(0 - u^*)dt + \sigma_2 dz_2 \quad (4)$$

此处:  $u^*(t) = u(t)/a$

(3)式像似原来 Hull-White(1990)的单因子利率模型(详见前一章的(3)式),但在此处  $u^*(t)$  是随时间变动,因为多加入第二个因子  $u(t)$ ,使利率模型更具有自由度及弹性。双因子利率模型更能满意地描述较复杂性的利率期间结构及远期利率波动度与相关系数结构。(1)式说明,短期利率(The Short Rate)的长期变动会趋向它的长期水准  $u^*(t)$ ,且利率的反转速度是  $a$ (固定)。但它的长期水准  $u^*(t)$  也会随机变动,以零为  $u^*(t)$  的长期水准,反转速度为  $b$ 。因此,(1)加上(2)形成双因子利率模型的自由度,更具有弹性,当然它更能有效描述不同复杂形状的利率期间结构以及远期利率波动度与相关系数的结构。

注:(4)内的零长期水准也可经转换成为一非零的常数。(1)及(2)

也可称为双因子延伸型的 Vasicek 模型(The Two-Factor Extended Vasicek Model)。其中第二因子  $u$  也可代表生产的不确定(Production Uncertainty)。

在双因子利率模型[(1)+(2)]之下,我们可推导出折价债券  $f(r, t)$  (A Pure Discount Bond)的偏微分方程式 pde,表示如下(详见附录一的推导):

$$f_t + (\theta(t) + u - ar)f_r - bnf_u + \frac{1}{2}\sigma_1^2 f_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 f_{uu} +$$

$$\rho\sigma_1\sigma_2 f_{ru} - rf = 0 \quad (5)$$

此处:  $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ ,  $f_{ru} = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial u}$ , 其他偏微分意义可类推。

令折价债券在时间  $t$  的价格为  $P(t, T)$ ,  $T$  为到期日。其临界条件(The Boundary Conditions)为  $P(T, T) = 1$ 。正如前一章, 我们无法直接由(5)及临界条件  $P(T, T) = 1$  求解  $P(t, T)$ , 只能利用猜解  $P(t, T)$  的答案为:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r - C(t, T)u} \quad (6)$$

此处:  $A(T, T) = 1$ ,  $B(T, T) = 0 = C(T, T) \Rightarrow P(T, T) = 1$

此外, 因是双因子模型, 因此(6)式内的折现因子多出第二因子  $u$  的项目  $C(t, T)r$ 。但(6)式内的  $A(t, T)$ ,  $B(t, T)$  及  $C(t, T)$  必须满足下列条件:

$$B_t - aB + 1 = 0 \quad (7a)$$

$$C_t - bC + B = 0 \quad (7b)$$

$$A_t - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma_1^2 AB^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 AC^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 ABC = 0 \quad (7c)$$

此处:  $B_t = \partial B / \partial t$ ,  $C_t = \partial C / \partial t$

(7a)、(7b)及(7c)的来源是, 将(6)的偏微分  $P_r$ ,  $P_{rr}$ ,  $f_u$ ,  $P_{uu}$  及  $P_t$  代入(5)后, 当(7a)、(7b)及(7c)成立时, (5)式才会等于零(即满足(5))。Hull-White (1994b) 找出能满足条件(7a)、(7b)及(7c)的  $B(t, T)$  及  $C(t, T)$  如下:

$$B(t, T) = (1 - e^{a(T, t)})/a \quad (8)$$

$$C(t, T) = \frac{e^{-a(T, t)}}{a(a-b)} - \frac{e^{-b(T-t)}}{b(a-b)} + \frac{1}{ab} \quad (9)$$

$A(t, T)$  是相当复杂, 但可表示如下:

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, t) - \eta \quad (10)$$

此处:  $F(t, T)$  代表, 在时点零观察, 从未来  $t$  时起的瞬间远期利率,  $\eta$

太复杂,不列报于此,详见附录二。

### $B(t, T)$ 及 $C(t, T)$ 的经济意义

在折价债券评价公式(6)内的 $B(t, T)$ 及 $C(t, T)$ 含有特别的金融经济意义。我们介绍如下:

1.  $B(t, T)$ 是折价债券对利率变动的敏感度(或称存续时间, The Duration)。证明如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= -B(t, T)P(t, T) \\ &= \text{每 } 1\% \text{ 利率变动造成债券价格变动的金额} \\ \therefore \frac{\partial P / \partial r}{P} &= -B(t, T)\end{aligned}\quad (11)$$

$\therefore B(t, T)$ 代表折价债券对利率变动的敏感度 $\left(\frac{\partial P / \partial r}{P}\right)$ , 负值代表当利率上升(或下降)1%, 债券价格下降(或上升)的百分比等于 $B(t, T)$ 。债券价格变动与利率升降呈现相反关系(即负关系)。

2.  $C(t, T)$ 是折价债券对第二因子 $u$ 变动的敏感度。证明如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial u} &= -C(t, T)P(t, T) \\ \therefore \frac{\partial P / \partial u}{P} &= -C(t, T), \text{其解释与 } -B(t, T) \text{ 相似。}\end{aligned}\quad (12)$$

## 三、殖利率及远期利率动态过程

利用折价债券评价公式(6), 我们可推导理论, 并描述殖利率及远期利率的动态过程。我们介绍如下:

### 一、殖利率动态过程

殖利率可表示为

$$y_r = -\ln P(0, T)/T$$

$$= [-\ln A(0, T) + B(0, T)r + C(0, T)u]/T \quad (13)$$

$$\therefore \frac{\partial y_T}{\partial r} = B(0, T)/T, \quad \frac{\partial y_T}{\partial u} = C(0, T)/T$$

$$\frac{\partial y_T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 y_T}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y_T}{\partial u^2} = 0 = \frac{\partial^2 y_T}{\partial u \partial r}$$

将以上偏微分代入双因子的 Itô Lemma 如下:

$$\begin{aligned} dy_T &= \left( \frac{\partial y_T}{\partial t} + \frac{\partial y_T}{\partial r} \mu_r + \frac{\partial y_T}{\partial u} \mu_u - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_T}{\partial r^2} \sigma_r^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_T}{\partial u^2} \sigma_u^2 + \frac{\partial^2 y_T}{\partial r \partial u} \rho \sigma_r \sigma_u \right) dt \\ &\quad + \left( \frac{\partial y_T}{\partial r} \sigma_r dz_1 + \frac{\partial y_T}{\partial u} \sigma_u dz_2 \right) \\ &= \left[ \frac{B(0, T)}{T} \mu_r - \frac{C(0, T)}{T} \mu_u \right] dt \\ &\quad + \left[ \frac{B(0, T)}{T} \sigma_r dz_1 + \frac{C(0, T)}{T} \sigma_u dz_2 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

此处:  $\mu_r =$  代表(1)的漂浮项  $= \theta(t) + u(t) - ar$

$$\sigma_r = \sigma_1, \quad \sigma_u = \sigma_2$$

$\mu_u =$  (2)的漂浮项  $= -bu$

(14)式代表到期日  $T$  瞬间殖利率的随机过程,其瞬间方差(或总风险)

可由(14)的扩散项求得如下:

$$\begin{aligned} Var[y(T)] &= Var \left[ \frac{B(0, T)}{T} \sigma_r dz_1 + \frac{C(0, T)}{T} \sigma_u dz_2 \right] \\ &= \left( \frac{B(0, T)}{T} \right)^2 \sigma_r^2 + \left( \frac{C(0, T)}{T} \right)^2 \sigma_u^2 \\ &\quad + \left[ \frac{2\rho\sigma_r\sigma_u B(0, T) \cdot C(0, T)}{T^2} \right] \\ &\quad \text{(每单位时间 } dt) \end{aligned} \quad (15)$$

$\sqrt{Var[y(T)]}$  是不同到期日殖利率的波动度。因此, (15) 可代表殖利率波动度的期间结构。

殖利率的瞬间协方差为:

$$Cov[y(T_1), y(T_2)] = Cov \left[ \frac{B(0, T_1)}{T_1} \sigma_r dz_1 + \frac{C(0, T_1)}{T_1} \sigma_u dz_2 \right]$$



$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{B(0, T_2)}{T_2} \sigma_r dz_1 + \frac{C(0, T_2)}{T_2} \sigma_u dz_2 \right] \\
& = \frac{B(0, T_1)B(0, T_2)}{T_1 T_2} \sigma_r^2 + \frac{C(0, T_1)C(0, T_2)}{T_1 T_2} \sigma_u^2 \\
& \quad + \rho \sigma_r \sigma_u \left[ \frac{B(0, T_1)C(0, T_2) + B(0, T_2)C(0, T_1)}{T_1 T_2} \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

注：若令  $u = 0$ ，则(14)，(15)及(16)变成为单因子模型的结果。

## 二、远期利率动态过程

令  $f(t, T_1, T_2)$  代表，在时点  $t$  观察，从未来  $T_1$  起至  $T_2$  期间的远期殖利率。类似(13)，可以公式表示为：

$$\begin{aligned}
f(t, T_1, T_2) & = -\frac{\ln P(t, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} \\
& = -\frac{\ln (P(t, T_2)/P(t, T_1))}{T_2 - T_1} \\
& = \frac{\ln P(t, T_1) - \ln P(t, T_2)}{T_2 - T_1}
\end{aligned} \tag{17}$$

此处： $P(t, T_1) = A(t, T_1)e^{-B(t, T_1) - C(t, T_1)u}$

$P(t, T_2) = A(t, T_2)e^{-B(t, T_2) - C(t, T_2)u}$

$P(t, T_1, T_2) =$  在时点  $t$  观察，未来时点  $T_1$  的债券远期价格，到期日为  $T_2$  ( $T_1 < T_2$ )

$$= P(t, T_2)/P(t, T_1)$$

根据(14)的类似求法，采用双因子 Itô Lemma，我们可由(18)求得：

$$\frac{\partial f}{\partial r} = [B(t, T_2) - B(t, T_1)]/(T_2 - T_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = [C(t, T_2) - C(t, T_1)]/(T_2 - T_1)$$

因此由 Itô Lemma，远期(殖)利率的随机过程为：

$$\begin{aligned}
 df &= \mu_f dt + \left[ \frac{\partial f}{\partial r} \sigma_r dz_1 + \frac{\partial f}{\partial u} \sigma_u dz_2 \right] \\
 &= \mu_f dt + \left[ \frac{B(t, T_2) - B(t, T_1)}{T_2 - T_1} \sigma_r dz_1 + \frac{C(t, T_2) - C(t, T_1)}{T_2 - T_1} \sigma_u dz_2 \right]
 \end{aligned} \quad (18)$$

此处:  $\mu_f$  代表  $df$  的漂移项,也是 Itô Lemma 的漂移项,类似(14) $dt$  内的各项偏微分。(16)所代的远期(殖)利率动态过程并不是“瞬间”远期(殖)利率。欲获得瞬间远期利率,我们必须于(16)内令  $T_2$  趋近  $T_1$  (即  $T_2 \rightarrow T_1$ ), 则

$$\lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{B(t, T_2) - B(t, T_1)}{T_2 - T_1} = \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \quad (\text{并以 } T \text{ 替代 } T_1)$$

(这是微分的定义)

同样地,

$$\lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{C(t, T_2) - C(t, T_1)}{T_2 - T_1} = \frac{\partial C(t, T)}{\partial T}$$

因此,瞬间远期利率的随机过程为:

$$df = \mu_f dt + \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \sigma_r dz_1 + \frac{\partial C(t, T)}{\partial T} \sigma_u dz_2 \quad (19)$$

远期利率的瞬间总风险(或方差)为:

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{Var}[f(t, T)] &= \text{Var} \left[ \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \sigma_r dz_1 + \frac{\partial C(t, T)}{\partial T} \sigma_u dz_2 \right] \\
 &= \left[ \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \sigma_r \right]^2 + \left[ \frac{\partial C(t, T)}{\partial T} \sigma_u \right]^2 \\
 &\quad + 2\rho\sigma_r\sigma_u \left( \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \right) \left( \frac{\partial C(t, T)}{\partial T} \right)
 \end{aligned} \quad (20)$$

(每单位时间  $dt$ )

其瞬间协方差为

$$\begin{aligned}
 &\text{Cov}[f(t, T_1), f(t, T_2)] \\
 &= \text{Cov} \left[ \frac{\partial B(t, T_1)}{\partial T_1} \sigma_r dz_1 + \frac{\partial C(t, T_1)}{\partial T_1} \sigma_r dz_2, \frac{\partial B(t, T_2)}{\partial T_2} \sigma_r dz_1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial C(t, T_2)}{\partial T_2} \sigma_u dz_2 \Big] \\
& = \frac{\partial B(t, T_1)}{\partial T_1} \frac{\partial B(t, T_2)}{\partial T_2} \sigma_r^2 + \frac{\partial C(t, T_1)}{\partial T_1} \frac{\partial C(t, T_2)}{\partial T_2} \sigma_u^2 \\
& + \rho \sigma_u \sigma_r \left[ \frac{\partial B(t, T_1)}{\partial T_1} \frac{\partial C(t, T_2)}{\partial T_2} + \frac{\partial B(t, T_2)}{\partial T_2} \frac{\partial C(t, T_1)}{\partial T_1} \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

### 三、对实证资料的描述功能

由双因子模型[(1)+(2)]所产生的殖利率与远期利率期间结构[(14)及(18)],以及波动度期间结构 $[\sqrt{\text{Var}(y(T))}$ 及 $\sqrt{\text{Var}(f(0, T))}]$ 更具有自由度,且更有能力准确地描述较复杂,且呈现S形肠状或驼峰状的期间结构,如下列图1和图2

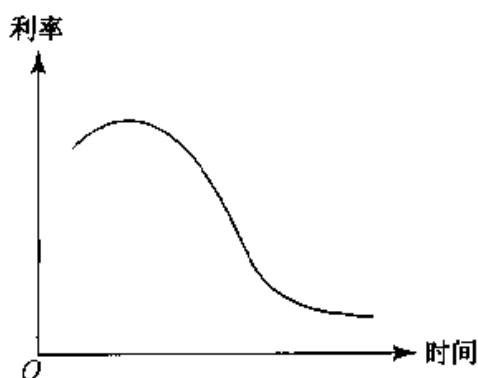


图1 S形肠状利率

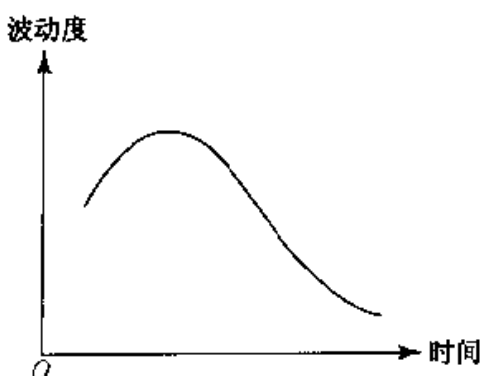


图2 驼峰状远期利率波动度

以上复杂的结构可由双因子模型的结果得到令人满意的实证描述(A Good Fit)。

### 四、债券选择权的评价

在最后一节中,我们推导在双因子模型下的债券选择权评价公式。类似前一章(18)式,我们利用双因子 Itô Lemma 求出债券价格(6)的随机过程如下:

$$\text{已知: } \frac{\partial P(t, T)}{\partial r} = -P(t, T)B(t, T)$$

$$\frac{\partial P(t, T)}{\partial u} = -P(t, T)C(t, T)$$

将之代入双因子 Itô Lemma 公式内, 即可获得

$$\begin{aligned} dP &= \mu_p dt + \left( \frac{\partial P}{\partial r} \cdot \sigma_r dz_1 + \frac{\partial P}{\partial u} \sigma_u dz_2 \right) \\ &= \mu_p dt + [P(t, T)B(t, T)\sigma_r dz_1 - P(t, T)C(t, T)\sigma_u dz_2] \\ &= \mu_p dt + P(t, T)[B(t, T)\sigma_r dz_1 + C(t, T)\sigma_u dz_2] \\ \therefore \frac{dP}{P} &= \mu_p(t)dt + \sigma_{p,t} dz_3 \end{aligned} \quad (22)$$

此处:  $\mu_p(t)$  代表 Itô Lemma  $dt$  项内的各项偏微分(提出  $P$  后)之和, 类似前一章(18)式内的  $\mu_p(t)$

$$\sigma_{p,t} dz_3 = B(t, T)\sigma_r dz_1 + C(t, T)\sigma_u dz_2 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{p,t}^2 dt &= \text{Var}[\sigma_{p,t} dz_3] = \text{Var}[B(t, T)\sigma_r dz_1 + C(t, T)\sigma_u dz_2] \\ &= [B(t, T)^2 \sigma_r^2 + C(t, T)^2 \sigma_u^2 \\ &\quad + 2\rho\sigma_r\sigma_u B(t, T)C(t, T)]dt \\ &\quad (\text{中括号内 3 项之和即是 } \sigma_{p,t}^2) \\ &= \text{Var}(P(t, T)) = \text{Var}[\ln P(t, T)] \end{aligned} \quad (24)$$

同样地,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[P(\tau, T), P(\tau, t)] &= \text{Cov}[\ln P(\tau, T), \ln P(\tau, t)] \\ &= \text{Cov}[B(\tau, T)\sigma_r dz_1 + C(\tau, T)\sigma_u dz_2, B(\tau, t)\sigma_r dz_1 \\ &\quad + C(\tau, t)\sigma_u dz_2] \\ &= [B(\tau, T)C(\tau, t)\sigma_r\sigma_u\rho + B(\tau, t)C(\tau, T)\sigma_r\sigma_u\rho] \\ &\quad + [B(\tau, T)B(\tau, t)\sigma_r^2 + C(\tau, T)C(\tau, t)\sigma_u^2] (\tau < t < T) \end{aligned} \quad (25)$$

此外, 令  $P^*(\tau, t, T)$  代表债券的远期价格, 即从时点  $\tau$  观察, 债券在未来时间  $t$  的远期价格, 到期日为  $T$ 。以公式表示为:

$$P^*(\tau, t, T) = \frac{P(\tau, T)}{P(\tau, t)} \quad (\tau < t < T) \quad (26)$$

因此,在时点  $\tau$  的远期价格瞬间总风险为:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(P^*) &= \text{Var}(\ln P^*) = \text{Var}[\ln P(\tau, T) - \ln P(\tau, t)] \\
 &= \text{Var}[\ln P(\tau, T)] + \text{Var}[\ln P(\tau, t)] \\
 &\quad - 2\text{Cov}[\ln P(\tau, T), \ln P(\tau, t)] \\
 &\quad (\text{将(24)及(25)代入上等式}) \\
 &= [\sigma_r^2 B(\tau, T)^2 + \sigma_u^2 C(\tau, T)^2 + 2\sigma_r \sigma_u \rho B(\tau, T)C(\tau, T)] \\
 &\quad + [\sigma_r^2 B(\tau, t)^2 + \sigma_u^2 C(\tau, t)^2 + 2\sigma_r \sigma_u \rho B(\tau, t)C(\tau, t)] \\
 &\quad - 2[B(\tau, T)C(\tau, t)\sigma_r \sigma_u \rho + B(\tau, t)C(\tau, T)\sigma_r \sigma_u \rho] \\
 &\quad - 2[B(\tau, T)B(\tau, t)\sigma_r^2 + C(\tau, T)C(\tau, t)\sigma_u^2] \\
 &= \sigma_r^2 [B(\tau, T) - B(\tau, t)]^2 + \sigma_u^2 [C(\tau, T) - C(\tau, t)]^2 \\
 &\quad + 2\sigma_r \sigma_u \rho B(\tau, T)[C(\tau, T) - C(\tau, t)] \\
 &\quad - 2\sigma_r \sigma_u \rho B(\tau, t)[C(\tau, T) - C(\tau, t)] \\
 &= \sigma_r^2 [B(\tau, T) - B(\tau, t)]^2 + \sigma_u^2 [C(\tau, T) - C(\tau, t)]^2 \\
 &\quad + 2\rho \sigma_r \sigma_u [B(\tau, T) - B(\tau, t)][C(\tau, T) - C(\tau, t)]
 \end{aligned} \tag{27}$$

因此,从时间 0 至  $t$  债券远期价格的总风险是对(27)的  $\tau$  积分从 0 至  $t$  如下:

$$\begin{aligned}
 v^2(t, T) &= \int_0^t \text{Var}(P^*) d\tau \\
 &= \int_0^t \{ \sigma_r^2 [B(\tau, T) - B(\tau, t)]^2 + \sigma_u^2 [C(\tau, T) - C(\tau, t)]^2 \\
 &\quad + 2\rho \sigma_r \sigma_u [B(\tau, T) - B(\tau, t)][C(\tau, T) - C(\tau, t)] \} d\tau \\
 &\quad (\sigma_r = \sigma_1, \sigma_u = \sigma_2)
 \end{aligned} \tag{28}$$

由债券价格的随机变动程式  $dP[(22)]$  可知,债券(远期)价格  $P(t, T)$  是对数正态分布。因此,我们可采用 Black(1976)商品期货买权的定价模型来评价折现债券买权如下:

$$\begin{aligned}
 C_0(t, T) &= P(0, t)[P^*(0, t, T)N(d_1^*) - KN(d_2^*)] \\
 &= P(0, t)P^*(0, t, T)N(d_1^*) - KP(0, t)N(d_2^*) \\
 &= P(0, T)N(d_1^*) - KP(0, t)N(d_2^*)
 \end{aligned} \tag{29}$$

此处:  $P^*(0, t, T) = P(0, T)/P(0, t)$

$K$  = 履约价,  $t$  = 买权的到期日,  $T$  = 债券到期日 ( $t < T$ )

$$d_1^* = \frac{\ln[P^*(0, t, T)/K] + v^2(t, T)/2}{v(t, T)}$$

$$d_2^* = d_1^* - v(t, T)$$

至于如何采用三元树数值方法建造双因子利率模型的利率期间结构, 读者可参阅 Hull-White(1994b)的论文。

折价债券卖权的评价可由(29)改变对应符号即可获得如下:

$$P_0(t, T) = P(0, t)[KN(-d_2^*) - P^*(0, t, T)N(-d_1^*)] \quad (30)$$

其余符号的定义与(29)相同。

## 参 考 文 献

- F. Black, and P. Karasinski, "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, July-August 1991, p. 52—59.
- J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53(1985), p. 363—384.
- D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, 60, 1(1992), p. 77—105.
- T. S. Y. Ho, and S. B. Lee, "Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 40 (December 1986), p. 1011—1029.
- J. Hull, and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models", *Journal of Derivatives*, 2, 1 (Fall 1994a), p. 7—16.
- , "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models", *The Journal of Derivatives*, 2, 1(fall 1994b), p. 7—16.
- , "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 4(1990), p. 573—592.

F. Jamshidian, "An Exact Bond Option Pricing Formula", *Journal of Finance*, 44 (march 1989), p. 205—209.

J. Wei, "Valuing Differential Swaps", *Journal of Derivatives*, 1, 3 (Spring 1994), p. 64—76.

## 附录

### 一、(5)式 pde 的推导:

已知:

$$dr = \underbrace{[\theta(t) + u - ar]}_{a_1} dt + \sigma_1 dz_1 = a_1 dt + b_1 dz_1 \quad (\text{A.1})$$

$$du = \underbrace{-bu}_{a_2} dt + \sigma_2 dz_2 = a_2 dt + b_2 dz_2 \quad (\text{A.2})$$

此处:  $a_1 = \theta(t) + u - ar$ ,  $b_1 = \sigma_1$ ,  $a_2 = -bu$ ,  $b_2 = \sigma_2$ ,  $u = u(t)$

利用两个变量的 Itô Lemma;

$$\begin{aligned} df &= \left[ \frac{\partial f}{\partial r} a_1 + \frac{\partial f}{\partial u} a_2 + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} b_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} b_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial r} b_1 b_2 \rho \right] dt + \left( \frac{\partial f}{\partial r} b_1 dz_1 + \frac{\partial f}{\partial u} b_2 dz_2 \right) \\ &\quad (\rho = \text{Corr}(dz_1, dz_2) = \text{Cov}(dz_1, dz_2)) \\ &= \left[ f_r (\theta(t) + u - ar) + f_u (-bu) + f_t + \frac{1}{2} f_{rr} (\sigma_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f_{uu} (\sigma_2^2) + f_{ru} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right] dt + (f_r \sigma_1 dz_1 + f_u \sigma_2 dz_2) \\ &\quad (f_r = \frac{\partial f}{\partial r}, f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \text{其他微分的意义可类推}) \\ &= \left[ f_t + [\theta(t) + u - ar] f_r - bu f_u + \frac{1}{2} \sigma_1^2 f_{rr} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 f_{uu} + \rho \sigma_1 \sigma_2 f_{ru} \right] dt \\ &\quad + \sigma_3 dz_3 \\ &\quad (\text{令 } \sigma_3 dz_3 = f_r \sigma_1 dz_1 + f_u \sigma_2 dz_2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

此处:

$$\begin{aligned}\sigma_3^2 dt &= \text{Var}(f_r \sigma_1 dz_1 + f_u \sigma_2 dz_2) \\ &= f_r^2 \sigma_1^2 dt + f_u^2 \sigma_2^2 dt + 2f_r f_u \sigma_1 \sigma_2 \rho dt \\ &= \underbrace{(f_r^2 \sigma_1^2 + f_u^2 \sigma_2^2 + 2f_r f_u \sigma_1 \sigma_2 \rho)}_{\sigma_3^2} dt\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_3^2 = f_r^2 \sigma_1^2 + f_u^2 \sigma_2^2 + 2f_r f_u \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

因在风险中立下, (A.3) 的漂浮项代表无风险报酬( $rf$ )。因此

$$f_t - [\theta(t) + u - ar]f_r - bu f_u + \frac{1}{2}\sigma_1^2 f_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 f_{uu} + \rho\sigma_1\sigma_2 f_{ru} = rf$$

这也是(5)。

二、 $A(t, T)$ 与全部公式如下:(取自 Hull-White(1994b))

$$\log A(t, T) = \log \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)F(0, t) - \eta$$

此处:

$$\eta = \frac{\sigma_1^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 - \rho\sigma_1\sigma_2[B(0, t) \times C(0, t)B(t, T)$$

$$+ \gamma_4 - \gamma_2] - \frac{1}{2}\sigma_2^2[C(0, t)^2 \times B(t, T) + \gamma_6 - \gamma_5]$$

$$\gamma_1 = \frac{e^{-(a+b)T}[e^{(a+b)t} - 1]}{(a+b)(a-b)} - \frac{e^{-2aT}(e^{2at} - 1)}{2a(a-b)}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{1}{ab}\left[\gamma_1 + C(t, T) - C(0, T) + \frac{1}{2}B(t, T)^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}B(0, T)^2 + \frac{t}{a} - \frac{e^{-a(T-t)} - e^{-aT}}{a^2}\right]\end{aligned}$$

$$\gamma_3 = -\frac{e^{-(a+b)t} - 1}{(a-b)(a+b)} + \frac{e^{-2at} - 1}{2a(a-b)}$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{ab}\left[\gamma_3 - C(0, t) - \frac{1}{2}B(0, t)^2 + \frac{t}{a} + \frac{e^{-at} - 1}{a^2}\right]$$



$$\gamma_s = \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{2} C(t, T)^2 - \frac{1}{2} C(0, t)^2 + \gamma_2 \right]$$

$$\gamma_s = \frac{1}{b} \left[ \gamma_1 - \frac{1}{2} C(0, t)^2 \right]$$

## 第三十二章 付息债券选择权

### 一、简介

在前两章,我们已分别介绍 Hull-White 单因子及双因子利率模型,并详细分析折价债券选择权的评价公式。但并未讨论如何评价付息债券选择权(Options on Coupon Bonds)。在本章中,我们将介绍如何运用 Jamshidian(1989)的理论来评价,以付息债券为标的物的选择权。虽然 Jamshidian 的理论仅是基于 Vasicek 单因子利率模型所推导出的付息债券选择权评价模型,但我们可将该理论加以延伸应用于 Hull-White 单因子及双因子利率模型下的付息债券选择权评价理论。

### 二、付息债券选择权:单因子利率模型

在前一章, Hull-White(1946b)单因子利率模型可表示为

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b - r)]dt + \sigma(t)r^{\beta}dz \quad (1a)$$

$$\text{或} \quad = a(t)[b'(t) - r]dt + \sigma(t)r^{\beta}dz \quad (1b)$$

此处:  $b'(t) = \frac{\theta(t)}{a(t)} + b$

此模型的财务经济意义在前章中已有详细介绍。

当(1)的  $\beta$  设定为零时( $\beta = 0$ ), Hull-White 模型(1)即变成为延

仲型的 Vasicek 单因子利率模型如下:

$$dr = a(t)[b'(t) - r]dt + \sigma(t)dz \quad (2)$$

由前一章(零息)折价债券买权的评价公式为

$$C = P(0, t)[P(t, T)N(d_1) - KN(d_2)] \quad (3)$$

此处:  $P(t, T)$  = 在期初(时间 0) 观察, 从未来  $t$  起至到期日  $T$  的折价债券远期价格

$P(0, t)$  = 折价债券的现在价格, 存续时间为  $t$ 。可由评价公式求算

$$d_1 = \frac{\ln[P(t, T)/K] + v^2(t, T)/2}{v(t, T)}$$

$$d_2 = d_1 - v(t, T)$$

$$v^2(t, T) = \int_0^t \sigma(\tau)[B(\tau, T) - B(\tau, t)]^2 d\tau = \text{远期价格的总风险}$$

(详见前一章有关  $B(\tau, T)$  的介绍)

$K$  = 履约价

$t$  = 买权的到期日,  $T$  = 债券到期日 ( $T > t$ )

折价债券卖权的评价公式为:

$$P = P(0, t)[KN(-d_2) - P(t, T)N(-d_1)] \quad (4)$$

( $t$  = 卖权到期日)

(3)及(4)是零息债券选择权的评价公式。利用 Jamshidian(1989)的理论, 我们可推导出, 以 Hull-White 模型[(2)式]为基础的付息债券选择权评价公式。

### 一、付息债券买权的评价: 单因子模型

令  $\hat{P}_i(t, T)$  = 付息债券在时点  $t$  的价格, 其到期日为  $T$ ,  $s_i$  ( $t < s_1 < s_2 < \dots < s_T = T$ ) 为第  $i$  期的付息日,

$\hat{C}(0, t, K)$  = 在时点 0, 以付息债券  $\hat{P}_i(t, T)$  为标的物的买权, 买权到期日为  $t$

$K$  = 买权履约价

根据 Jamshidian(1989)的理论及(3)付债券息买权的评价公式为:

$$\hat{C}(0, t, K) = P(0, t)E[\max(\hat{P}_c(t, T) - K, 0)] \quad (5)$$

此处:付息债券的远期价格可表示为:

$$\hat{P}_c(t, T) = \sum_{j=1}^T b_j P(t, s_j) \quad (t < s_j)$$

$b_j$  = 第  $s_j$  期债券利息

$P(t, s_j)$  = 零息债券在时间  $t$  的价格,其到期日为  $s_j$ ,到期时支付 \$1,即  $P(s_j, s_j) = 1$

$b_j P(t, s_j)$  = 在时间  $t$ ,利息  $b_j$  的折现值(是类似的意义)。所有利息折现加总即是付息债券在时间  $t$  的价格(即远期

价格),  $\sum_{j=1}^T b_j P(t, s_j)$

付息债券的远期价格可另表示为:

$$\begin{aligned} \hat{P}_c(t, T) &= \sum_{j=1}^T b_j P(t, s_j) = \sum_{j=1}^T b_j \left( \frac{P(0, s_j)}{P(0, t)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^T b_j P(0, s_j) / P(0, t) \quad (t < s_j) \end{aligned} \quad (6)$$

此处:  $P(t, s_j) = P(0, s_j) / P(0, t)$

因此,付息债券的远期价格是透过零息债券  $P(0, s_j)$  及  $P(0, t)$  的计算求得。零息债券的评价已在前一章有详细的介绍。

再次,我们将履约价  $K$  加以分解成为某种加权的总和如下:

利用(5)式内的  $\hat{P}_c(t, T) - K$ 。我们一定可以找到一个利率水平  $r^*$ ,能使远期价格等于  $K$ ,即是

$$\hat{P}_c(t, T, r^*) = \sum_{j=1}^T b_j P(t, s_j, r^*) = K \quad (7)$$

(7)式成立的理由是,在(5)式内的  $\hat{P}_c(t, T)$  可能大于、小于或等于  $K$ 。因此我们可找到一个  $r^*$  能使两者相等。

我们可再改写(7)成为:

$$K = \sum_{j=1}^T b_j K_j \quad (8)$$

此处:

$$K_j = P(t, s_j, r^*) \quad (\text{可由(7) 求算获得}) \quad (9)$$

最后,我们可回到付息债券买权的评价公式(5),并改写如下:

$$\begin{aligned} \hat{C}(0, t, K) &= P(0, t) E \left[ \max \left( \sum_{j=1}^T b_j P(t, s_j) - \sum_{j=1}^T b_j K_j, 0 \right) \right] \\ &= P(0, t) \sum_{j=1}^T b_j E [\max (P(t, s_j) - K_j, 0)] \\ &= \sum_{j=1}^T b_j \{ P(0, t) E [\max (P(t, s_j) - K_j, 0)] \} \\ &= \sum_{j=1}^T b_j C(0, t, s_j, K_j) \end{aligned} \quad (10)$$

此处:  $C(0, t, s_j, K_j) = P(0, t) E [\max (P(t, s_j) - K_j, 0)]$   
 $=$  零息债券买权在期初的价值,买权的到期日为  $t$ ,履约价为  $K_j$ 。标的(零息)债券的到期日为  $s_j$   
 $=$  可由(3) 求算,将(3) 内的  $P(t, T)$  改为  $P(t, s_j)$ ,  $T$  改为  $s_j$ 。其余更改类推

观察(10)可知,付息债券买权是由零息债券买权  $C(0, t, K_j)$  的加权总和组合而成。因此,可以利用零息债券买权的评价公式(3)来评价付息债券买权  $\hat{C}(0, t, K)$ 。每一个零息债券买权的到期日与付息债券买权的到期日相同,是  $t$ 。但零息债券买权的履约价为  $K_j$ ,它可由(7)或(8)求算。

## 二、付息债券卖权的评价:单因子模型

利用类似的方法,付息债券卖权的评价公式也可求算如下:

$$\begin{aligned} \hat{P}(0, t, K) &= P(0, t) E [\max (K - \hat{P}_r(t, T), 0)] \\ &= \sum_{j=1}^T b_j P(0, t, s_j, K_j) \end{aligned} \quad (11)$$

此处:  $P(0, t, s_j, K_j) = P(0, t)E[\max(K_j - P(t, s_j), 0)]$   
 = 零息债券卖权在期初的价值, 其到期日为  $t$ ,  
 履约价为  $K_j$ ,  
 = 可由(4) 求算

其他符号定义与(10)内的定义相同。

因此, 付息债券卖权的评价(11)是由零息债券卖权  $P(0, t, K_j)$  的加权总和组合而成。因此, 可利用零息债券卖权的评价公式(4)来评价付息债券卖权。每一零息债券卖权的到期日为  $t$ , 履约价为  $K_j$ 。  $K_j$  可由(7)式求算。

### 三、付息债券选择权: 双因子模型

由前一章, Hull-White(1994b)双因子利率模型可表示为:

$$\begin{cases} dr = [\theta(t) + u(t) - ar]dt + \sigma_1 dz_1 \\ du = -budt + \sigma_2 dz_2 \end{cases} \quad (12)$$

(12)代表双因子延伸型的 Vasicek 模型。在双因子模型下, 零息债券买权在期初的价格为:

$$c(t, T) = P(0, t)[P^*(0, t, T)N(d_1^*) - KN(d_2^*)] \quad (13)$$

此处:  $P^*(0, t, T) = P(0, T)/P(0, t)$

= 在期初观察, 零息债券从  $t$  至  $T$  的远期价格

$P(0, t)$  = 零息债券的现在价格, 可由前一章(6) 式求算(双因子模型下的零息债券评价公式)

$$d_1^* = \frac{\ln[P^*(0, t, T)/K] + v^2(t, T)/2}{v(t, T)} \quad (14)$$

$$d_2^* = d_1^* - v(t, T)$$

$$\begin{aligned} v^2(t, T) = & \int_0^t \{ \sigma_r^2 [B(\tau, T) - B(\tau, t)]^2 + \sigma_u^2 [C(\tau, T) - C(\tau, t)]^2 \\ & + 2\rho\sigma_r\sigma_u [B(\tau, T) - B(\tau, t)][C(\tau, T) - C(\tau, t)] \} d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\sigma_r = \sigma_1, \sigma_u = \sigma_2)$$

从 0 到  $t$  零息债券远期价格  $P^*(0, t, T)$  的总风险  
零息债券卖权在期初的价格为:

$$p_c(t, T) = P(0, t)[KN(-d_2^*) - P^*(0, t, T)N(-d_1^*)] \quad (16)$$

以上零息债券买权及卖权的评价公式(13)及(16)可应用于付息债券选择权的评价。分别介绍如下:

### 一、付息债券买权的评价:双因子模型

付息债券买权的评价公式可表示如下:

$$c^*(0, t, K) = P(0, t)E[\max(P_c^*(0, t, T) - K, 0)] \quad (17)$$

此处:付息债券的远期价格  $P_c^*(0, t, T)$  可表示为:

$$P_c^*(0, t, T) = \sum_{j=1}^T b_j P(0, t, s_j) \quad (t < s_j)$$

$b_j$  = 第  $s_j$  期债券利息

$P(0, t, s_j)$  = 在时点零(现在)观察,零息债券从  $t$  至到期日  $s_j$  的  
远期价格,到期日为  $s_j$ ,到期时支付 \$1,即

$$P(s_j, s_j) = 1$$

$$= P(0, s_j)/P(0, t) \quad (\text{可由双因子模型求算之})$$

$b_j P(0, t, s_j)$  = 在时间  $t$ ,利息  $b_j$  的折现值(是类似的意义,从  $s_j$   
折现回至  $t$ )

同样,根据(7)的理由,(17)式内远期价格  $P_c^*(0, t, T)$  可能大于、小于  
或等于  $K$ 。因此,我们可找到一个利率水准  $r^*$  及  $u^*$  及能使两者相等,  
也就是:

$$\sum_{j=1}^T b_j P(0, t, s_j, r^*, u^*) = K \quad (18a)$$

或

$$K = \sum_{j=1}^T b_j K_j$$

此处:

$$K_j = P(0, t, s_j, r^*, u^*) \quad (18b)$$

因此,  $K_j$  可由(18a)及(18b)求算获得。

最后, 我们可回到付息债券买权的评价公式(17), 将它重新改写为:

$$\begin{aligned} c^*(0, t, K) &= P(0, t)E\left[\max\left(\sum_j b_j P(0, t, s_j) - \sum_j b_j K_j, 0\right)\right] \\ &= \sum_j \{b_j P(0, t)E[\max(P(0, t, s_j) - K_j, 0)]\} \\ &= \sum_j b_j c(0, t, s_j, K_j) \end{aligned} \quad (19)$$

此处:  $c(0, t, s_j, K_j) = P(0, t)E[\max(P(0, t, s_j) - K_j, 0)]$   
 = 零息债券买权在期初的价值, 买权的到期日为  $t$ , 履约价为  $K_j$   
 = 可由(13) 式求算, 将(13) 内的  $P^*(0, t, T)$  改为  $P(0, t, s_j)$ 。因此,  $P(0, t, s_j)$  的到期日为  $s_j$ 。必须将(13) 内的  $T$  改为  $s_j$ 。其余更改类推。 $d_1^*$  及  $d_2^*$  也做同样的更改

观察(19)可知, 在双因子模型下, 付息债券买权是由零息债券买权  $c(0, t, s_j, K_j)$  的加权总和组合而成。因此, 可以利用双因子零息债券买权的评价公式(13)来评价付息债券买权  $c^*(0, t, K)$ 。

## 二、付息债券卖权的评价: 双因子模型

采用上述类似的方法, 付息债券卖权的评价模型表示如下:

$$\begin{aligned} p^*(0, t, K) &= P(0, t)E[\max(K - P^*(0, t, T), 0)] \\ &= \sum_j b_j p(0, t, s_j, K_j) \end{aligned} \quad (20)$$

此处:  $p(0, t, s_j, K_j) = P(0, t)E[\max(K_j - P(0, t, s_j), 0)]$   
 = 零息债券卖权在期初的价值, 其到期日为  $t$ , 履约价为  $K$   
 = 可由(16) 式求算, 将(16) 内的  $P^*(0, t, T)$  改为  $P(0, t, s_j, K_j)$ 。该零息债券远期价格



的到期日为  $s_j$ 。必须将(16)内的  $T$  改为  $s_j$ 。其余更改类推

因此,付息债券卖权是由零息债券卖权  $\hat{p}(0, t, s_j, K_j)$  的加权总和组合而成。因此,可利用双因子模型零息债券卖权公式求算付息债券卖权的价格。

## 参 考 文 献

- F. Black, and P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, July-August 1991, p. 52—59.
- D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, 60, 1 (1992), p. 77—105.
- J. Hull, and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models: Single-Factor Models", *Journal of Derivatives*, 2, 1 (Fall 1994a), p. 7—16.
- , "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models", *The Journal of Derivatives*, 2, 1 (Fall 1994b).
- , "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990), p. 573—592.
- F. Jamshidian, "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, 44 (March 1989), p. 205—209.
- J. Wei, "Valuing Differential Swaps", *Journal of Derivatives*, 1, 3 (Spring 1994), p. 64—76.

## 第三十三章 信用风险价差衍生性商品

### 一、简介

信用风险价差(The Credit Risk Spread)或称殖利率价差(The Yield Spread)是指某种信用等级债券(AAA、AA、BBB等等)殖利率与无风险债券(政府债券)殖利率间的价差(The Spread)。信用(风险)价差会随着发行公司信用评鉴等级(Credit-Ratings)的变动而有扩大或降低的变动。若发行公司的信用等级上升(或下降),则其与政府债券之间的信用价差会随之缩小(或扩大)。对有信用风险债券(Credit Risky Bonds)投资时,若信用(风险)价差有非预期的缩小(下降),会造成债券投资的损失。此项损失的风险可透过信用价差卖权(The Credit Risk Put or The Put on The Yield Spread)加以规避。该卖权的标的是殖利率价差(或称信用风险价差)。当殖利率价差下降低于履约价差时,该卖权成为价内,由此可抵消殖利率下降所产生的损失。在本章中,我们将会详细介绍 Kijima 及 Komoribayashi (KK, 1998)信用差卖权的评价及相关信用等级变动的随机过程。信用等级变动的随机过程可根据实际信用评等资料估计获得,在实务上可观察得到(有观察值)。借此,推导出来的信用价差及其卖权的评价具有实用价值。

## 二、信用等级随机过程

正如 Jarrow, Lando and Turnbull (JLT, 1997), 债券信用等级的动态过程可以马可夫链(Markov Chain)模型表示如下: 以  $X$  代表时间同质(Time-Homogeneous, 或 Stationary)的马可夫链,  $X = \{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ 。其情况空间(The State Space)设定为  $N = \{1, 2, \dots, K, K+1\}$ ,  $N$  代表  $K+1$  信用等级; 情况 1 ( $N=1$ ) 是最高信用等级(信用最佳), 情况 2 ( $N=2$ ) 是第二高信用等级(信用次佳), 等等。情况  $K$  是最低(或最差)信用等级。情况  $K+1$  代表倒闭情况(Default)。一旦公司进入情况  $K+1$ , 等于破产而消失, 故情况  $K+1$  称为吸收情况(The Absorbing State)。此外, 正如 JLT(1997) 的假设, 信用等级马可夫链  $X$  与即期利率(The Spot Rate)是独立的。

马可夫链  $X$  的变动过程可以转移矩阵  $Q$  (Transition Matrix) 表示。它描述从本期至下一期公司信用等级, 从某一等级上升或下降至另一等级的转移概率(Transition Probabilities)。转移矩阵  $Q$  表示如下:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} & q_{1, K+1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K} & q_{2, K+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdots & q_{KK} & q_{K, K+1} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & R \\ O' & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

此处:  $q_{ij}$  = 由信用等级  $i$  转移至信用等级  $j$  的转移概率(由本期至下一期) ( $1 \leq i, j \leq K$ )

=  $P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$ ,  $q_{ij}$  不会因时间而异, 因它是时间同质。

$A = [q_{ij}]$  是  $K \times K$  矩阵, 代表转移概率为  $q_{ij}$ , 也就是  $Q$  内的前  $K$  栏及前  $K$  排的矩阵。它代表非吸收情况(或非消失情况),  $A$  的情况空间是  $\hat{N} = \{1, 2, \dots, K\}$ ,  $K$  个非消失情况(从等

级 1 至  $K$ )。

$R = Q$  内第  $K + 1$  栏的  $K$  个转移概率  $= (q_{1, K+1}, q_{2, K+1}, \dots, q_{K, K+1})'$ , 是  $(K \times 1)$  列向量(Column Vector)。  $q_{i, K+1}$  代表从等级  $i$  转移至消失等级(或倒闭等级)  $K + 1$  的概率,  $i = 1, 2, \dots, K$ 。

$O' = (0, 0, \dots, 0)$ , 是  $(1 \times K)$  行向量(Row Vector), 它其实是  $q_{K+1, 1}, q_{K+1, 2}, \dots, q_{K+1, K}$  都是零转移概率, 因为  $q_{K+1, j}$  代表从吸收情况(消失情况  $K + 1$ )再回到其他信用等级( $j = 1, 2, \dots, K$ )的概率, 当然都是零概率。

最后, 1 代表  $q_{K+1, K+1}$ , 它代表一旦公司进入消失情况, 就是永久消失(或倒闭), 故其概率为 1。

按照 JLT(1997), 对具有信用风险债券的评价, 我们需要一个等价 Martingale 概率测度(Equivalent Martingale Probability Measure, 或称平赌概率测度)下的转移概率矩阵  $\tilde{Q}$ , 表示如下(在完全市场及无套利条件下, 该对等风险中立概率测度是存在):

$$\begin{aligned} & \tilde{Q}(t, t+1) \\ = & \left[ \begin{array}{cccc|c} \tilde{q}_{11}(t, t+1) & \tilde{q}_{12}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1K}(t, t+1) & \tilde{q}_{1, K+1}(t, t+1) \\ \tilde{q}_{21}(t, t+1) & \tilde{q}_{22}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2K}(t, t+1) & \tilde{q}_{2, K+1}(t, t+1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \tilde{q}_{K1}(t, t+1) & \tilde{q}_{K2}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{KK}(t, t+1) & \tilde{q}_{K, K+1}(t, t+1) \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2a)$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A}(t, t+1) & \tilde{R}(t, t+1) \\ \hline O' & 1 \end{array} \right] \quad (2b)$$

此处:

$$\tilde{A}(t, t+1) = \left[ \begin{array}{cccc} \tilde{q}_{11}(t, t+1) & \tilde{q}_{12}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1K}(t, t+1) \\ \tilde{q}_{21}(t, t+1) & \tilde{q}_{22}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2K}(t, t+1) \\ \tilde{q}_{K1}(t, t+1) & \tilde{q}_{K2}(t, t+1) & \cdots & \tilde{q}_{KK}(t, t+1) \end{array} \right] \quad (3)$$

其意义与(1)内的  $A$  相同,但此处  $\tilde{q}_v(t, t+1)$  代表风险中立转移概率。它的情况空间  $\hat{N} = \{1, 2, \dots, K\}$ 。

$$\hat{R}(t, t+1) = [\tilde{q}_{1, K+1}(t, t+1), \tilde{q}_{2, K+1}(t, t+1), \dots, \tilde{q}_{K, K+1}(t, t+1)]'$$

其意义与(1)内的  $R$  相同,但  $\tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1)$  代表风险中立转移概率。

$O' = (0, 0, \dots, 0)$ , 其意义与(1)内的  $O'$  向量相同

$\hat{Q}(t, t+1)$  内的转移概率  $\hat{q}_v(t, t+1)$  是由过去至现在  $t$  的信用历史资料估计求出。

但风险中立矩阵  $\tilde{Q}(t, t+1)$  所代表的信用等级马可夫链  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$  不一定是时间同质的马可夫链,也就是从等级  $i$  转移至等级  $j$  的移动概率不一定是固定不变(如同(1)内的  $q_v$ ),而会随时间转移而变动,即  $q_v$  随着不同时间而变动,故在  $\hat{Q}$  内的转移概率以  $\tilde{q}_v(t, t+1)$  代表。以公式更清楚表示如下:

$$\tilde{q}_v(t, t+1) = \tilde{P}(\tilde{X}_{t+1} = j) | (\tilde{X}_t = i), i, j \in N = \{1, 2, \dots, K+1\}$$

此外,正如 JLT(1997),我们也假设信用等级的时间异质马可夫链  $\tilde{X}$  (Non-Homogeneous Markov Chain) 与即期利率(Spot Rate)在风险中立下是相互独立的。这个假设并不会抵触实务的情况,特别是投资等级(Investment Grade)的债券,其信用等级的变动与即期利率连动的关系几乎是零。因此,此假设条件是合理的假设。但对劣质等级债券,则此独立假设将会很勉强(诸如投机型债券,  $B$  及  $C$  等级债券)。

### 三、信用风险债券评价

在本节中,我们探讨如何评价具有信用风险的债券。

令

$V_0(t, T)$  = 无风险债券在时间  $t$  的价值,其到期日为  $T$

$V_j(t, T)$  = 信用等级  $j$  债券在时间  $t$  的价值,其到期日为  $T$

$$j \in \hat{N} = \{1, 2, \dots, K\} (j \neq K+1)$$

在风险中立下,  $V_0(t, T)$  是无风险债券到期现金流量 \$1 的现值的期望:

$$V_0(t, T) = \tilde{E}_t[e^{-\int_t^T r(s)ds}] \quad (4)$$

此处:  $r(s)$  = 代表随时间变动的即期利率

$\tilde{E}_t(\cdot)$  = 在风险中立概率测度  $\tilde{P}$  下的期望值。JLT(1997) 已证明在风险中立以及完全市场与无套利条件下, 有信用风险债券的评价可以(5) 式代表如下:

$$V_j(t, T) = \tilde{E}[e^{-\int_t^T r(s)ds} [1_{|\tau_j > T|} + \delta 1_{|\tau_j \leq T|}]] \quad (5a)$$

$$= \tilde{E}_t[e^{-\int_t^T r(s)ds}] \tilde{E}_t[1_{|\tau_j > T|} + \delta 1_{|\tau_j \leq T|}] \quad (5b)$$

此处:

$$1_{|\tau_j > T|} = \begin{cases} 1 & \text{若 } j \text{ 级债券的吸收时间(或倒闭时间)} \tau_j \text{ 超过到期} \\ & \text{日} (\tau_j > T), \text{ 则无倒闭发生(即生存), 以 } 1 \text{ 表示。} \\ 0 & \text{若倒闭时间发生在到期日 } T \text{ 或之前} (\tau_j \leq T), \text{ 则 } j \\ & \text{级公司消失(倒闭), 以 } 0 \text{ 表示。} \end{cases}$$

$$\delta 1_{|\tau_j \leq T|} = \begin{cases} \delta & \text{若有倒闭发生时} (\tau_j \leq T), \text{ 可回收的债券价值比率} \\ & \text{(Recovery Rate) 以 } \delta \text{ 表示, } \delta < 1。 \\ 0 & \text{若无倒闭时} (\tau_j > T), \text{ 则 } \delta \times 0 = 0。 \end{cases}$$

因此, 上面两个指标函数(Indicator Functions)加起来代表在到期时不倒闭及倒闭两种情况下的现金流量(或到期价值, The Final Payoff):

$$1_{|\tau_j > T|} + \delta 1_{|\tau_j \leq T|} = \begin{cases} 1 + 0 = 1, & \text{若不倒闭} (\tau_j > T) \\ 0 + \delta \cdot 1 = \delta, & \text{若倒闭} (\tau_j \leq T) \end{cases}$$

也就是说, 若不发生倒闭 ( $\tau_j > T$ ), 则到期时, 债券支付 \$1。若发生倒闭 ( $\tau_j \leq T$ ), 则债券支付  $\delta$  元, 即投资人可拾回  $\delta$  元。这到期现金流量的折现期望值就是有信用风险债券的现在( $t$ )价值  $V_j(t, T)$ , 也就是(5a)所代表意义。(5b)是利用信用等级迁移  $X$  与即期利率  $r(s)$

独立的条件,可分成两项期望值相乘积。

由(5b)可进一步表示为:

$$\begin{aligned} V_j(t, T) &= V_c(t, T) \{E[1_{\{\tau_j > T\}}] + E[\delta 1_{\{\tau_j \leq T\}}]\} \\ &= V_0(t, T) \{P_r(\tau_j > T) + \delta(1 - P_r(\tau_j > T))\} \\ &= V_0(t, T) \{\delta + (1 - \delta)P_r(\tau_j > T)\} \end{aligned} \quad (6a)$$

此处:  $V_0(t, T) = (4)$

$$E[1_{\{\tau_j > T\}}] = P_r(\tau_j > T) = \frac{V_j(0, t) - \delta V_c(0, t)}{(1 - \delta)V_0(0, t)} \quad (6b)$$

= 等级  $j$  债券的生存概率(或不倒闭概率)

$E[1_{\{\tau_j \leq T\}}] = P_r(\tau_j \leq T) = 1 - P_r(\tau_j > T)$  代表倒闭概率

根据信用等级迁移(或变动)马可夫链矩阵  $\tilde{Q}(t, T)$ , 我们可计算出(6)式内的生存概率如下:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_r(\tau_j > T) &= \sum_{k=1}^K \tilde{q}_{jk}(t, T) \\ &= \tilde{q}_{j1}(t, T) + \tilde{q}_{j2}(t, T) + \cdots + \tilde{q}_{jK}(t, T) \\ &= \tilde{Q}(t, T) \text{ 矩阵内第 } j \text{ 排从等级 } 1 \text{ 至 } K \text{ 移动概率之和} \\ &= 1 - \tilde{q}_{j, K+1}(t, T) \end{aligned} \quad (7)$$

此处:  $\tilde{q}_{j, K+1}(t, T)$  = 从等级  $j$  转移至倒闭的概率, 且从转移矩阵的性

质:  $\sum_{k=1}^K \tilde{q}_{jk}(t, T) + \tilde{q}_{j, K+1}(t, T) = 1$  (任一排, 所有转移概率加总之和为 1)

#### 四、风险中立移动概率的求算

为方便求算信用风险债券及信用价差卖权, 我们必须对风险中立转移概率的结构加以简化。因  $\tilde{q}_0(t, T)$  也是依赖过去及现在的信用历史资料, 故我们可设定风险中立概率可由原来转移概率  $q_0$  乘以一风

险调整项  $l_i(t)$  (或称风险贴水调整, Risk Premium Adjustment), 即  $\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = l_i(t)q_{ij} (j = 1, 2, \dots, N; j \neq N+1)$ 。更详细的表示为:

$$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = \begin{cases} l_i(t)q_{ij}, j \in \hat{N} = \{1, 2, \dots, K\}, & j \neq K+1 \\ 1 - l_i(t)(1 - q_{i, K+1}), & j = K+1 \end{cases} \quad (8)$$

此处:  $l_i(t) > 0, i = 1, 2, \dots, K$ 。Kijima(1998)已有证明风险贴水调整项可以  $l_i(t)$  表示及(8)式。

利用移动矩阵  $\tilde{Q}(t, t+1)$  的性质:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij}(t, t+1) + \tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) \\ &= \sum_{j=1}^K l_i(t)q_{ij} + \tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) \quad (\text{利用(9)}) \\ &= l_i(t) \sum_{j=1}^K q_{ij} + \tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) \\ &= l_i(t)(1 - q_{i, K+1}) + \tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) \\ \therefore l_i(t)(1 - q_{i, K+1}) &\geq 1 (\because \tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) \geq 0) \\ \therefore 0 < l_i(t) &\leq \frac{1}{1 - q_{i, K+1}} \end{aligned} \quad (9)$$

此处:  $1 - q_{i, K+1}$  代表不倒闭的概率, 以  $a_i$  表示之:

$$a_i = 1 - q_{i, K+1} = \sum_{j=1}^K q_{ij}, i = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

因此, 风险贴水调整项  $l_i(t)$  的上限是  $(1 - q_{i, K+1})^{-1} = a_i^{-1}$ , 可由不倒闭概率  $(\sum_{j=1}^K q_{ij})$  求算, 而不必利用倒闭概率  $q_{i, K+1}$ 。不倒闭概率  $a_i$  因是  $K$  个移动概率之和, 因此它是相对大于倒闭概率  $q_{i, K+1}$ 。特别是高等级债券, 其  $q_{i, K+1}$  几乎是零, 但  $a_i$  不会。因此, 在求算  $l_i(t)$  时, 不会遭遇到  $q_{i, K+1}$  可能接近零的困扰(这是 JLT(1997)的困扰)。我们将在下文介绍  $l_i(t)$  的求算, 而后再清楚交代 JLT 的此项困扰。



我们可将(8)改写成矩阵。首先令

$$L_D(t) = \begin{bmatrix} l_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2(t) & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & l_K(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

则从(1)的  $A(t, t+1)$  及(8)的第一等式, (2b) 内  $\tilde{A}(t, t+1)$  可表示为:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, t+1) &= L_D(t)A \\ &= \begin{bmatrix} l_1(t)q_{11} & l_1(t)q_{12} & \cdots & l_1(t)q_{1K} \\ l_2(t)q_{21} & l_2(t)q_{22} & \cdots & l_2(t)q_{2K} \\ . & . & \cdots & . \\ l_K(t)q_{K1} & l_K(t)q_{K2} & \cdots & l_K(t)q_{KK} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

同时, (8)的第二等式代表

$$\tilde{R}(t, t+1) = e - L_D(t)Ae \quad (13)$$

此处:  $e = (1, 1, \cdots, 1)'$ ,  $(1 \times K)$  列向量(Column Vector)。

$Ae = \left( \sum_{j=1}^K q_{1j}, \sum_{j=1}^K q_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^K q_{Kj} \right)'$ ,  $(1 \times K)$  列向量, 每一元素是  $A$  矩阵内各行列之和; 比如,  $\sum_{j=1}^K q_{2j}$  是  $A$  第二行  $K$  个  $q_{2j}$  的总和。

根据(12)及(13), 在本文附录内已推导出, 风险贴水项  $l_i(t)$  可由公式(14)求算:

$$\begin{aligned} l_i(t) &= \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij}^{-1}(0, t) \left[ \frac{V_j(0, t) - \delta V_0(0, t)}{(1 - \delta)V_0(0, t)} \right] \\ (i &= 1, 2, \cdots, K, \hat{N} = \{1, 2, \cdots, K\}) \end{aligned} \quad (14)$$

此处:  $\tilde{q}_{ij}^{-1}(0, t)$  = 代表  $\tilde{A}(0, t)$  反矩阵  $[\tilde{A}^{-1}(0, t)]$  的第  $(i, j)$  项, 当然

假设  $\tilde{A}(0, t)$  的反矩阵存在(Invertible)

$V_0(0, t)$  = 无风险债券的现在价值, 其到期日为  $t$

$V_j(0, t)$  = 信用等级  $j$  债券的现在价值, 其到期日为  $t$ ,  $j = 1, 2,$

..., K

$a_j = 1 - q_{i, K+1}$  是不倒闭概率, 可由(10) 求算。

因此, 当  $t = 1$ , 从现在(时点零)到下一期风险贴水调整项由(14)可表示为

$$L_i(1) = \left( \frac{1}{a_i} \right) \frac{V_j(0, 1) - \delta V_0(0, 1)}{(1 - \delta)V_0(0, 1)} \quad (i \in N = \{1, 2, \dots, K\}) \quad (15)$$

由(6)可观察得知  $V_j(0, 1) > \delta V_0(0, 1)$  [ $\because (1 - \delta)P_r(\tau_j > T) > 0$ ], (15)的分子  $V_j(0, 1) - \delta V_0(0, 1) > 0$ 。故  $L_i(1)$  满足(9)式下限的条件, 即  $L_i(1) > 0$ 。而且(15)的分母:

$$\begin{aligned} (1 - \delta)V_0(0, 1) &= V_0(0, 1) - \delta V_0(0, 1) \geq V_j(0, 1) - \delta V_0(0, 1) \\ &\quad (\because V_0(0, 1) \geq V_j(0, 1)) \\ \therefore \frac{V_j(0, 1) - \delta V_0(0, 1)}{(1 - \delta)V_0(0, 1)} &\leq 1 \end{aligned}$$

也就是

$$L_i(1) \leq \frac{1}{a_i} = \frac{1}{1 - q_{i, K+1}}$$

因此(15)的  $L_i(1)$  也满足(9)的上限条件, 故(15) $L_i(1)$  的定义满足(9)式的上、下限条件, 因此(15)的  $L_i(1)$  是正确的定义(Well Defined)。KK (1998)的实证也证明  $L_i(1)$  值是大于 0, 且小于或等于  $1/a_i$ 。

### JLT 对风险贴水调整项所产生的困扰

JLT(1997)对风险中立转移概率  $\tilde{q}_{ij}(t, t+1)$  的风险调整项  $\pi_i(t)$  有所不同, 于 KK(1998)(8)的定义。JLT 的定义为

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{ij}(t, t+1) &= \pi_j(t)q_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K \\ &= \pi_i(t)q_{ij}, \quad q_{ij} = \text{真正的转移概率} \end{aligned}$$

此处:  $\pi_j(t) = \pi_i(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, K$ ; 但  $j \neq i$   
以更清楚的方式表示如下:

$$\tilde{q}_j(t, t+1) = \begin{cases} \pi_i(t)q_u, & i \neq j \\ 1 - \pi_i(t)(1 - q_u), & i = j \end{cases} \quad (16)$$

JLT 与 KK 对风险贴水调整最大不同之处,在于对  $i$  级债券移动至倒闭情况 ( $K+1$ ) 的转移概率所作的风险调整完全不同,表示如下:

在 JLT 下:

$$\tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) = \pi_i(t)q_{i, K+1}, i = 1, 2, \dots, K$$

在 KK 下:

$$\tilde{q}_{i, K+1}(t, t+1) = 1 - l_i(t)(1 - q_{i, K+1}), i = 1, 2, \dots, K$$

若由等级  $i$  转移至其他非倒闭等级 ( $j=1, 2, \dots, K$ )

在 JLT 下:

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = \pi_i(t)q_{i,j}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, K, K+1$$

在 KK 下:

$$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = l_i(t)q_{ij}, j = 1, 2, \dots, K; j \neq K+1$$

因此, JLT 及 KK 对风险调整项的处理有不同之处。但在 JLT 的定义 (16) 之下, 其所推导出来的风险调整项  $q_i(t)$  会有计算上的估计困扰。利用 (16) 的定义以及上面对 KK 风险贴水调整项  $l_i(t)$  的推导方法, 可推导出 JLT  $\pi_i(t)$  的公式如下: 很类似 (15) 的  $l_i(t)$

$$\pi_i(1) = \frac{V_0(0, 1) - V_i(0, 1)}{(1 - \delta)V_0(0, 1)q_{i, K+1}} \quad (17)$$

此处:  $\pi_i(1)$  的分母涉及  $q_{i, K+1}$ , 它代表债券由等级  $i$  移动至倒闭情况的概率。因此, 就高等级债券 ( $i$ ) 而言,  $q_{i, K+1}$  会很小。影响所及,

$\pi_i(1)$  的值会违反它的确定条件:  $0 < \pi_i(t) \leq \frac{1}{(1 - q_u)}, i = 1,$

$2, \dots, K$ 。也就是, 会因  $q_{i, K+1}$  太小, 而致使  $\pi_i(t) \geq \frac{1}{(1 - q_u)}$ 。反

观, KK 对风险贴水调项的定义 (8) 不会有此问题发生。

## 五、信用风险价差卖权的评价

在时间  $t$ , 等级  $i$  债券的殖利率可表示为:

$$y_i(t, T) = -\frac{\ln V_i(t, T)}{T-t} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, K) \quad (18)$$

( $i = 0$  代表无风险债券,  $T =$  到期日)

等级  $i$  债券殖利率与无风险债券殖利率的价差为:

$$\begin{aligned} \Delta_i(t, T) &= y_i(t, T) - y_0(t, T) \\ &= -\frac{1}{T-t} [\ln V_i(t, T) - \ln V_0(t, T)] \\ &= -\frac{1}{T-t} \ln \frac{V_i(t, T)}{V_0(t, T)} \quad (i = 1, 2, \dots, K) \end{aligned} \quad (19)$$

将(6)式的  $V_i(t, T)$  代入(19), 殖利率价差  $\Delta_i(t, T)$  可改写为:

$$\begin{aligned} \Delta_i(t, T) &= \frac{-1}{T-t} \ln \left[ \frac{V_0(t, T) [\delta + (1-\delta) \tilde{P}_r(\tau_i > T)]}{V_0(t, T)} \right] \\ &= \frac{-1}{T-t} \ln [\delta + (1-\delta) \tilde{P}_r(\tau_i > T)] \quad (i = 1, 2, \dots, K) \end{aligned} \quad (20)$$

此处: 若  $\tau_i \leq t$ , 则  $\tilde{P}_r(\tau_i > T) = 0$ , 代表若倒闭发生在现在( $t$ )或之前, 则在到期前不倒闭的概率当然是零, 也就是  $\tilde{P}_r(\tau_i > T) = 0$ 。令信用(风险)价差卖权的到期日为  $t$ , 其履约价差为  $K$ , 则其到期价值为

$$[K - \Delta_{X_t}(t, T)]^+ = \begin{cases} K - \Delta_{X_t}(t, T), & \text{若 } \Delta_{X_t}(t, T) < K (\text{价内}) \\ 0, & \text{若 } \Delta_{X_t}(t, T) \geq K (\text{无价值}) \end{cases}$$

此处:  $X_t$  代表在卖权到期日标的债券的信用等级是  $X_t = i$  (第  $i$  等级,  $i = 1, 2, \dots, K$ )

因此, 在风险中立下, 信用价差卖权的价值为

$$\begin{aligned}
P_i &= \tilde{E}_i \left\{ e^{-\int_t^T r(s) ds} [K - \Delta_{X_i}(t, T)]^+ \right\} \\
&= \tilde{E}_i [e^{-\int_t^T r(s) ds}] \tilde{E}_i [K - \Delta_{X_i}(t, T)]^+ \\
&= V_0(t, T) \tilde{E}_i [K - \Delta_{X_i}(t, T)]^+ \\
&\quad (\text{利用独立条件})
\end{aligned} \tag{21}$$

(21)内的期望值可再求算如下:

$$\tilde{E}_i [K - \Delta_{X_i}(t, T)]^+ = \sum_{j=1}^{K+1} \tilde{q}_{ij}(0, t) [K - \Delta_j(t, T)]^+$$

此处:  $\Delta_{X_i}(t, T) = \Delta_j(t, T)$  ( $j = 1, 2, \dots, K+1$ )

$\tilde{q}_{ij}(0, t)$  = 从时点0至卖权到期日 $t$ , 等级 $i$ 债券移动变成 $j$ 级债券的转移概率

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{K+1} \tilde{q}_{ij}(0, t) \left\{ K + \frac{1}{T-t} [\ln(\delta - (1-\delta)P_r(\tau, > T))] \right\} \quad (\text{将(18)} \Delta_j(t, T) \text{的定义代入上式等式}) \\
&= \sum_{j=1}^{K+1} \tilde{q}_{ij}(0, t) \left\{ K + \frac{1}{T-t} [\ln(\delta + (1-\delta)(1 - \tilde{q}_{j, K+1}(t, T)))] \right\} \quad (\text{此处 } P_r(\tau, > T) = 1 - \tilde{q}_{j, K+1}(t, T)) \\
&= \sum_{j=1}^{K+1} \tilde{q}_{ij}(0, t) \left\{ K + \frac{1}{T-t} \ln[1 - (1-\delta)\tilde{q}_{j, K+1}(t, T)] \right\}
\end{aligned} \tag{22}$$

再将(22)代入(21)即是欧式信用价差卖权的评价公式如下:

$$P_i = V_i(t, T) \sum_{j=1}^{K+1} \tilde{q}_{ij}(0, t) \left\{ K + \frac{1}{T-t} \ln[1 - (1-\delta)\tilde{q}_{j, K+1}(t, T)] \right\} \tag{23}$$

卖权评价公式内的移动概率 $\tilde{q}_{ij}(0, t)$ 可根据(14)的 $l_i(t)$ 及(8)式求算获得, 其中原来移动概率 $q_{ij}$ 可由实际历史信用等级移动资料估计出来, 比如说, 由标准普尔信用调查(Standard & Poor's Credit Review, 1993)或 Moodys Investors Service 的慕迪特别报告(Moody's Special Report, 1992)都含有 $q_{ij}$ 的估计资料。因此, 信用价差卖权的评价可容易完成求算。

## 六、KK 的实证结果

为加强理论的应用效果, KK(1998)进行一些实证,其重要实证结果列报如下:

1. 由高等级债券(Aaa, Aa 及 A)移动至倒闭情况的概率很小,甚或是 0:

$$q_{Aaa, D} = 0 \quad (D \text{ 代表倒闭})$$

$$q_{Aa, D} = 0.02$$

$$q_{A, D} = 0.00$$

因此,印证 KLT 在  $\pi_i(t)$  估计会有困难(会是负值或太大),但 KK 的  $l_i(t)$  估计不会有此问题。(不会违反(9)式的确定条件。)

2. 风险贴水调整项  $l_i(t)$  会随不同债券等级及不同时间而有所变化,故其时间结构复杂。可详见 KK 的 Exh. 5 及 6。一般而言,低等级债券(Baa 或以下)的回收比率(The Recovery Rate)低,因此其风险贴水调整值大于高等级债券的风险贴水调整值。

3. 就高等级债券(Aa)而言,其信用价差(或殖利率价差) $\Delta_i(t, T)$  会随时间而增加。因此,信用价差卖权的价值会随时间而降低,正如评价定义(21)所示。

4. 就很低等级债券(Ba),其信用价差  $\Delta_i(t, T)$  会随时间而降低。因此,信用价差卖权的价值会随时间而增加,正如评价定义(21)所示。欲进一步了解 KK 的实证内容,可详阅他们的论文。

## 参 考 文 献

CreditMetrics™. J. P. Morgan, 1997.

S. R. Das, "Credit Risk Derivatives", *Journal of Derivatives*, 2(1995), p. 7—23.

S. R. Das, and P. Tufano, "Pricing Credit-Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic", *Journal of Financial En-*

- gineering*, 5, (1996), p. 161—198.
- R. A. Jarrow, D. Lando and S. M. Turnbull. "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spread", *Review of Financial Studies*, 10(1997), p. 481—523.
- R. A. Jarrow, and S. M. Turnbull. "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk", *Journal of Finance*, 50(1995), p. 53—86.
- R. E. Johnson, "The Term Structure of Corporate Bond Yields as a Function of Risk of Default", *Journal of Finance*, 22(1967), p. 313—345.
- M. Kijima, "Markov Processes for Stochastic Modeling", London: Chapman & Hall, 1997.
- \_\_\_\_\_. "Monotonicities in a Markov Chain Model for Valuing Corporate Bonds Subject to Credit Risk", *Mathematical Finance*, 8(1998), p. 229—247.
- \_\_\_\_\_ and K. Komoribayashi, "a Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives", *Journal of Derivatives*, Fall 1988, p. 97—108.
- F. Longstaff, and E. Schwartz. "Valuing Credit Derivatives", *Journal of Fixed Income*, 5(1995), p. 6—12.
- B. Silvers, "An Alternative to the Yield Spread as a Measure of Risk", *Journal of Finance*, 28(1973), p. 933—955.

## 附 录

公式(14)的证明如下:

根据(7),  $P_r(\tau_i > T)$  代表生存概率,也是从等级  $i$  转移至其他非倒闭情况的转移概率之和,以公式表示则为:

$$\tilde{P}_r(\tau_i > T) = \sum_{k=1}^K q_{ik}(0, t)$$

这也就是(3)式矩阵  $\tilde{A}(0, t)$  内第  $i$  排转移概率之和。因此,不同等级债券的生存概率可另以向量  $b(t)$  表示如下:

$$b(t) = \tilde{A}(0, t) \underline{e}$$

$$= \left( \sum_{k=1}^K q_{1k}(0, t), \sum_{k=1}^K q_{2k}(0, t), \dots, \sum_{k=1}^K q_{Kk}(0, t) \right)' \quad (\text{A. 1})$$

( $\underline{e} = (1, 1, \dots, 1)'$ , 是  $(K \times 1)$  列向量)

$b(t)$  向量内的每一等级债券的生存概率  $\hat{P}_i(\tau_i > T)$  已由(6')知道:

$$P_i(\tau_i > T) = \sum_{k=1}^K q_{ik}(0, t) = \frac{V_i(0, t) - \delta V_0(0, t)}{(1 - \delta)V_0(0, t)} \quad (\text{A. 2})$$

此生存概率可由已知资料  $V(0, t)$ ,  $V_i(0, t)$  及  $\delta$  求算获得。

此外, 由(12)我们可求算  $\tilde{A}(0, t+1)$  如下:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(0, t+1) &= \tilde{A}(0, t)\tilde{A}(t, t+1) \quad (\text{利用马可夫链矩阵的基本性质}) \\ &= \tilde{A}(0, t)L_D(t)A \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A. 3}) \\ &\quad (\text{利用(12)式: } \tilde{A}(t, t+1) = L_D(t)A) \end{aligned}$$

对(A. 3)后乘向量  $\underline{e}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(0, t+1)\underline{e} &= \tilde{A}(0, t)L_D(t)A\underline{e} \\ \therefore b(t+1) &= \tilde{A}(0, t)L_D(t)A\underline{e} \quad (\text{由(A. 1)}) \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$

此处:  $b(t+1) = \tilde{A}(0, t+1)\underline{e}$  (由(A. 1))

假设  $\tilde{A}(0, t)$  的反矩阵存在, 则由(A. 4)获得

$$L_D(t)A\underline{e} = \tilde{A}^{-1}(0, t)b(t+1) \quad (\text{A. 5})$$

$$\begin{aligned} \text{此处: } A\underline{e} &= \left( \sum_{k=1}^K q_{1k}, \sum_{k=1}^K q_{2k}, \dots, \sum_{k=1}^K q_{Kk} \right) \\ &= \text{不同等级债券的生存概率向量, 详见(13)内的 } A\underline{e} \\ &= (1 - q_{1, K+1}, 1 - q_{2, K+1}, \dots, 1 - q_{K, K+1}) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_K) \\ a_j &= 1 - q_{j, K+1} \quad (j = 1, 2, \dots, K) \end{aligned}$$

利用(A. 1)及(A. 2), 将(A. 5)的各矩阵及向量乘积展开获得下列公式:

$$l_i(t)a_i = \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij}^{-1} \left[ \frac{V_j(0, t) - \delta V_0(0, t)}{(1 - \delta)V_0(0, t)} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, K)$$

再除以  $a_i$  就是(14)的  $l_i(t)$ 。



## 第三十四章 信用价差模型:动态过程

### 一、简介

由前一章,我们已知信用价差是指某信用等级债券(AAA, AA, BBB 等等)殖利率与无风险债券(政府债券)殖利率间的价差。信用价差会随着公司信用等级的(随机)变动而扩大或缩小。同时,信用价差变动过程是决定债券、信用价差衍生性商品、信用交换(Default Swaps)、信用保险单(Credit Insurance Contracts),以及其他信用衍生性商品价格的主要因素。Arvanitis, Gregory 及 Laurent(1999, 简称 AGL)已经建立评估信用价差的模型,它可广泛应用于债券、信用交换以及其他相关信用衍生性商品的评价。

就某一信用等级的债券而言,其信用价差会有间断性的跳动(Discrete Jumps),因为信用等级可能会往上升级(往上跳动)或往下降级,甚或进入倒闭等级。另外,属于某一信用等级的债券也会因信用品质的持续改进或下降(Continuous Components),导致信用贴水的变动,因此该债券的信用价差也会因之不同于同一信用等级的其他债券的信用价差(即使无风险利率不变)。也就是说,同一信用等级的信用价差并不一定是相同。虽然 Jarrow, Lando 及 Turnbull(1997, JLT)是假设同一信用等级债券的信用价差相同,但 AGL 的信用价差模型可松绑此假设,因此 AGL 的模型更切合上述实证资料所示的差异性。在本章中,我们将详细介绍 AGL 的信用价差模型,以及如何决定短期及长期信用价差。

## 二、信用价差与转移概率

令  $B(t, T)$  代表在时间  $t$  无风险零息债券的价格, 该债券到期时 ( $T$ ) 支付一元, 则依定义

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, \tau) d\tau} \quad (1)$$

此处:  $f(t, \tau)$  代表在未来时点  $\tau$  的瞬间远期利率, 它是从现在时点  $t$  观察的远期利率。有信用风险的债券, 其折现率应是瞬间远期利率加上瞬间远期信用价差 (Instantaneous Forward Credit Spread)。因此, 到期时支付 \$1 的信用风险债券价格为:

$$v(t, T) = e^{-\int_t^T [f(t, \tau) + s(t, \tau)] d\tau} = B(t, T) e^{-\int_t^T S(t, \tau) d\tau} \quad (2)$$

此处:  $S(t, \tau) =$  瞬间远期信用价差。

根据  $S(t, \tau)$ , 我们可表示短期信用价差  $S(t, t)$  为:

$$S(t, t) = \frac{1}{T-t} \int_t^T S(t, \tau) d\tau \quad (3)$$

$S(t, t)$  代表在时点  $t$ , 到期日  $T$  债券的 (短期) 信用价差。因债券有不同到期日, 因此不同债券有不同信用价差, 且随到期日不同而有差异。信用风险会随到期日不同的差异结构而形成信用价差期间结构 (Term Structure of Credit Spreads)。我们将会在下节介绍如何决定  $S(t, t)$ 。

令  $q(t, T)$  代表在时点  $t$  观察某债券在到期时 ( $T$ ) 及之前变成倒闭的累积 (风险中立) 概率 (当然在  $t$  倒闭尚未发生)。在到期时或之前, 若倒闭发生, 持有人回收比率为  $\delta (< 1)$ ; 若不发生倒闭, 持有人获得 \$1。则信用风险债券的价格可表示为

$$v(t, T) = B(t, T) [1 - q(t, T) + \delta q(t, T)] \quad (4)$$

此处:  $1 - q(t, T) =$  从  $t$  至  $T$ , 不发生倒闭的 (风险中立) 概率

对债券评价模型(4)解出  $q(t, T)$  即是隐含(累积)倒闭概率(Default Probabilities):

$$q(t, T) = \frac{1 - v(t, T)/B(t, T)}{1 - \delta} \quad (5)$$

倒闭概率与远期信用价差的关系可透过(2)及(5)求得, 即是将(2)的  $v(t, T)$  代入(5)并简化获得

$$(1 - \delta)q(t, T) = 1 - e^{-\int_t^T S(t, \tau) d\tau} \quad (6)$$

两者的相连关系可由(6)观察得知:

1. 若倒闭概率上升(或下降), 则远期信用价差增加(或减少)。
2. 或者, 当信用价差增加(或减少), 代表倒闭概率上升(或下降)。

注: 由(6),  $q(t, T) = \frac{1 - e^{-\int_t^T S(t, \tau) d\tau}}{1 - \delta}$

$$1 - q(t, T) = \frac{e^{-\int_t^T S(t, \tau) d\tau} - \delta}{1 - \delta}$$

同时, 由(5)可求出短期信用价差  $S(t, t)$  如下:

$$\begin{aligned} (1 - \delta)q(t, t + dt) &= 1 - \left[ 1 + \left( - \int_t^{t+dt} S(t, \tau) d\tau \right) dt + \dots \right] \\ &\approx \left( \int_t^{t+dt} S(t, \tau) d\tau \right) dt \\ \therefore S(t, t) dt &\approx (1 - \delta)q(t, t + dt) \end{aligned} \quad (7)$$

此处:  $S(t, t) = \int_t^{t+dt} S(t, t + \tau) d\tau$  是在时点  $t$  的短期信用价差(Short Term Credit Spread), 正如(6)式所示, 短期信用价差  $S(t, t)$  与时点  $t$  的倒闭概率有直接的关系[由(7)式代表];  $q(t, t + dt)$  称为区域倒闭概率(Local Default Probabilities)。此外, 根据(7)式, 在时点  $t$  的倒闭过程强度  $\lambda(t)$  (Intensities of the Default Process)可表示为:

$$\lambda(t) = \frac{q(t, t + dt)}{dt} \quad (8)$$

### 三、两种情况模型(Two-State Model)

有些模型对倒闭过程假设只有两种情况:倒闭及不倒闭(Default and Nondefault),同时假设倒闭概率 $q(t, T)$ 为可确知的概率(Deterministic)。根据(6)及(7),倒闭概率 $q(t, T)$ 可经由倒闭过程的强度 $\lambda(t)$ 及(2)的改写式计算,表示如下:

$$q(t, T) = 1 - e^{-\int_t^T \lambda(\tau) d\tau} \quad (9)$$

(9)式的 $q(t, T)$ 其实相当于在到期( $T$ )前,债券跳跃至倒闭的概率(即倒闭概率),而 $\lambda(\tau)$ 代表柏松过程(Poisson Process)的强度指数。

注:柏松过程 $N_t$ 的概率分布可表示为

$$P_r\{N_t = k\} = \frac{e^{-\lambda(t)} \lambda(t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(N_t) = \lambda(t) = \text{Var}(N_t)$$

Cinlar(1975, p. 70—105)对柏松过程有详细的介绍。

因倒闭概率 $q(t, T)$ 是可确知的概率(即不是随机变动),远期信用差 $f(t, \tau)$ 、短期信用价差 $S(t, t)$ 及风险强度 $\lambda(t)$ (Risk Intensity)都是可确知的。

在实务上,因债券价格不是连续性,而是间断性(Discrete Bond Prices)。在计算倒闭概率时, $\lambda(t)$ 的假设是一种片段固定常数的结构(A Piecewise Constant Structure)。因此, $q(t, T)$ 可表示为

$$q(t, T) = 1 - e^{-\int_t^T \alpha(\tau) d\tau} \quad (10)$$

此处: $\alpha(\tau)$ 代表片段固定常数,即在每一时段 $[t_{i-1}, t_i]$ 它是一固定常数 $\alpha_i$ 。为计算远期信用价差及倒闭概率,每一个 $\alpha_i$ 的选择必须能够使资料内所观察的等级 $i$ 债券的合理价格(模型价格)等于它的市场价格(Priced Exactly)。求解 $\alpha_i$ 的方法其实是等于求解一系列的非线性方程式,可借用 Sundaresan(1997, p. 176—80, 187—90)所描述的拔靴法(Boot-

strapping方法)来求解。

#### 四、信用等级转移模型

正如前一章,债券信用等级的动态过程可以时间同质的马可夫链  $X$  (Markov Chain)来代表,  $X = \{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ 。在本章,马可夫链的情况空间(The State Space)设定有  $K$  个情况。情况 1 代表最佳信用等级,情况 2 次佳信用等级,而  $(K-1)$  代表最差(最低)等级,  $K$  代表倒闭。令  $Q(t, T)$  代表信用等级转移概率矩阵,  $t$  是现在时点,  $T$  为到期日。 $q_{ij}(t, T)$  代表在时点  $t$  至到期日  $T$  债券等级由  $i$  移动至  $j$  的概率。 $q_{iK}$  代表债券等级由  $i$  转移至倒闭  $K$  的转移概率,也就是倒闭概率。 $Q(t, T)$  最低一行的转移概率为  $q_{K1} = q_{K2} = \dots = q_{K-1}, K = 0$  及  $q_{KK} = 1$ 。

根据 Karlin-Taylor(1975, p. 152), 转移概率矩阵  $Q(t, T)$  可表示为:

$$\begin{aligned} Q(t, T) &= e^{A(T-t)} = I + A(T-t) + \frac{A^2(T-t)^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(T-t)^n}{n!} \end{aligned} \quad (11)$$

此处:  $(K \times K)$  矩阵  $A$  称为  $Q(t, T)$  的生成之矩阵(Generator)。

利用 Karlin-Taylor(1975, p. 151 (8.7)式), (11)式可另表示为:

$$\lim_{T \rightarrow t} \frac{Q(t, T) - Q(t, t)}{T - t} = \lim_{T \rightarrow t} \frac{Q(t, T) - I}{T - t} = A \quad (12)$$

观察(12)可知,若将  $Q(t, T)$  视为某种债券价格,则(12)式说明,  $A$  代表该债券的短期报酬率(Short Rate, 即短期利率)。因此,若假设运生矩阵乃是固定常数,则短期利率也是固定常数。

此外, (11)式告诉我们,生成之矩阵  $A$  是与短期移动概率  $q(t, t+dt)$  有相关,因为由(11)可知

$$Q(t, t+dt) \approx I + A dt \quad (13)$$

此处:我们可设定生成之矩阵  $A$  内的元素为:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1, K-1} & \lambda_{1, K} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2, K-1} & \lambda_{2, K} \\ \lambda_{K-1, 1} & \lambda_{K-1, 2} & \cdots & \lambda_{K-1, K-1} & \lambda_{K-1, K} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

因此, (短期)移动概率可表示为:

$$\begin{aligned} q_{ii}(t, t+dt) &= 1 + \lambda_i dt \quad (i = 1, 2, \cdots, K (\lambda_{K, K} = 0)) \\ q_{ij}(t, t+dt) &= \lambda_{ij} dt \quad (i, j = 1, 2, \cdots, K-1, i \neq j, i \neq K) \\ q_{Kj}(t, t+dt) &= 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, K-1 \text{ (} Q \text{ 第} K \text{ 行的前} (K-1) \\ &\quad \text{移动概率皆为} 0)) \end{aligned}$$

$$q_{K, K}(t, t+dt) = 1$$

根据(13)及(14),生成之矩阵内的元素  $\lambda_{ij}$  应满足下列条件才能符合信用价差的动态过程:

1.  $0 \leq \lambda_{ij} < 1 \quad (i \neq j)$   
( $\because 0 \leq q_{ij}(t, t+dt) < 1$ )
2.  $\lambda_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, K)$   
( $\because 1 + \lambda_{ii} \leq 1$ )
3.  $Q$  的每一行之和应是 1, 即是

$$(1 + \lambda_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \lambda_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, K)$$

也是等于,  $\sum_{j=1}^K \lambda_{ij} = 0$  (或  $\lambda_{iK} = -\sum_{j=1}^{K-1} \lambda_{ij} \leq 0$ )

4. 因第  $K$  情况代表倒闭, 它是吸收情况 (Absorbing State)。因此,  $\lambda_{Kj} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, K (\because q_{Kj} = 0 \text{ 及 } q_{KK} = 1))$ 。

5. 信用等级  $(i-1)$  的信用风险一定比信用等级  $i$  的信用风险高:

$$\sum_{j < K} \lambda_{i+1, j} \geq \sum_{j < K} \lambda_{i, j} \quad (K \neq i+1)$$

相当于  $\lambda_{i+1, K} \geq \lambda_{i, K}$ , 由等级  $(i+1)$  进入倒闭的概率大于或等于由等级  $i$  进入倒闭的概率。也相当于

$$1 - \sum_{j < K} \lambda_{i+1,j} \leq 1 - \sum_{j < K} \lambda_{i,j} \quad (K \neq i+1)$$

生成之矩阵  $A$  的特征值 (Characteristic Roots 或 Eigenvalues) 及特征向量 (Characteristic Vectors 或 Eigenvectors) 可运用对角化 (Diagonalization) 求解。根据 Karlin 及 Taylor [1975, p. 152, (8.1) 式], 转移概率矩阵  $Q(t, T)$  可利用矩阵的指数函数表示如下:

$$Q(t, T) = U e^{D(T-t)} U^{-1} \quad (15)$$

此处:  $D$  是对角矩阵 (Diagonal Matrix), 其元素为

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & d_K \end{bmatrix}$$

( $d_1, d_2, \cdots$  及  $d_K$  是生成之矩阵  $A$  的特征值)

$$e^{D(T-t)} = \begin{bmatrix} e^{d_1(T-t)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2(T-t)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_K(T-t)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$U$  是正交矩阵 (Orthogonal Matrix), 其第  $i$  栏代表第  $i$  (右边) 特征向量  $\underline{u}_i$  ( $A\underline{u}_i = d_i\underline{u}_i$ ),  $\underline{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, \cdots, u_{Ki})'$

注: 一个  $K \times K$  对称矩阵  $A$  存有一个垂直矩阵  $U$  能使  $A$  转化为对角矩阵  $D$ :

$$U'AU = D, \quad U' = U^{-1}$$

$$\therefore A = UD^*U^{-1}$$

为方便计算转移概率  $q_{ik}(t, T)$ , 令垂直矩阵  $U$  的元素为  $u_{ij}$ , 其反矩阵  $U^{-1}$  的元素  $\bar{u}_{ij}$ 。  $q_{ik}(t, T)$  的计算求解如下:

由(13)

$$A = Q(t, T) - I = U e^{D(T-t)} U' - I$$

$I$  = 单位矩阵 (Identity Matrix)

$$= U(e^{U(1-t)} - I)U', UU' = I \quad (17a)$$

∴ 倒闭概率为:

$$q_{i,K}(t, T) = \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} [e^{d_j(T-t)} - 1] \quad (i = 1, 2, \dots, K-1) \quad (17b)$$

注:因  $A$  的  $\lambda_{KK}$  元素是零 ( $\lambda_{KK} = 0$ ), 故由(17)得知第  $K$  个特征值  $d_K$  应是零 ( $d_K = 0$ ,  $\because e^0 - 1 = 0$ )。其对应的特征向量是单位向量 (Unit Vector), 即  $\underline{u}_K = (1, 1, \dots, 1)'$  [ $\because A\underline{u}_K = 0 \Rightarrow \underline{u}_K = (1, 1, \dots, 1)'$ ,  $A$  的每一行之和为零]。

(17b)式显示运生矩阵特征值  $d_j$  的重要性。它是决定倒闭概率及信用价差[(7)]的重要元素。此外,已知  $d_K = 0$ , 其他特征值应是  $d_j < 0$ ,  $j \neq K$ 。(这是因为若  $d_j > 0$ , 转移概率将会膨胀,而且大于1)。因此,  $d_K$  是最大的特征值,也是  $A$  的特征值光谱(Spectral Radius):  $\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq K} |d_j| = d_K = 0$ 。

### 信用风险零息债券的评价

一旦倒闭概率求算后,具有信用风险的零息债券(Credit Risky Zero-Coupon Bond)的评价就容易获得如下:

$$V^i(t, t+h, A) = B(t, t+h)[1 - q_{iK}(t, t+h) + \delta q_{iK}(t, t+h)] \quad (18)$$

此处:  $V^i(t, t+h, A)$  = 信用等级  $i$  零息债券在时间  $t$  的价值,其到期日为  $t+h$  ( $h$  为尚存到期日,或存续时间)

$$q_{iK}(t, t+h) = \sum_j u_{ij} \bar{u}_{jK} (e^{d_j h} - 1) \quad (19)$$

= 等级  $i$  债券在到期时的倒闭概率(若倒闭,支付  $\delta$ )

$1 - q_{iK}(t, t+h)$  = 等级  $i$  债券的不倒闭概率(若不倒闭,到期时支付 \$1)

$B(t, t+h)$  = 无风险零息债券在时间  $t$  的价值,尚存到期为  $h$



### 信用价差的求算

一旦倒闭概率  $q_{KK}(t, t+h)$  求算后,信用价差可经由(6)求算如下:

$$\begin{aligned}(1-\delta)q_{iK}(t, t+h) &= 1 - e^{\int_t^{t+h} S_i(t, \tau) d\tau} \\ \ln[1 + (\delta-1)q_{iK}(t, t+h)] &= \int_t^{t+h} S_i(t, \tau) d\tau \\ &\approx -hS_i(t, t+h)\end{aligned}$$

∴ 信用等级  $i$  债券的信用价差  $S_i(t, t+h)$  为:

$$S_i(t, t+h) = \frac{-1}{h} \ln[1 + (\delta-1)q_{iK}(t, t+h)] \quad (20)$$

只要债券的信用等级不变,  $q_{iK}(t, t+h)$  将是固定不变。因此,信用价差也不变。

### 短期信用价差求算

根据(7),短期信用价差为:

$$\begin{aligned}S_i(t, t) &= (1-\delta)q_{iK}(t, t+dt) \quad (i=1, 2, \dots, K-1) \\ &= (1-\delta)\lambda_{iK}(dt) \quad (\text{见(14)内 } q_{ij}(t, t+dt) \text{ 及 } \lambda_{ij} \text{ 的定义}) \\ &= (1-\delta) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} [e^{d_j dt} - 1] \quad (\text{由(17')})\end{aligned} \quad (21a)$$

$$= (1-\delta) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} \quad (\text{当 } dt \rightarrow 0) \quad (21b)$$

此处:  $\lambda_{iK} dt = q_{iK}(t, t+dt)$ , 它是生成之矩阵  $A$  最后一栏(第  $K$  栏的元素)

因此,短期信用价差  $S_i(t, t)$  与瞬间倒闭概率  $\lambda_{iK}$  有直接相连的关系,也与回收比率  $\delta$  有直接的关系。

### 长期信用价差

长期信用价差  $S_i(t, t+T)$  可直接由(20)另表示为:

$$S_i(t, t+T) = \frac{-1}{T-t} \ln[1 + (\delta-1)q_{iK}(t, T)] \quad (22)$$

由(21)及(22)得知,利用债券价格及信用等级历史资料,回收率 $\delta$ 及倒闭概率 $q_K(t, t+T)$ 可估计求得信用等级的转移过程(即转移概率),再由转移概率透过(21)及(22)就是求算信用价差的时间结构。因此,本节的信用等级转移模型可以评价任何以信用价差为标的物的衍生性商品,诸如信用卖权,它可用来保护信用降级的风险。此外,在信用风险控管方面,若必须逐日依据信用价差(或信用等级)变动来计算债券组合的损益时,本节的信用等级转移模型当然是不可或缺的重要求算工具。

## 五、有记忆的信用转移模型

根据 Carty 及 Lieberman(1997)的实证研究,刚升级的公司(债券)信用价差显示比同一级债券信用价差小(而不是同一等级都有相同的信用价差)。同时,刚降级公司债券的信用价差比同一级债券信用价差大,这显示信用移动有记忆性,这是因为刚升级公司也许正处于信用上升阶段,而降级公司也许正处于信用下降阶段。因此,若能将前一节的信用移动模型加入记忆功能,则更能显示模型的完整性。调整方法可将某些等级或全部等级另增 $X^+$ 及 $X^-$ ,亦即将原来的等级 $X$ ,另增加两个等级 $X^+$ 及 $X^-$ 。 $X^+$ 代表刚升级, $X^-$ 刚降级。当然在实务上并无真正 $X^+$ 及 $X^-$ 的等级。将信用等级另增加 $X^+$ 及 $X^-$ 等级后,上一节的信用移动模型可重新推导每一等级 $i$ 的倒闭概率、短期及长期信用价差。虽然求算过程会涉及更多的参数,但根据上一节的推导方法是可行的。如此,最近的信用等级转移资料可即时反映于估计未来信用等级动态过程及信用价差时间结构。

## 六、信用转移模型:随机倒闭概率

在前一节介绍中,我们已知,当转移概率 $q_{ij}(t, T)$ 是可确知时,

信用价差也是可确知[见(20)及(21)]。但当市场情况变动时,信用等级随之变动,因此转移概率及信用价差也随之变动。这是因为,当市场情况变动,信用风险贴水随之变动,信用价差当然也随之变动。此外,信用风险贴水将会呈现随机变动。因此,即使属于同一信用等级(或信用等级不变)的债券,其信用价差也有差异(不会相同)。为考虑市场情况变动的效应,转移概率矩阵(15)可重新改写为:

$$Q(t, T) = U \{ E_t [ e^{D \int_t^T g(\tau) d\tau} ] \} U^{-1} \quad (23)$$

此处: $g(\tau)$ 代表一个状态变量(State Variable)。它可有概率分布(会在下文交代)。则(23)变成原来的(15)。 $E_t$ 代表在时间 $t$ 的期望值。

根据(23)移动概率的定义,前一节的重要结果可修正调整如下:

1. 倒闭概率:

$$q_i(t, T) = \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} \{ E_t [ e^{d_j \int_t^T g(\tau) d\tau} ] - 1 \} \quad (24)$$

(请与(17b)及(19)比较)

2. 信用等级 $i$ 债券的评价与(18)式相同:

$$V(t, t+h, g(\tau)) = B(t, t+h) [ 1 - q_{iK}(t, t+h) + \delta q_{iK}(t, t+h) ] \quad (25)$$

此处:

$$q_{iK}(t, t+h) = \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} \{ E_t [ e^{d_j \int_t^{t+h} g(\tau) d\tau} ] - 1 \} \quad (26)$$

3. 短期信用价差:

$$\begin{aligned} S_i(t, t) &= (1 - \delta) q_{iK}(t, t + dt) \\ &= (1 - \delta) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} \{ E_t [ e^{d_j \int_t^{t+dt} g(\tau) d\tau} ] - 1 \} \\ &= (1 - \delta) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} E_t (e^{d_j g(t)} - 1) \quad (\text{当 } dt \rightarrow 0) \quad (27) \\ &\quad (\text{与(21)比较}) \end{aligned}$$

## 4. 长期信用价差:

$$S_i(t, t+T) = \frac{-1}{T-t} \ln[1 + (\delta-1)q_{iK}(t, T)] \quad (28)$$

此处:  $q_{iK}(t, T) = (24)$ 。

在以上修正调整中,  $g(t)$  也可以两种随机过程代表之, 如下:

1. Ornstein-Uhlenbeck 随机过程: 是均值回归模型之一 (Mean-Reversion Process):

$$dg_t = -ag_t dt + \sigma dW_t \quad (29a)$$

$$= a(0 - g_t) dt + \sigma dW_t \quad (29b)$$

2. 平方根随机过程 (Square-Root Process):

$$dg_t = \mu g_t dt + \sigma g_t^{1/2} dW_t \quad (30)$$

若以其中之一代表  $g(t)$  的变动过程, 则转移概率及其生成之矩阵  $A$  将会呈现随机性, 而且正如 (27) 所示, 转移概率是仿射函数 (Affine Functions of  $g(t)$ ) 的指数函数组合 [见 (24)]。则其结果将是 Duffie-Kan (1996) 仿射类函数的延伸。

若  $g(t)$  是一个情况变量, 且有随机性, 则短期信用价差 (21) 可改写为

$$\begin{aligned} S_i(t, t) &= (1-\delta)q_{iK}(t, t+dt) \quad (i \neq K) \\ &= (1-\delta)\lambda_{iK}(dt) \\ &= (1-\delta) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{ij} E_t(e^{d_j g(t)} - 1) \quad (\text{利用 (27) 原理}) \\ &= (1-\delta) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} E(d_j g(t)) \quad (\text{利用泰勒展开式}) \end{aligned} \quad (31)$$

因此, 随机性的短期信用价差可表示为:

$$S_i(t, t) = (1-\delta)g(t) \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij} \bar{u}_{jK} d_j \quad (32)$$

所以, 当  $g(t)$  只是一个情况变量时, (32) 说明短期信用价差  $S_i(t, t)$  及 (信用) 风险强度  $\lambda_{iK}$  是与 (期望) 情况变量成为比例关系, 其比例分别是

$(1-\delta)\sum_{j=1}^{K-1}u_{ij}\bar{u}_{jK}d_j$ 。因此,就统计而言, $S_i(t, t)$ 及 $\lambda_{iK}$ 与情况变量 $g(t)$ 是完全相关的(Pefectly Correlated)。

## 七、统计相关的信用价差

第五节提及信用价差及(信用)风险强度 $\lambda_{iK}$ 与情况变量呈现完全相关[参见(32)]。这种结果当然与实务情况不太吻合。因此,我们应将移动概率矩阵 $Q(t, T)$ 加以调整,使信用价差(及风险强度)与情况变量不是完全相关(Less Than Perfectly Correlated)。假 $Q(t, T)$ 的结构是

$$Q(t, T) = UE_t(e^{\int_t^T D(\tau)d\tau})U^{-1} \quad (33)$$

此处: $D(\tau)$ 是一对角矩阵(Diagonal Matrix)。它的代表元素 $d(t)$ (Typical Elements)可呈现某种随机过程,诸如前一节所述的Ornstein-Uhlenbeck过程或平方根过程[参见(29)及(30)]。

根据(33),转移概率可表示为:

$$q_{iK}(t, T) = \sum_{j=1}^{K-1} u_{ij}\bar{u}_{jK} E_t(e^{\int_t^T d_j(\tau)d\tau} - 1) \quad (j = 1, 2, \dots, K-1) \quad (34)$$

与(31)及(32)的分析相似,信用价差可表示为:

$$\begin{aligned} S_i(t, t) &= (1-\delta)q_{iK}(t, t+dt) \\ &= (1-\delta)\lambda_{iK}(t) \\ &= (1-\delta)\sum_{j=1}^{K-1} u_{ij}\bar{u}_{jK} E(e^{d_j(t)} - 1) \text{ (利用(27)原理)} \\ &= (1-\delta)\sum_{j=1}^{K-1} u_{ij}\bar{u}_{jK} E(d_j(t)) \end{aligned}$$

∴ 随机性的短期信用价差可表示为:

$$S_i(t, t) = (1-\delta)\sum_{j=1}^{K-1} u_{ij}\bar{u}_{jK} d_j(t) \quad (35)$$

此处:  $d_j(t)$  是生成之矩阵  $A$  的特征值。正如前一节,  $d_j(t) (j = 1, 2, \dots, K-1)$  可呈现多变量 Ornstein-Uhlenbeck 随机过程或是平方根随机过程。我们可假设  $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_K(t))$  为一简单的结构:  $d(t) = Bg(t)$ ,  $B$  是  $K \times N$  矩阵,  $g(t)$  是  $N$  个 Ornstein-Uhlenbeck (简称 OU) 相互独立变量。若  $N = 1$ , 则 (35) 变成 (32) 所代表的意义: 即  $S_i(t, t)$  与情况变量  $g(t)$  (或  $d(t)$ ) 是完全相关。但若  $N > 1$ , 则  $S_i(t, t)$  是  $N$  个 OU 变量的线性组合。因此,  $S_i(t, t)$  就不会与  $d(t)$  (状态变量或特征值) 成为完全相关, 也就是相关系数小于 1。如此, 才能与实证证据相吻合。

假设  $g(t)$  是多变量 OU 随机过程, 正如 (29) 所示, 以多变量方式表示随机过程为  $dg(t) = A[G - g(t)]dt + CdW_t$ , 此处  $A$  及  $C$  是  $N \times N$  对角正方矩阵 (Diagonal Matrix),  $G$  是  $N \times 1$  向量。根据 AGL (1999) 的推导,  $E_t[e^{\int_t^T d(r)dr}]$  可由下列公式计算:

$$E_t[e^{\int_t^T d(r)dr}] = \exp\left[G_j(t, T) + \sum_{n=1}^N A_{jn}(t, T)g_n(t)\right] \quad (36)$$

此处:  $A_{jn}$  及  $G_j$  都是确定不变的函数。

因此 (33), (34) 及 (35) 可以 (36) 的计算来估计短期信用价差  $S_i(t, t)$ 。这意味着, 即使信用等级不变,  $S_i(t, t)$  也能适当反映信用价差的跳跃, 得以捕捉其效应。而且, 任何信用等级 ( $j = 1, 2, \dots, K-1$ ) 都可适当捕捉信用价差跳跃的效应。相较之下, Longstaff-Schwartz (1995) 的均值回归模型只能捕捉某些信用等级 (而不是任何等级) 信用价差的跳跃效应。

注: AGL 的理论也有实际验证结果, 有兴趣读者应详阅论文的实证部分。

## 参 考 文 献

A. Arvanitis, J. Gregory and J. P. Laurent, "Building Models for Credit

- Spreads". *The Journal of Derivatives*, Spring 1999, p. 27—43.
- L. V. Carty and D. Lieberman, "Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers 1920—1996", Moody's Investor Services, July 1997.
- E. Cirlar, "Introduction to Stochastic Process", Prentice-Hall, Inc. (1975)
- D. R. Cox and H. D. Miller, "The Theory of Stochastic Process", Chapman and Hall Ltd., London (1972).
- S. R. Das and P. Tufano. "Pricing Credit Sensitive Debt When Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic", *Journal of Financial Engineering*, Vol. 5, No. 2 (June 1996).
- D. Duffie and R. Kan. "A Yield Factor Model of Interest Rates", *Mathematical Finance*, 6(1996), p. 179—406.
- D. Duffie and D. Lando. "The Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Data", Working paper, Stanford University, 1998.
- F. J. Fabozzi, *Bond Market, Analysis and Strategies*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- J. Hull and A. White. "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3(1990), p. 573—592.
- D. Heath, R. Jarrow and A. Morton. "bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, 60(1992), p. 77—105.
- R. A. Jarrow, D. Lando and S. M. Turnbull. "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads", *Review of Financial Studies*, 10, 2 (1997), p. 481—523.
- S. Karlin and H. M. Taylor, "A First Course in Stochastic Process", Academic Press, Inc. (1975).
- E. Longstaff and E. Schwartz. "Valuing Credit Derivatives", *Journal of Fixed Income*, June 1995, p. 6—12.
- S. Sundaresan, "Fixed Income Markets and Their Derivatives", South-Western College Publishing, (1997).

## 专有名词中文索引

Black-Scholes 选择权模型	13
Brownian Motion	41
CRR 二项式评价模型 CRR Binominal Pricing Model	345, 356
Delta	21
Feynman-Kac 公式	28
Gamma	22
Gamma 概率分布	226
Girsanov 定理	40
Itô Process	4
Ito 定理 (Itô Lemma)	6
Martingale 评价方法 Martingale Pricing Method	37
Merton 选择权模型	26
Ornstein-Uhlenbeck 随机过程	472
Radon-Nikodym Derivative (Girsanov Factor)	41
Rho	23
S 形肠状 Sigmoid Shape	424
Theta	23
Vega	22
一般平均反转模型 Mean-Reversion Model	410
一阶动差 First Moment	396
二元素选择权 Binary Options	44, 106
二元正态分布 Bivariate Normal Distribution	194, 404



二元树 Binominal Tree	331, 343, 345
二阶动差 Second Moment	396
下出局买权 Down-and-Out Call Option	403
下出局买权 Down-and-Out Call	46
下限率卖权 Floors	409, 424
上限型权证 Capped Call	53
上限率买权 Caps	409, 424
互换选择权 Exchange Options	123
片段固定常数结构 Piecewise Constant Structure	464
牛顿法 Newton-Raphson	340
以两种资产为标的物的最大值最小值选择权 Options on The Maximum of the Two Risky Assets	137
付息债券选择权 Options on Coupon Bonds	438
代表元素 Typical Elements	473
可回收的债券价值比率 Recovery Rate	450
可确知的 Deterministic	464
外汇选择权 Foreign Exchange Options	30, 373
市场价格 Priced Exactly	464
布朗运动 Brownian Motion, Wiener Process	1
平方根随机过程 Square-Root Process	472
打赌选择权 Bet Options	384
交叉外汇远期契约或选择权 Cross Currency Forward Contracts or Cross-Currency Options	175
交换选择权 Swaptions	409, 424
仿射函数 Affine Functions	472
回收比率 The Recovery Rate	458
回顾型选择权 Lookback Options	302
回顾型选择权: 固定履约价 Fixed Strike	302
回顾型选择权: 浮动履约价 Floating Strike	302, 311
多元间断随机变量 Multinomial Discrete Variables	404

多点重设型选择权	281
多点重设型选择权避险参数	283,290
有限差分法 Finite-Difference Methods	331,341
自然布朗讯息集合 Natural Brownian Filtration	40
利率反转速度 Mean-Reversion Speed	411
利率均衡论 Interest Rate Parity, IRP	30
短期利率 Short Rate	418,449
即期利率 Spot Rate	447
吸收情况 Absorbing State	447,466
均值回归模型 Mean-Reversion Process	472
局部支付型权证 Payoff Segment Call	55
投资等级 The Investment Grade	449
亚洲选择权 Asian Options or Average Options	226,380
拔靴法 Bootstrapping	464
抵付型权证 Deductible Call	60
柏松过程 Poisson Process	464
波动度期间结构 Term Structure of Volatility	409
列向量 Column Vector	448
股价算术平均值	227
近似概率分布 Approximating Distribution	396
信用交换 Default Swaps	461
信用保险单 Credit Insurance Contracts	461
信用风险价差 Credit Risk Spread	446
信用风险债券 Credit Risky Bonds	446
信用风险零息债券 Credit Risky Zero-Coupon Bond	468
信用评鉴等级 Credit Rating	446
信用价差期间结构 Term Structure of Credit Spreads	462
信用价差卖权 Credit Risk Put or The Put on The Yield Spread	446
正交矩阵 An Orthogonal Matrix	467

封闭解 Closed-Form Solutions	395
后定选择权 Chooser Options	131, 387
指标函数 Indicator Function	139, 450
界限选择权 Barrier Options	395
美式重设型卖权 American Reset Put	267
美式选择权 American Options	331, 367
重设型熊市认售权证 Bear Market Warrants	255, 270
重设型选择权 Reset Options	281
重设溢酬 Reset Premium	264
风险中立	37
风险的市场价格 Market Price of Risk	413
风险强度 Risk Intensity	464
风险贴水调整 Risk Premium Adjustment	452
倒闭情况 Default State	447
倒闭过程强度 Intensities of The Default Process	463
倒闭概率 Default Probabilities	463
倒数 Gamma 概率分布	226
时间同质 Time-Homogeneous or Stationary	447
时间步骤 Time Steps	395
时间异质马可夫链 Non-Homogeneous Markov Chain	449
泰勒展开式 Taylor Expansion	7
特征向量 Characteristic Vectors or Eigenvectors	467
特征值 Characteristic Roots or Eigenvalues	467
特征值光谱 Spectral Radius	468
马可夫随机过程 Markov Stochastic Process	1
马可夫链 Markov Chain	447
偏微分方程式	15
动态连续修正调整避险比率 Dynamic Hedging	15
区域倒闭概率 Local Default Probabilities	463
情况空间 State Space	447

条件求偿证券 Contingent Claim	412
混合选择权 Compound Options	151
现行利率期间结构 The Current Term Structure of Interest Rates	409, 420
现金或无偿买权 Cash-or-Nothing Call, CNC	106
现金或无偿买权 Cash-or-Nothing Put, CNP	107
转移矩阵 Transition Matrix	447
转移概率 Transition Probabilities	447
组合型权证 Basket Option	77
软著界线选择权 Soft Barrier Options	328
连续界线选择权 Continuous Barrier Options	319
连续时间 Continuous Time	2
连续履约价限界选择权 Continuous Strike Range Options	319
连续履约价选择权 Continuous Strike Options	319
单位矩阵 Identity Matrix	467
报酬率瞬间标准差 Instantaneous Standard Deviation of Return	5
几何布朗运动 Geometric Brownian Motion	228
提前履约溢酬 Early Exercise Premium	334
提前履约溢酬 Early Exercise Premium	402
替代变量法 Jacobian Transformation	18
期望瞬间报酬率 Expected Instantaneous Rate of Return	5
期货选择权 Futures Options	333
殖利率 Yield to Maturity	420
减缩部分权利金的权证 Call Options With Proportional Payoff	51
短期信用价差 Short-Term Credit Spread	463
买权的买权 Call on A Call, CC	151
买权的卖权 Put on A Call, PC	152
间断时间 Discrete Time	6
汇率连动选择权 Quanto Options	187
极微小时段 An Infinitesimally Small Interval	15

概化 Wiener 随机过程 Generalized Wiener Process	3
资产或无偿买权 Asset-or-Nothing Call, ANC	107
资产或无偿卖权 Asset-or-Nothing Put, ANP	107
生成之矩阵 The Generator	465
对角化 Diagonalization	467
对角矩阵 A Diagonal Matrix	473
等价 Martingale 概率测度 Equivalent Martingale Probability Measure	448
等价平赌概率测度 Equivalent Martingale Measure	38
对数正态分布函数	17
漂浮项 Drift	411
熊市 Bear Market	255
远期生效亚洲选择权 Forward-Starting Asian Options	242
远期生效亚洲选择权平价关系	249
慕迪特别报告 Moody's Special Report	457
数据买权 Digital Call, DC	44
数据卖权 Digital Put, DP	45
数据选择权 Digital Option	45, 97
标准普尔信用调查 Standard & Poor's Credit Review or Moody's Investors Service	457
模型价格 The Model Prices	409
欧式外汇买权及卖权平价关系 Foreign Currency Put-Call Parity	164
欧式平均汇率买权 European Average-Rate Call Options	217
欧式重设型卖权 European Reset Put	257
欧式选择权	15
线性同质 Linear Homogeneity	148
复杂型数据选择权 Complex Digital Option, CDO	45
卖权的卖权 A Put on A Put, pp	152
驼峰状 Humped Shape	424
担保型远期契约 Guaranteed-Exchange-Rate Forward Contracts	183

---

行向量 Row Vector	448
树结 Tree Node	403
随机过程 A Stochastic Process	1
瞬间报酬率 Instantaneous Rate of Return	5
瞬间远期信用价差 Instantaneous Forward Credit Spread	462
临界条件 Boundary Conditions	426
临界条件 Boundary Conditions	15
避险参数	21
避险组合	14
扩散项 Diffusion Term	413
双因子利率模型 Two-Factor Model	424
双标的型现金或无偿买权 Bivariate Cash-or-Nothing Call, BCNC	108
双标的型现金或无偿卖权 Bivariate Cash-or-Nothing Put, BCNP	111
双标的型资产或无偿买权 Bivariate Asset-or-Nothing, Call, BANC	116
双标的型资产或无偿卖权 Bivariate Asset-or-Nothing Put, BANP	118
双标的型资产或无偿选择权 Bivariate Asset-or-Nothing Option	116

