

金融隨機計算

Stochastic Computation in
Finance

韓傳祥

Chuan-Hsiang Han

國立清華大學計量財務金融學系

**Department of Quantitative Finance,
National Tsing-Hua University, Taiwan**



本書的標題「金融隨機計算 (Stochastic Computation in Finance)」或許令部分潛在的讀者感到些許的「不確定性」，在此筆者定義此標題意指以隨機理論與計算方法來探索現代金融的問題。本書特別針對了衍生性市場 (Derivative Markets) 與風險管理 (Risk Management) 這兩個金融上的應用。在國際上，這樣書目的標題也可廣義地以「金融工程 (Financial Engineering)」稱之。

在結構上，本書由數理金融 (Mathematical Finance)、計算金融 (Computational Finance)、金融統計與實證研究 (Financial Statistics and Empirical Studies) 組合而成，另輔以兩個附錄 (Appendix) 補充機率論與隨機過程的基礎知識。不難從本書的結構看出金融工程這個跨領域學科的多樣性，它囊括了機率與統計、應用數學、計算科學與財務金融等。

本書源自於筆者過去幾年分別在清華大學計量財務金融學系的正規課程，包括衍生性商品訂價 (Derivative Pricing)、隨機財務理論 (Stochastic Financial Theory)、連續時間財務 (Continuous-Time Finance)、蒙地卡羅方法於金融工程之應用 (Applications of Monte Carlo Methods on Financial Engineering) 等，此外一些短期課程教授於國家理論科學研究中心 (NCTS)，交通大學數學建模與科學計算 (CMMSC) 研究所，台灣大學數學科學研究中心 (TIMS)，中央研究院數學研究所 2011 暑期數理金融課程，以及專業課程於期貨工會的財務工程人才培訓班，台灣金融工程師學會認證培訓班等等的中英文補充講義或投影片。這些珍貴的教學經驗以及目前全球的金融環境使得本書內容在取用上的門檻得以塑形。

鑑於同學或學員們對衍生性市場以及風險管理的濃厚興趣，如果不是由於對現代金融的偏見或幻想，通常下面兩個障礙使得不少人的學習意願打了退堂鼓：一是艱澀的數學語言，二是模糊的財金解釋。此外在專業上，特別是金融市場中存在大

量的行話 (jargon)，更加挑戰讀者的耐心。本書期盼能盡量地弭平上述這些障礙。由斯之故，個人深感一本中文著作的需要，以便將現代金融中市場及理論的歷史背景，與科學方法的交錯發展，以及一些嶄新應用、研究議題的介紹等，循序漸進的介紹給華人世界的讀者。因此，本書不屬於靜態的「衍生性市場詞典」或是「數理金融公式字典」，而是期盼能夠論述出由理論到實際的一股動態的流，好使讀者們能夠對於現代金融具有一貫性的深刻概念。

然而侷限於筆者的所學以及表達能力，讀者的回應是唯一能讓本書在將來，如果可能的話，變得更好的最大動力。

個人在寫作的過程中受到了許多「幕後英雄（雌）」的協助。碩士班的學生張藝馨、游雅媚、李育松、戴慧欣、蔡崇漳、李建武、陳靜，他（她）們在繁重的學習外，犧牲了相當多課餘的時間幫忙本書中文的打字、電腦程式以及交易資料方面的整理，林思廷協助設計封面，而大學部郭建良同學做了最後的彙整。很顯然地，若沒有這些殷勤的付出，本書絕不可能付梓。在此筆者表達對這些同學們的尊敬與由衷的感謝。

最後，內人及孩子們齊合心的關懷與包容，以及家父韓家治先生與家孀韓粘秋月女士不斷的鼓勵，終始本書得以完成。個人僅將此書獻給你（妳）們。

韓傳祥於台灣新竹，清華園

2011.11.28



如何使用本書

技術上來說，本書第一部分（數理金融）包括了隨機微積分、（偏）微分方程與傅立葉轉換；第二部分（計算金融）包括了有限差分法、FFT（快速傅立葉轉換）、蒙地卡羅模擬等計算方法；第三部分則分析了交易資料，包括了匯率，權益型證券（Equity Security）如 S&P500 指數、選擇權和 VIX。特別地也針對台灣大盤指數 TAIEX，指數選擇權及台灣 VIX 做了波動率估計方面的分析及相關實證研究。這些分析資料的方法也可能適用於許多其它的金融市場。此外，本書也呈現了部份利率市場中的債券與信用風險（Credit Risk）中的信用違約交換（CDS）和信用違約指數（CDX）以供參考。

本書的內容可以非常彈性的讓教師以及學（員）生得以按照不同的需求而有不同的組合，當然也可以成為其它課程的補充用書。譬如說：

- (1) 對於初學者或是數理金融的入門課，建議省略大部分的數學證明，直接從第一章出發，著重於布朗運動的模擬、伊藤微積分的計算，乃至 Black-Scholes 訂價理論。接著第三章關於 Black-Scholes PDE 的計算方法與蒙地卡羅模擬法，後接第六章第一節的選擇權避險實證。另可依課程需要，斟酌使用附錄的補充內容。
- (2) 對於計算科學課程的讀者，可以在簡介完第一章 Black-Scholes PDE 後，含美式選擇權的自由邊界問題，直接進入本書計算金融的第二部分，後接第六章第三節的模型校準問題。
- (3) 對於財務金融課程的讀者，除了本書第一部分期貨、選擇權、利率與信用的內容外，在涉及較少技術性的數理推導下，可逕行參考第二部分蒙地卡羅模擬，包括新奇選擇權，風險管理中的（條件）風險值計算，後接續部份第五章波動率估計，以及第六章中選擇權避險與 VaR 回溯測試的實證內容。

(4) 對於財務時間序列的讀者，第五章的波動率估計應該可以成為傳統理論的重要補充。

(5) 對於金融工程碩、博士班的讀者，筆者期盼您能夠瞭解本書大部份的內容。若對隨機理論不熟悉的話，請從本書的附錄開始，再從第一章循序漸進。

(6) 對於金融業界的專業讀者，筆者則相信您知道自己需要什麼。

此外，本書也具備了實體的電腦程式（如 Matlab 或 C）或是操作的步驟來支援書中所有數值計算以及資料統計分析的結果。這樣的目的是希望讀者也能適當的「把手弄髒」，除了避免曲高和寡，更可以一探我們所身處金融系統的複雜性。

目 錄

TABLE OF CONTENTS

PART I 數理金融 1

Chapter 1 連續時間財務理論：Black-Scholes

訂價理論	3
>>>>第一節 歷史背景	4
>>>>第二節 布朗運動	6
>>>>第三節 隨機微積分	16
3.1 隨機積分的財務解釋	17
3.2 伊藤公式	19
>>>>第四節 選擇權的訂價理論（一）：	
無套利方法	26
4.1 衍生性金融市場簡介	26
4.2 Black-Scholes 偏微分方程式	31
4.3 Black-Scholes 選擇權訂價公式	32
>>>>第五節 選擇權的訂價理論（二）：	
風險中立訂價	34
5.1 Black-Scholes 公式推導	37
5.2 資產訂價基本定理	38
5.3 遠期與期貨的價格	41
>>>>第六節 Feynman-Kac 公式：	
條件期望與 PDE	42
>>>>第七節 布朗運動的路徑性質	43
7.1 停止時間	44

7.2 鏡射原理與首達時間	45
》》》第八節 美式選擇權評價	49
8.1 最佳停止與自由邊界	49
8.2 美式賣權的避險策略	54

Chapter 2 利率與信用衍生性金融商品..... 59

》》》第一節 利率模型	60
1.1 短期利率模型	61
1.2 Forward/LIBOR 利率模型	64
》》》第二節 信用風險模型	69
2.1 結構式模型	69
2.2 縮減式模型	71
》》》第三節 關聯方法：多資產的聯合分佈	72
3.1 信用風險中的關聯模型	74
3.2 關聯因子模型	76
》》》第四節 尾端（聯合違約）機率之估計	77
》》》第五節 信用衍生品市場：CDS 與 CDO	78

PART II 計算金融..... 87

Chapter 3 數值方法與蒙地卡羅模擬..... 89

》》》第一節 數值偏微分方程：有限差分法	90
1.1 有限差分法	91
1.2 解線性方程組：歐式選擇權	94
1.3 解非線性方程組：美式選擇權	96
》》》第二節 快速傅立葉轉換方法：	
解不同模型下的選擇權價格	97
》》》第三節 擾動法的近似解	101
》》》第四節 隨機模擬法：亂數產生與歷史模擬	104

4.1 概說	104
4.2 亂數產生器	107
4.3 歷史模擬	108
》》》第五節 蒙地卡羅方法的基本理論	110
5.1 評價歐式選擇權	113
》》》第六節 數值隨機微分方程	114
》》》第七節 新奇選擇權	118
7.1 二元選擇權	118
7.2 障礙式選擇權	119
7.3 回顧選擇權	123
7.4 複合選擇權	124
》》》第八節 縮減變異的基本技術：	
反變異，條件抽樣，布朗橋	127
8.1 反變異	127
8.2 條件抽樣	128
8.3 布朗橋	130

Chapter 4 變異數縮減法..... 133

》》》第一節 重要抽樣法：違約機率估計與 風險管理	135
1.1 最佳重要抽樣法	136
1.2 高效能重要抽樣法	138
1.3 指數扭曲機率的重要抽樣法：	
拉普拉斯方法	141
1.4 大離差理論的漸進分析	143
1.5 應用一：風險管理－風險值與 條件風險值的計算	145
》》》第二節 控制變異法	149
2.1 應用二：亞式選擇權評價	152
2.2 平賭控制變異法	157

》》》第三節	快速收斂方法一（亂化）	
	擬蒙地卡羅法	161
	3.1 擬蒙地卡羅法簡介	162
	3.2 應用三：隨機波動模型下的評價	165
》》》第四節	評價美式選擇權：	
	最小平方法與對偶法	170
	4.1 下界偏誤：最小平方法	172
	4.2 上界偏誤：對偶法	182
	4.3 變異數縮減的數值結果	183
》》》第五節	敏感度估計	185
》》》第六節	個人化的超級運算：	
	GPU 平行計算	187
	6.1 數值結果	189

PARTIII 金融統計與實證研究 197

Chapter 5 波動率估計 199

》》》第一節	簡介波動率	201
》》》第二節	傅立葉轉換方法估計瞬時波動率	
	一無母數方法	207
》》》第三節	修正後傅立葉轉換方法	
	一偏誤降低	211
	3.1 模擬測試一：局部波動率	212
	3.2 模擬測試二：隨機波動率	213
》》》第四節	應用一：瞬時波動率與	
	波動率指數的線性假說	214
》》》第五節	隨機波動率模型之參數估計	218

》》》第六節	應用二：對 TAIEX 進行一	
	因子隨機波動率模型之參數估計	220
	6.1 高頻臺指波動率的日效應	220
	6.2 波動率模型參數在不同資料頻率下 的表現	221
》》》第七節	Dupire 公式：隱含局部波動 曲面	224
	7.1 隱含風險中立分佈	224
	7.2 Dupire 公式	225
》》》第八節	波動率指數：市場濾波器	227
》》》第九節	變異數／波動率契約	235
》》》第十節	波動率的離散模型	237
》》》第十一節	小結	238

Chapter 6 實證研究 239

》》》第一節	選擇權避險表現：	
	Delta 與 Delta/Gamma 策略	240
	1.1 避險策略介紹	242
	1.2 指數選擇權避險實證結果	247
	1.3 小結	253
》》》第二節	風險管理：風險值、條件風險值 與及回溯測試	255
	2.1 回溯測試	255
	2.2 實證結果	256
	2.3 小結	263
》》》第三節	Monte Carlo 對選擇權價格 之模型校準	263
	3.1 兩階段 Monte Carlo 模型校準法	264
	3.2 實證結果	266
	3.3 與傳統快速傅立葉方法比較	268

3.4 小結	270
--------------	-----

附 錄	271
-----------	-----

附錄一 機率理論回顧	272
一、機率空間	272
二、隨機變數及其分佈	275
三、期望值	278
四、收斂模式	283
五、期望值的計算	286
六、機率值的上下界	287
七、測度轉換	289
八、條件期望	291

附錄二 隨機過程回顧與離散模型	294
一、隨機過程簡介	295
二、獨立性	300
三、條件期望	302
四、計算條件機率：平賭與馬可夫性質	305
五、以隨機漫步為例	309
六、大離差理論	314

參考文獻	319
------------	-----

中英文索引	329
-------------	-----

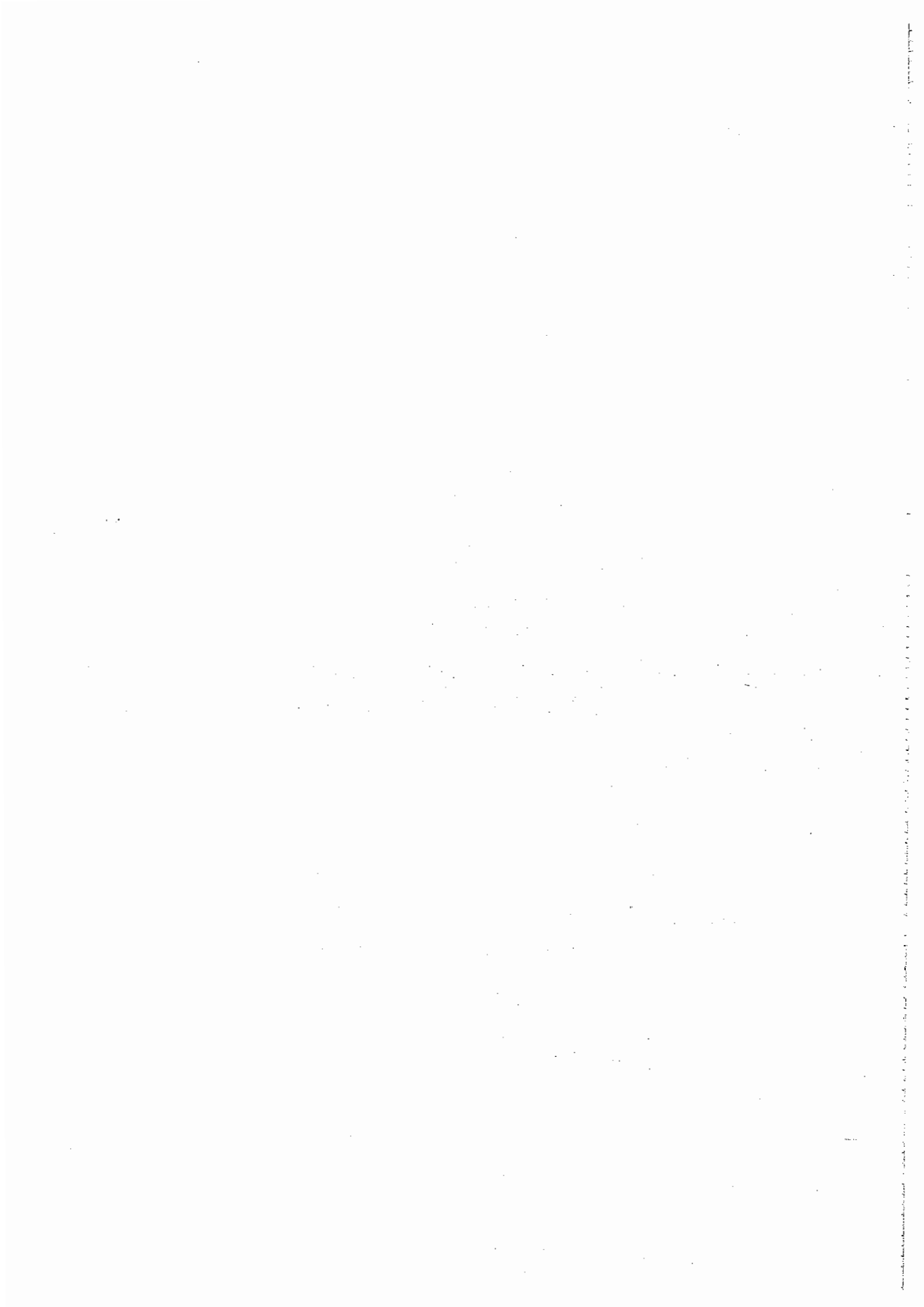
符號表 (Notation)

Ω	樣本空間 (sample space)
\mathcal{F}	σ -algebra 或 σ -field
$\mathcal{B}(\mathcal{R})$	Borel σ -algebra
(Ω, \mathcal{F})	可測空間 (measurable space)
\mathcal{P}	機率測度 (probability measure)
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$	機率空間 (probability space)
$\mathcal{N}(x)$	標準常態累積分佈函數 (cumulative distribution function of standard normal random variable)
$\mathcal{F}_{t \geq 0}$	域流 (filtration)
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$	具域流的機率空間 (probability space equipped with filtration)
$E[X G]$	給定 σ -algebra G 下隨機變數 X 的條件期望 (conditional expectation)
$W_{t \geq 0}$	標準布朗運動 (Brownian motion)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_t$	累積至時間 t 的交叉 (cross) 或二次變分 (quadratic variation)
$\mathcal{L}_{BS}(\cdot)$	Black-Scholes 偏微分算子 (partial differential operator)
$C_{BS}(t, x)$	Black-Scholes 模型下歐式買權 (call option) 的價格函數
$P_{BS}(t, x)$	Black-Scholes 模型下歐式賣權 (put option) 的價格函數
σ	波動率 (volatility)
σ_{imp}	隱含波動率 (implied volatility)
\mathcal{P}^*	風險中立機率測度 (risk-neutral probability measure) 或等義 martingale 測度 (equivalent martingale measure, EMM)
W_t^*	在 \mathcal{P}^* 風險中立機率測度下的標準布朗運動
$P_{am}(t, x)$	美式選擇權的價格函數

CDS	信用違約交換 (Credit Default Swap)
CDO	抵押債務債券或擔保債權憑證 (Collateralized Debt Obligation)
VaR	風險值 (Value at Risk)
CVaR	條件風險值 (Conditional Value at Risk)
$\mathcal{F}(\cdot)$	傅立葉轉換 (Fourier transform)
$\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$	反傅立葉轉換 (inverse Fourier transform)
VIX	波動率指數 (Volatility Index)

PART I

數理金融
**(MATHEMATICAL
FINANCE)**



Chapter 1

連續時間財務理論： Black-Scholes 訂價理論

本章學習重點

- 第一節 歷史背景
- 第二節 布朗運動
- 第三節 隨機微積分
- 第四節 選擇權的訂價理論（一）：無套利方法
- 第五節 選擇權的訂價理論（二）：風險中立訂價
- 第六節 FEYNMAN-KAC 公式：條件期望與 PDE
- 第七節 布朗運動的路徑性質
- 第八節 美式選擇權評價

In the end, a theory is accepted not because it is confirmed by conventional empirical tests, but because researchers persuade one another that the theory is correct and relevant.

~ Fischer Black (1986)

第一節 歷史背景(Historical Background)

隨機微積分是如何對現代金融市場發揮了關鍵且巨大的影響力？文獻上可以追溯到關於物理現象－布朗運動的歷史背景。1827 年蘇格蘭的植物學家 Robert Brown 觀察到當花粉中的微小粒子懸浮在水面上時，它們的運動會呈現出十分不規則的軌跡。為了紀念這個發現，就將此現象命名為布朗運動 (Brownian motion)。

法國數學家 Louis Bachelier 在 1900 年所發表的博士論文中，紀錄了他觀察到在巴黎股市交易所中，股價的改變會呈現一些類似於布朗運動的不規則現象。此外，他率先提出了布朗運動的數學模型以描述股價的動態行為，並且探討布朗運動的馬可夫性質 (Markov property) 與平賭 (martingale) 等等隨機過程 (stochastic process) 中的重要觀念。

1905 年，著名的物理學家 Albert Einstein 推導出了布朗運動所對應的擴散方程式並估計分子的大小。1923 年，美國數學家 Norbert Wiener 以嚴謹的數學方法建構出布朗運動，而為了紀念這樣的貢獻，布朗運動亦稱之為韋納過程 (Wiener process)。1931 年，俄國數學家 Andrey Kolmogorov 探討了更一般的擴散並且連續的馬可夫過程，接著在 1944 年，日本數學家 Kiyoshi Ito 提出了對布朗運動積分，即所謂的隨機積分，的一個定義，並且利用 Ito's 公式¹發展出一套「隨機微積分」(stochastic calculus) 的計算方式，以便處理一般的隨機微分方程式 (stochastic differential equation)。

¹ 關於 Ito's 公式的發現，文獻後來指出在二次世界大戰期間的 1940 年，法國數學家 W. Doeblin 也發展出類似的結果，不過他在戰時不幸過世，所以這個結果沒能及時的公諸於世。

根據以上的基礎，隨機過程的研究便如火如荼的展開。1948 年，法國數學家 Paul Levy 推廣了連續過程的布朗運動至有跳躍 (jump) 的 Levy 過程。直至今日，隨機分析已自成一派，並與不同的數學學門、自然科學與工程、社會科學等領域交流，而且在應用層面的接軌上已十分廣泛並持續進行。

然而 Bachelier 的博士論文並沒有停留在機率理論的發展階段，論文中的第二個部份是關於布朗運動在財務上的應用。同樣令人驚艷的是，他在沒有後來隨機微積分的工具下，居然推導出類似於現代金融最重要的理論結果：Black-Scholes 的選擇權訂價公式。關於 Bachelier 的生平介紹，請見 Courtault et al. (2000)；而關於 Bachelier 的博士論文原文，其英文翻譯，以及對後來的影響等，請進一步參閱由 Davis and Etheridge (2006) 所合著之“Louis Bachelier’s Theory of Speculation”。請注意該書之副標題“The Origins of Modern Finance”，標示出 Bachelier 的博士論文對現代金融確實有許多原創性的啟發。

雖說 Bachelier 在機率與金融這兩個領域具有偉大的開創性，但很可惜的是這些工作在 20 世紀初並沒有被廣泛的認可，不難由 Levy 當時對 Bachelier 博士論文的一個註記“Too mch on finance!”可以窺看出。很幸運的是隨著後來金融領域的發展，才給了 Bachelier 一個正確的歷史定位。1959 年，M. Osborne 首先推薦了使用幾何布朗運動 (geometric Brownian motion) 來做為具有風險性資產的模型，例如股價等權益型證券 (equity security) 的價格。1965 年，經濟學家 P. Samuelson²推薦了利用隨機微積分的數學方法來研究金融的問題；他同時也挖掘出 Bachelier 的工作，並介紹給當時的學界知道。受到這些影響，F. Black 與 M. Scholes 在 1973 年發表了著名的 Black-Scholes 選擇權訂價公式；同年芝加哥選擇權交易所 (Chicago Board of Option Exchange, CBOE) 成立。在 1997 年 Scholes 與 Merton 共同獲得了諾貝爾經濟學獎，以表彰他們在選擇權訂價理論上開創性的工作；而不幸的是，Black 先生已於 1995 年逝世，否則他也必然是諾貝爾獎的得主。

² 1970 諾貝爾經濟學獎得主。

1970 年代以降是衍生性金融商品以及風險管理風起雲湧的世代，選擇權理論與新金融商品市場共同的快速發展，也愈來愈深刻的影響著我們的生活。從街井小民的個人投資理財、保險、貸款、退休年金等規劃，到一個國家的利率、公債、巨災保險，及匯率等財經政策的制定，甚至於到全球化 CO2 排放等環保議題等等，無不與衍生性金融市場有關。

為了記念 Bachelier 的工作，成立於 1996 年的 Bachelier Finance Society 是一個集合了從事數理金融相關領域的學者、在業界的實務工作者、以及金融政策的制定者等國際人士的社群。該學會每兩年舉辦一次世界大會（World Congress）以提供一個交流的機會，來共同分享金融上面臨的問題與數學上可能的解決方案，金融與數學交融之深可見一斑。

在今日，一個更廣義的名稱「金融工程」已成為一個新興的學術領域。根據國際金融工程師協會（International Association of Financial Engineer, IAFE）的定義，金融工程乃意指「運用數學方法以解決金融問題」。它也可被稱為「數理金融」（mathematical finance）、「金融數學」（financial mathematics）或者「計算金融」（computational finance）；甚至可以更廣泛的稱為「計（數）量金融」（quantitative finance）。金融工程常使用到的專業範疇包括了機率與統計，應用數學，資訊科學，以及經濟理論等，當然目標是解決金融上的相關問題。歐美各主要的大學都提供了相關的專業課程，並與各大金融機構合作教學與實習，有興趣的讀者不仿見 IAFE 的網站 <http://iafe.org>。

第二節 布朗運動(Brownian Motion)

由於隨機微積分的基礎元素是布朗運動，以下我們給出布朗運動的定義。從文字上的敘述來說，布朗運動之意義如下：若 $W_{t \geq 0}$ 是一個連續的過程，它具有獨立增量（independent increment），且該增量為常態分配，則此過程 $W_{t \geq 0}$ 就定義為一個布朗運動。

標準布朗運動 (standard Brownian Motion) 的數學定義給定如下：

定義 2.1： 令隨機過程 $(W_t, t \geq 0)$ 在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ 下的路徑是連續的，而且服從對任何 $s > 0$ ，

(1) $W_0 = 0$ (W 在時間 0 的位置為 0)，

(2) $W_{t+s} - W_t \sim \mathcal{N}(0, s)$ ，

(3) $W_{t+s} - W_t$ 是獨立於 $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ 對於任何 $t_0 = 0 < \dots < t_n = t$ (也就是給定時間上沒有重疊的兩個增量，這些增量會互相獨立)，滿足以上條件的隨機過程稱為標準布朗運動。

在以後本書的敘述中若不特別註記，則布朗運動均表示為「標準」布朗運動。回顧本書附錄二最後談到布朗運動在時間上是連續的，也就是說過程 W 的指標 (index) 是連續的時間 $t \geq 0$ ，與 (縮放) 隨機漫步不同。另外從上面定義中更可知布朗運動在狀態空間上的路徑也是連續的，也就是說，它的樣本軌跡 (sample trajectory) 是連續函數。

範例 2.1 布朗運動的模擬 (simulation of Brownian motion)

根據以上的定義，我們可以很容易利用電腦程式，見以下 Matlab 程式 2-1，來產生布朗運動模擬的軌跡。圖 2-1 中顯示了兩條互為獨立的布朗運動的軌跡。它們是由從 0 開始以及乘上 $\sqrt{1/250}$ 後 250 個 $\mathcal{N}(0,1)$ 的增量，目的是模擬 $W_{0 \leq t \leq 1}$ 的軌跡。本書第三章第六節中有對更一般的隨機微分方程的模擬方法介紹。

在金融模型中，布朗運動常用來模擬報酬率 (rate of return)。以時間 1 為一年，約有 250 個交易日 (trading days)，圖 2-1 的金融解釋可以是某兩種獨立資產在一年中各自累積的日報酬 (daily return)。

Matlab 程式 2-1：根據布朗運動的定義模擬出軌跡

```
ΔW = randn(1,250).* sqrt(1/250); %產生1×250個 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈的樣本並乘上
     $\sqrt{1/250}$  [250 個模擬的日報酬]

ΔW = [0 ΔW]; %從0開始

W0≤t≤1 = cumsum(ΔW,2); %累加增量以形成布朗運動軌跡[一年內的累積報酬]
```

讀者可利用 Matlab 中指令 plot 畫出布朗運動的軌跡圖，或是利用指令 xlswrite 輸出所模擬的布朗運動到 Excel 中檔名.xlsx 存檔後再自行畫出圖形。下圖是根據後面輸出至 Excel 的做法。

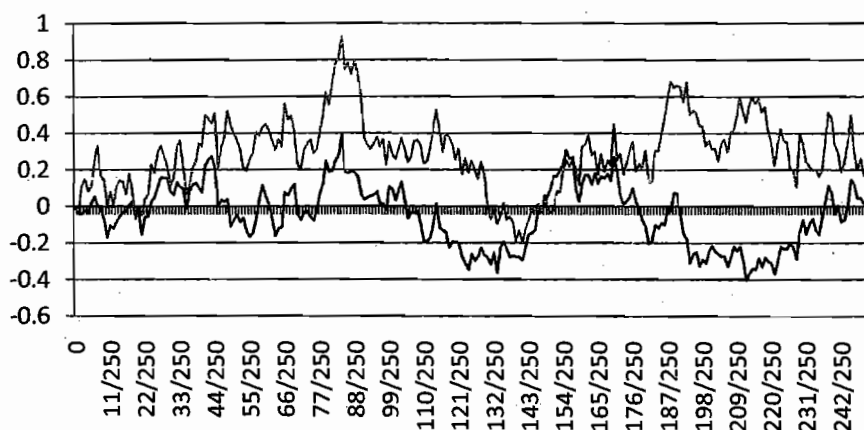


圖2-1 兩條互為獨立的布朗運動的軌跡

作業 2.1 請針對下面條件各列舉一隨機過程。

- (1) 時間連續，路徑連續
- (2) 時間連續，路徑不連續
- (3) 時間不連續，路徑不連續

不難計算出布朗運動間的共變異 (covariance) 是 $Cov(W_s, W_t) = \min(s, t)$ ，對任何兩個非負的 s 和 t 。這個性質可以推廣到高維度，對任何一個向量 $\vec{v} =$

$(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_m})^T$ 其中 $0 < t_1 < \dots < t_m$ ，則共變異矩陣 (covariance matrix) 為

$$\text{Cov}(\vec{V}\vec{V}^T) = \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & & t_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{bmatrix} := \Sigma.$$

範例 2.2 計算標準布朗運動的聯合動差函數 (joint moment generating function)

$$\begin{aligned} \phi(u_1, u_2, \dots, u_m) &= E[\exp(\vec{u} \cdot \vec{V})] \\ &= E[\exp(u_1 W_{t_1} + u_2 W_{t_2} + \dots + u_m W_{t_m})] \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}(u_1 + \dots + u_m)^2 t_1 + \frac{1}{2}(u_2 + \dots + u_m)^2 (t_2 - t_1) + \dots + \frac{1}{2}u_m^2 (t_m - t_1)\right\}. \end{aligned} \quad (2-1)$$

最後等式中用到了分解 $W_{t_j} = \sum_{k=0}^{j-1} W_{t_{j-k}} - W_{t_{j-(k+1)}}$ 而得，並且可以進一步證明 $\phi(\vec{u}) = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{u}^T \Sigma \vec{u}\right)$ 。

作業 2.2 證明由布朗運動所形成的向量 $\vec{V} = (W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_m})^T$ 會服從常態分布 $\vec{V} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ 。

備註：由於 Σ 是對稱正定的，利用 Cholesky decomposition³ $AA^T = \Sigma$ 可以生成或模擬布朗運動的向量 $\vec{V} = A\vec{X}$ ，而 \vec{X} 由一組 IID 的標準常態隨機變數產生。

作業 2.3 給定上述共變異矩陣 $\text{Cov}(\vec{V}\vec{V}^T) = \Sigma$ 中的 $t_i = i/250$ ， $1 \leq i \leq 250$ 且 $m = 250$ ，利用備註中 $\vec{V} = A\vec{X}$ 的辦法產生布朗運動的向量。

(1) 以電腦模擬並畫出兩條布朗運動的軌跡。

(2) 以電腦模擬的方式估計出 $\text{var}(W_1)$ 。

[Hint: Matlab 指令 `chol(\Sigma, 'lower')` 可執行 Cholesky 分解得到方陣 A 。]

布朗運動存在一些等義的刻畫，有時在驗證隨機過程是否為布朗運動時很有幫助。

³ Cholesky 分解類似於正數可以開根號的觀念，其中矩陣 A 是下三角的方陣。

定理 2.1： 對於布朗運動，下面的性質是互為等義的：

- (1) 增量是獨立且服從常態分配。
- (2) 對任何一組離散時間 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ ， $W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_m}$ 是聯合常態分配。
- (3) $W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_m}$ 的聯合動差函數會服從方程式 (2-1)。

如果這三者任何一個成立的話，則連續的隨機過程 W_t 是一個布朗運動。

理論上，布朗運動必須存在於一個機率空間，其定義如下。

定義 2.2： 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 為一機率空間使得布朗運動 $(W_t)_{t \geq 0}$ 能被定義在其上。布朗運動的一個域流 (filtration) 是蒐集一系列的 σ -algebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ ，且滿足下面三個條件

- (1) (訊息累加) 對於 $0 \leq s \leq t$ ， $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ 。
- (2) (適應性) 每一個隨機變數 W_t 都是 \mathcal{F}_t 可測。
- (3) (未來增量的獨立性) 對於 $0 \leq t < u$ ，增量 $W_u - W_t$ 會獨立於 \mathcal{F}_t 。

現在可以進一步討論布朗運動的隨機性質。

定理 2.2：

- (1) Martingale 性質：布朗運動是一個 martingale。
- (2) 布朗運動 $W_{t \geq 0}$ 是一個馬可夫過程 (Markov process)。
- (3) 布朗運動的 Levy's 刻畫：隨機過程 (W_t) 是一個標準布朗運動若且唯若條件特徵函數 (conditional characteristic function) 為

$$E\{e^{iu(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s\} = e^{-\frac{u^2(t-s)}{2}}。$$

- (4) 對任何常數 σ ， $Z_t = \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$ 是 martingale。 Z_t 稱為指數平賭 (exponential martingale)。

證明：

- (1) 利用增量的獨立性即可得 $E\{W_t|\mathcal{F}_s\} = E\{W_s + (W_t - W_s)|\mathcal{F}_s\} = W_s$ 。
- (2) 同證明(1)的原理。
- (3)-(4)省略。

引理 2.1：一個 martingale $W_{t \geq 0}$ 若滿足 (1) 軌跡是連續的 (2) $W_0 = 0$ (3) $\langle W, W \rangle_t = t$ ，則 $W_{t \geq 0}$ 是標準布朗運動。

備註：這個引理常被用來檢驗布朗運動，它可以由上述定理 2.2 中 (3) 證明出。

範例 2.3 驗證 $E\{Z_t\} = 1$ 。

作業 2.4 給定一維度的布朗運動 $(W_t; t \geq 0)$ ，證明

- (1) $\tilde{W}_t := W_{t+c} - W_c$ 是布朗運動。
- (2) $\tilde{W}_t := \frac{1}{c} W_{c^2 t}$ ， $c > 0$ ，是布朗運動。
- (3) $\tilde{W}_t := W_t^3 - 3tW_t$ 是一平賭。

作業 2.5 給定一維度的布朗運動 $(W_t; t \geq 0)$ 以及常數 θ 和 $\sigma > 0$ ，定義依據漂移項 (非標準) 的布朗運動 $X_t := \theta t + \sigma W_t$ ，證明以下性質：

- (a) X_t 是 Markovian。
- (b) 在何種 θ 的條件下， X_t 分別是 supermartingale，martingale，和 submartingale。
- (c) 動差函數是 $E[\exp(uX_t)] = \exp\left(u(\theta t) + \frac{1}{2}(\sigma^2 t)u^2\right)$ 。
- (d) $\exp\left\{uX_t - \left(u(\theta t) + \frac{1}{2}(\sigma^2 t)u^2\right)\right\}$ 是一平賭。

接下來，我們討論關於布朗運動路徑的特殊性質-變分 (variation)，它被用來度量路徑的「曲折」程度。我們先定義一個函數的 (一次) 全變分如下：

定義 2.3: 變分 (variation)。在定義域 $[0, T]$ 上, 時間上的切割為 $\Pi =$

$$\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\} \text{ 且 } \|\Pi\| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{j+1} - t_j)。$$

(1) (一次) 全變分 ((first-order) total variation): 函數 f 的全變分, 記為 $TV_T(f)$, 的定義是

$$TV_T(f) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|,$$

(2) (一次) 全變分 ((first-order) total variation): 函數 f 的全變分, 記為 $TV_T(f)$, 的定義是

$$TV_T(f) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|,$$

(3) 二次變分 (quadratic Variation): 函數 f 的二次變分, 記為 $\langle f, f \rangle_T$, 的定義是

$$\langle f, f \rangle_T = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2$$

(4) 交叉變分 (cross variation): 函數 f 與 g 的交叉變分, 記為 $\langle f, g \rangle_T$, 的定義是

$$\langle f, g \rangle_T = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)][g(t_{j+1}) - g(t_j)]$$

注意到, 假設函數 $f(t)$ 是由一個隨機過程的軌跡 (或是樣本) 來描述, 則以上定義的變分量具有隨機性; 也就是說它是隨機變數, 而非一個像均值, 變異數般的統計量。

範例 2.4 若函數 f 是一次可微連續函數, 記做 $f \in C^1([0, T])$, 則

$$(1) TV_T(f) = \int_0^T |f'(t)| dt。$$

$$(2) \langle f, f \rangle_T = 0。$$

證明：

(1) 利用均值定理 (mean value theorem)，必存在某 $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$ 使得

$$f(t_{j+1}) - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j)$$

可推導

$$\begin{aligned} TV_T(f) &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j) \\ &= \int_0^T |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

(2) 以及

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_T &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f'(t_j^*)^2 (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} f'(t_j^*)^2 (t_{j+1} - t_j) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \times \int_0^T f'(t)^2 dt = 0. \end{aligned}$$

上面不等式用到了每段子區間長度會小於等於切割長度 $\|\Pi\|$ 。 ■

在古典微積分中遇到的例子幾乎都是「平滑」的函數，因此甚少討論到二次變分。下面的定理說明了布朗運動的軌跡是十分「曲折」的，它的二次變分並不是 0。由於這個效應，導致我們必須將「微積分」推廣到「隨機微積分」。

定理 2.3：給定了 T 之後，布朗運動 $W_{t \geq 0}$ 的變分如下：

- (1) 一次變分為 $TV_T(f) = \infty$ 。
- (2) 二次變分為 $\langle W, W \rangle_T = T$ a.s.。
- (3) 交叉變分為 $\langle W, T \rangle_T = \langle W, \tilde{W} \rangle_T = 0$ ，其中 W 與 \tilde{W} 是互為獨立的布朗運動。

證明(2)描述：

在期間 $[0, T]$ 中給定一分割 (partition) $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ ，考慮一樣本二次變分

$$Q_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2,$$

並證明它會收斂到 T 。

首先，

$$E[Q_\Pi] = \sum_{i=0}^{n-1} E[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1} - t_i = T.$$

其次 Q_Π 的變異數為

$$\text{Var}(Q_\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} E[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)^2].$$

利用到

$$E[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^4] = 3(t_{i+1} - t_i)^2,$$

將 $\text{Var}(Q_\Pi)$ 簡化到

$$\text{Var}(Q_\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2\|\Pi\| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 2\|\Pi\|T.$$

因此 $\lim_{\|n\| \rightarrow 0} \text{Var}(Q_n) = 0$ ，並得到 $E[Q_n] = \lim_{\|n\| \rightarrow 0} Q_n = T$ 。這裡尚須用到 L^2 收斂會導致 a.s. 收斂的條件性質，在此省略。 ■

具有非零的二次變分是布朗運動的一大特色 (signature)，這意味著布朗運動的軌跡並非是平滑的 (smooth)。事實上，布朗運動的軌跡雖是連續的，但是幾乎處處不可微分。

以上變分的定義是以積分的形式出現，不過就像在微積分的經驗，以微分的形式來描述變分往往比較方便：布朗運動的瞬間增量，記為 dW_t ，的變分為

$$dW_t \cdot dW_t = dt, dW_t \cdot dt = 0, dW_t \cdot d\tilde{W}_t = 0。$$

將上式的結果從時間 0 到 T 積分則分別表示為 $\langle W, W \rangle_T = T$ 與 $\langle W, T \rangle_T = \langle W, \tilde{W} \rangle_T = 0$ 。

範例 2.5 幾何布朗運動 (geometric Brownian motion, GBM)

在金融模型中，幾何布朗運動，亦稱為 log normal 過程，是一個隨機過程常用來模擬股價的動態行為。它服從以下結構：

$$S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t\}。$$

也稱作 Black-Scholes 模型，其中 S_0 記為時間 0 的股價， $W_{t \geq 0}$ 記為布朗運動， μ 是報酬率 (return rate) 或成長率 (growth rate)， $\sigma > 0$ 是波動率 (volatility)。

在實務中，我們往往會遇到波動率的估計問題，以下應用布朗運動的二次變分來處理。對每個分割 $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ ，我們可以定義對數報酬 (log return) 如下

$$\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} = \sigma (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + (\mu - \sigma^2/2)(t_{j+1} - t_j)。$$

實現變異 (realized variance, RV) 的定義為 log 報酬率平方的均值：

$$\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\log \frac{s_{t_{j+1}}}{s_{t_j}} \right)^2. \quad (2-2)$$

不難從此範例以及定理 2.5 中，觀察出實現變異會收斂到整合變異 (integrated variance) $\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 dt = \sigma^2$ ，當 $\|\Pi\| \rightarrow 0$ 。式(2-2)稱作變異數 σ^2 的估計式 (estimator)。當時間以 T 年為單位，則實現變異的估計值為年化變異數 (annualized variance 或 variance per annum)。

作業 2.6 給定兩獨立的布朗運動 W_t 和 \tilde{W}_t 。若常數 $|\rho| \leq 1$

(a) 證明 $\langle W, \rho W + \sqrt{1-\rho^2} \tilde{W} \rangle_t = \rho t$ 。

(b) 請給出相關係數 ρ 的估計式。

備註：二次或交叉變分皆是時間上極限的結果，因此十分適合用來分析高頻資料。

第三節 隨機微積分(Stochastic Calculus)

在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ 之下，若對每一個 $0 \leq t \leq T$ ， Δ_t 是適應的，也就是 \mathcal{F}_t -measurable。接下來的目標是想要定義出下列的積分

$$\int_0^T \Delta_t dW_t,$$

其中 W_t 是一維的布朗運動。 Δ_t 指的是對資產 W 在時間 t 所持有的部位； $\int_0^T \Delta_t dW_t$ 在財務上的意思是指在時間 0 到 T 之間，使用 delta 的策略對風險性資產 W 所累積的收益。上述所討論的隨機積分並不能從傳統積分的概念，例如黎曼積分或者是 Lebesgue 積分，來推廣，也就是

$$\int_0^T \Delta_t dg(t) = \int_0^T \Delta_t g'(t) dt,$$

若 g 是可微分的。注意到由於布朗運動是不可微分的，因此上述古典的積分方式沒有辦法用來定義隨機積分的。

3.1 隨機積分的財務解釋(Financial Interpretation of Stochastic Integral)

為了便於了解隨機微積分的意義，我們從對一個簡單過程 (simple process) 定義隨機積分 (stochastic integral) 為例。令 Δ_t 在 0 到 T 之間是一個簡單過程，也就是說對一個時間切割 $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ ， Δ_t 在每一個子區間 $[t_j, t_{j+1})$ 是一個常數，而且 Δ_t 也假設是 \mathcal{F}_t -measurable。

事實上利用財務直覺來認識抽象的隨機積分，是一個非常便利的學習方式，因為它們的基本觀念是一致的。令上述所給定的 Π 為固定的交易日期， Δ_t 為一些事前給定的交易策略，那麼 I_t ， $t_{k-1} < t \leq t_k$ ，為從離散的交易策略 Δ 所累積的增益過程 (gain process) 或稱為財富過程 (wealth process)

$$I_t = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{t_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \Delta_{t_k} (W_t - W_{t_k}) = \int_0^t \Delta_u dW_u$$

備註：可回顧附錄二中定理4.1的martingale transform.

該隨機積分所定義出的隨機過程 I_t 具有如下性質：

定理3.1：

(1) I_t 是一個 martingale。

(2) (Ito Isometry)

$$\text{Var}(I_t) = E\{I_t^2\} = E\left\{\int_0^t \Delta_u^2 du\right\}.$$

(3) (Quadratic Variation)

$$\langle I, I \rangle_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$$

備註： $dI_t \cdot dI_t = \Delta_t^2 dt$

上述所定義的隨機積分 $I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$ 也可以寫成微分的形式 $dI_t = \Delta_t dW_t$ ， $I_0 = 0$ 。這如同在微積分中所學到的積分，透過微積分基本定理也可以寫成微分的形式。

下面定理確保了可對一般積分項定義伊藤積分，這推廣了 Δ_t 僅是簡單過程的限制。

定理 3.2： 令 Δ_t ， $0 \leq t \leq T$ ，是一個適應性的過程，而且滿足下列的積分條件

$$E \left\{ \int_0^T \Delta_t^2 dt \right\} < \infty$$

則 $I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$ 具有下列的性質

- (1) (連續性) $I_t(\omega)$ 對每一個 $\omega \in \Omega$ 幾乎是處處連續。
- (2) (適應性) 對每一個時間 t ， I_t 都是 \mathcal{F}_t -measurable。也就是 I_t 對 \mathcal{F}_t 是適應的。
- (3) (線性) 如果 $I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$ 且 $J_t = \int_0^t \Gamma_u dW_u$ ，則

$$\alpha I_t + J_t = \int_0^t (\alpha \Delta_u + \Gamma_u) dW_u$$

- (4) (Martingale) I_t 是一個 martingale。
- (5) (Ito Isometry)

$$E\{I_t^2\} = E \left\{ \int_0^t \Delta_u^2 du \right\}$$

- (6) (Quadratic Variation)

$$\langle I, I \rangle_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$$

範例 3.1 隨機積分與傳統微積分不一樣的地方，可以由下面這個例子很明顯的看出來

$$\int_0^T W_t dW_t \neq \frac{W_T^2}{2}。$$

後項是由傳統微積分概念所推導出來的結果。利用定理 3.2 中(4)Martingale 的性質，前項的期望值為 0；然而後項的期望值卻是 $T/2$ 。

作業 3.1 令 $M_{t \geq 0}$ 為一平賭且對任何 t ， M 是平方可積， $E(M_t^2) < +\infty$ 。則

$$1. E((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) = E(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s)。$$

$$2. |M_t|_{0 \leq t \leq T} \text{ 是一 submartingale。}$$

3.2 伊藤公式(Ito's Formula)

在引入對一般擴散過程的隨機「微分」計算之前，先介紹布朗運動的伊藤公式。

定理 3.3：若 $f(t, x) \in C^{1,2}$ ，也就是 f 函數對時間 t 是一次可微連續，對狀態 x 是二次可微連續，而且 W_t 是一維的布朗運動，則

$$f(T, W_T) = f(0, W_0) + \int_0^T f_t(t, W_t) dt + \int_0^T f_x(t, W_t) dW_t + \int_0^T f_{xx}(t, W_t) dt$$

或者以微分的形式寫出來

$$df(t, W_t) = f_t(t, W_t) dt + f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) dt。$$

備註：注意到最後一項 $\frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t) dt$ 或是 $\frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t)$ 稱為修正項 (correction term)。

這個定理可視為是『隨機版的微積分基本定理』，它具有非常基礎的重要性。可以說現代的金融的發展，若不是因著伊藤公式，衍生性金融市場就不會發展的這麼迅速。

證明描述：

在期間 $[0, T]$ 中給定分割 (partition) $\Pi = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ 後，利用 Taylor 展開可得到下面的結果：

$$\begin{aligned}
f(T, W_T) - f(0, W_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} [f(t_{i+1}, W_{t_{i+1}}) - f(t_i, W_{t_i})] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f_t(t_i, W_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i, W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{xx}(t_i, W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + \sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}(t_i, W_{t_i})(t_{i+1} - t_i) \\
&\quad (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}(t_i, W_{t_i})(t_{i+1} - t_i)^2 \\
&\quad + H.O.T \text{ (higher order terms ; 較高次項)}.
\end{aligned}$$

利用定理 2.5，可知道在最後等式中的前三項有非 0 的收斂。事實上其餘項包括所有 H.O.T 皆為收斂到 0。

範例 3.2

關於範例 3.1 中隨機積分 $\int_0^T W_t dW_t$ 的解究竟為何呢？若令 $f(x) = x^2$ ，則由定理 3.3 的微分型式可輕易看出

$$dW_t^2 = 2W_t dW_t + \frac{1}{2} dt。$$

也就是， $\int_0^T W_t dW_t = (W_T^2 - T)/2$ ，其中 $-T/2$ 為修正項，而非使用傳統微積分所猜測的結果 $W_T^2/2$ 。再次注意到，修正項是由布朗運動的二次變分而來。

作業 3.2 利用 Matlab 程式 2.1 中布朗運動的模擬來驗證 $\int_0^T W_t dW_t = (W_T^2 - T)/2$ 。

給定機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{t \geq 0}), \mathcal{P})$ ，一個伊藤過程 (Ito Process) 可以定義如下

$$X_t = X_0 + \int_0^t \theta_u du + \int_0^t \Delta_u dW_u。$$

中間項 $\int_0^t \theta_u du$ 稱作漂移項 (drift term)，最後一項 $\int_0^t \Delta_u dW_u$ 由於是一個隨機積分，它具有 martingale 的性質，因此通常也稱之為 martingale 項 (martingale term)。整個由 θ 以及 Δ 所定義出來的伊藤過程 X_t 通常也叫做一個連續半鞅的隨機過程 (continuous semi-martingale process)。其中， W_u 是一維度的布朗運動， X_0 是

\mathcal{F}_0 -measurable， θ_u 以及 Δ_u 都是 \mathcal{F}_u -measurable， $|\theta_u|$ 是可積的 ($\int_0^T |\theta_u| du < \infty$)， Δ_u^2 積分的期望值也是有界的 ($E\{\int_0^T \Delta_u^2 du\} < \infty$)。

伊藤過程 (Ito's process) 是定義成積分型式 (integrated form)

$$X_t = X_0 + \int_0^t \theta_u du + \int_0^t \Delta_u dW_u。$$

它也可以表成微分形式 (differential form)

$$dX_t = \theta_t dt + \Delta_t dW_t。$$

在這裡可以看得出來， X_t 若由一個隨機微分方程 (stochastic differential equation, SDE) 來定義，它仍與原來積分的定義是等價的。這裡強調 SDE 的解具有馬可夫性質 (Markov property)，以利第五節中的討論。本書就不再另對隨機微分方程做深入的介紹，除了舉例某些方程式的解法，以及第三章第六節的離散化結果。

引理 3.4：(Quadratic Variation)

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$$

這個引理描述了伊藤過程的二次變分僅與 martingale term 中的積分項 Δ 有關。同時也注意到，由於 Δ_t 過程可以是隨機的，因此這個積分是一個隨機變數。這回應了之前我們談到，二次變分事實上是一個隨機變數，而不是像變異數 (variance) 是一個常數。

透過微分的形式，我們可以將 X_t 的過程描述如下：

$$dX_t = \theta_t dt + \Delta_t dW_t。$$

它的交叉變分是定義為 $dX_t \cdot dX_t = \Delta_t^2 dt$ 。若將這個微分的形式再寫回積分形式，

就可以推導出引理 3.4。由此，可觀察到使用微分的形式來對伊藤過程做運算是相當方便的。這如同在傳統微積分裡面，利用微分的運算來取得積分的結果，其求解的過程往往會比較簡便。

接下來引入廣義的結果：伊藤過程的伊藤公式。

定理 3.5：若 $f(t, x) \in C^{1,2}$ 也就是函數 f 對時間 t 是一次可微連續，對狀態 x 是二次可微連續，而且 $dX_t = \theta_t dt + \Delta_t dW_t$ ，則

$$f(T, X_T) = f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d\langle X, X \rangle_t$$

或者

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) d\langle X, X \rangle_t。$$

備註：這個定理推廣了之前對布朗運動的伊藤公式。

一般來說，要透過定義來計算二次變分或交叉變分是比較麻煩的計算方式。反之，利用微分的形式，我們可以透過類似代數的運算，來得到這些交叉或二次變分的結果。透過一個運算表（operation table），令 W_{1t} 和 W_{2t} 都是獨立的布朗運動，則

	$\theta_t dt$	$\Delta_{1t} dW_{1t}$	$\Delta_{2t} dW_{2t}$
$\theta_t dt$	0	0	0
$\Delta_{1t} dW_{1t}$	0	$\Delta_{1t}^2 dt$	0
$\Delta_{2t} dW_{2t}$	0	0	$\Delta_{2t}^2 dt$

在符號中， $dX_t \cdot dY_t = d\langle X, Y \rangle_t$ 。從這個運算表中可以看出， $\Delta_{1t} dW_{1t}$ 對它自己的二次變分等於 $\Delta_{1t}^2 dt$ 、它與 $\Delta_{2t} dW_{2t}$ 的交叉變分等於 0、並且它與 $\theta_t dt$ 的交叉變分也是 0。此表中其它的結果可依此類推。基本上，由此運算表就可以推出高維度的伊藤定理。

作業 3.3 一個推廣 Black-Scholes 模型的方法是假設波動率與時間相關 (time dependent)，可記為 $\sigma(t)$ ，但並非隨機的。也就是說，

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma(t) W_t + \left(\mu t - \int_0^t \sigma^2(s) ds / 2 \right) \right\}.$$

證明實現變異是整合變異 $\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt$ 的一致 (consistent) 估計式。

上述一維度布朗運動的伊藤公式可以推廣到多維度的情況如下，給定 W_1 與 W_2 是兩個獨立的布朗運動，

$$\begin{aligned} dX_t &= \theta_{1t} dt + \sigma_{11t} dW_{1t} + \sigma_{12t} dW_{2t}, \\ dY_t &= \theta_{2t} dt + \sigma_{21t} dW_{1t} + \sigma_{22t} dW_{2t}, \\ \langle X, X \rangle_t &= \int_0^t \sigma_{11u}^2 + \sigma_{12u}^2 du. \end{aligned}$$

上述對 X 的二次變分的積分形式也可以寫成 $dX_t \cdot dX_t = (\sigma_{11t}^2 + \sigma_{12t}^2) dt$ 。回顧之前的運算表 $dt \cdot dt = dt \cdot dW_{it} = dW_{it} \cdot dW_{jt} = 0$ 若 $i, j \in \{1, 2\}$ 而且 $i \neq j$ ，然而 $dW_{it} \cdot dW_{it} = dt$ 。這些交叉變分以及二次變分的計算，對於伊藤公式的使用佔有很重要的地位。

關於伊藤過程在多維度的計算結果如下：

$$\begin{aligned} dX_t \cdot dX_t &= (\sigma_{11t}^2 + \sigma_{12t}^2) dt, \\ dY_t \cdot dY_t &= (\sigma_{21t}^2 + \sigma_{22t}^2) dt, \\ dX_t \cdot dY_t &= (\sigma_{11t} \sigma_{21t} + \sigma_{12t} \sigma_{22t}) dt, \end{aligned}$$

使得

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_{11u} \sigma_{21u} + \sigma_{12u} \sigma_{22u} du.$$

定理 3.6： (二維的伊藤公式，或稱之為伊藤乘積法則)

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t.$$

證明：

考慮函數 $f(x, y) = xy$ ，運用變分工作表在 $df(X_t, Y_t)$ 上即可。 ■

作業 3.3 給定一 Ito 過程 u_t 及整數 k ，化簡 $(1) \int_0^{2\pi} \cos(kt) du_t$ ， $(2) \int_0^{2\pi} \sin(kt) du_t$ 。

範例 3.2 高斯過程 (Gaussian process)

在金融的應用當中，例如對模擬利率以及一些信用風險的危險率，我們常常會用下列的過程來當做隨機模型，

$$dr_t = [g(t) + h(t)r_t]dt + \sigma(t)dW_t. \quad (3-1)$$

其中， g ， h 和 σ 都是給定的與時間有關的決定性函數 (deterministic function)，更明確的例子如下

1. Ornstein-Uhlenbeck process 也稱作 Vasicek process: $dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \sigma dW_t$
2. Ho-Lee model: $dr_t = g(t)dt + \sigma dW_t$

r_t 是高斯過程的定義是，將任一組離散的時間 t_1, t_2, \dots, t_n 所對應的隨機向量 $r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_n}$ ，它們的聯合分配會服從多維的常態分配。

作業 3.4 驗證隨機微分方程式 (3-1) 具有下列的解

$$r_t = e^{H(t)} r_0 + \int_0^t e^{H(t)-H(s)} g(s) ds + \int_0^t e^{H(t)-H(s)} \sigma(s) dW_s$$

$$\text{其中 } H(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

範例 3.3 均值回歸過程 (Mean-Reverting Process)

給定上面的結果，一個特別的範例如下。給定 r_u 對任何的 $0 < u < t$ ，一個 Ornstein-Uhlenbeck，簡稱 O-U 過程，服從了

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

它的解

$$r_t = e^{-\alpha(t-u)}r_u + \alpha \int_u^t e^{-\alpha(t-s)}m ds + \int_u^t \sigma e^{-\alpha(t-s)}dW_s$$

是一個高斯過程，而且它的邊界分配可被導出如下

$$\mathcal{N}\left(e^{-\alpha(t-u)}r_u + m(1 - e^{-\alpha(t-u)}), \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t-u)})\right) \xrightarrow{t \uparrow \infty} \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right).$$

注意到這個分配它具有一個極限性。當 $t \uparrow \infty$ 的時候，原來的分配會收斂到 $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ 。而最後這個極限分配（limiting distribution）稱作 r_t 過程的不變分配（invariant distribution）。

範例 3.5 對數常態過程（Log-Normal Process）

在財務理論裡面，最經常被用來模擬股權價格的一個隨機過程稱之為幾何布朗運動，定義如下

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

其中起始股價 $S_0 = s$ 。若對 S 過程取一個自然對數，將 $X_t := \log S_t$ ，則利用伊藤公式，不難推導出

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t.$$

這指出了 X_t 是常態分配並服從

$$\mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right).$$

因此 $S_t = e^{X_t}$ ，所以幾何布朗運動 S_t ，也稱作 log-Normal 過程，意為取了對數後仍為常態分配。

作業 3.5 計算 $E\left(\exp\left(\int_0^T \sigma W_s ds\right)\right)$ 。

[Hint : 計算積分 $\int_0^T \sigma W_s ds \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2 T^3}{3}\right)$ 並與隨機積分 $\int_0^T \sigma dW_s$ 的分佈比較。]

備註：這個作業會在第四章中亞式選擇權的作業2.1中用到。

作業 3.6 若 X_t 是下列隨機微分方程的解

$$\begin{cases} dX_t = (\mu X_t + \mu')dt + (\sigma X_t + \sigma')dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

且令 $S_t = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$ 。

1. 推導出 S_t^{-1} 所滿足的隨機微分方程式。
2. 證明 $(dX_t S_t^{-1}) = S_t^{-1}(\mu' - \sigma\sigma')dt + \sigma'dW_t$ 。
3. 推導出 X_t 的解。

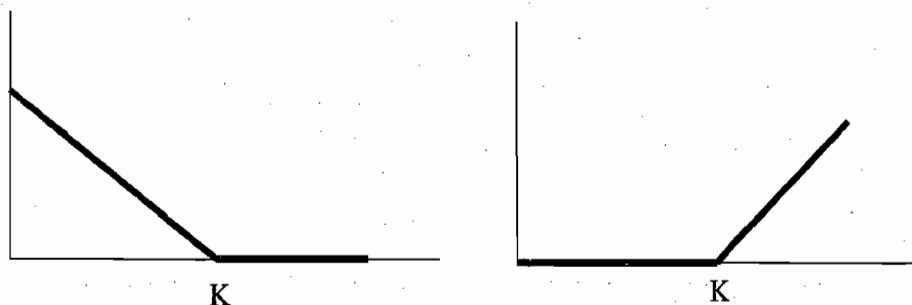
第四節 選擇權的訂價理論 (一)：無套利方法 (Option Pricing Theory (I): No Arbitrage Argument)

4.1 衍生性金融市場簡介(Introduction to Financial Derivative Market)

在金融上，選擇權是一紙契約預先規範了受益的形式，使得契約持有人有權利，但非義務，在某日得以履行約定並支取所實現的報酬。舉例來說，一個歐式買權 (European call option) 是一張契約，它規範了持有人的權利，但非義務，是可以在某固定的到期日 (maturity, expiration date) T ，以一個預先決定好了的履約價格 K ，來購買一單位的標的資產。假若 S_T 代表標的資產在到期日的價格，則歐式買權在到期日的價值，亦稱之為報酬 (payoff)，就是 $h(S_T) = (S_T - K)^+$ ，其中買權的報酬函數定義為 $h(x) = (x - K)^+ = \max(x - K, 0)$ ，見圖 4-1。這是由於契約持有人被允許

在到期日以較低的履約價 K 來交換較高價的資產 S_T ，並立刻在市場上賣出該資產，以獲得 $S_T - K$ 的利潤。當 S_T 不大於 K 時，契約持有人沒有義務要履約並承擔損失，因此下方（或損失）風險得以控制且報酬為 0。

歐式賣權（European put option）與買權相仿，它規範了契約持有人有權利，但非義務，可以在某固定的到期日 T ，以一個預先決定好了的履約價格 K ，來買出一單位的標的資產。從數學上看，歐式賣權所規範的報酬是 $h(S_T) = (K - S_T)^+$ ，見圖 4-1。



賣權報酬（put payoff）函數買權報酬（call payoff）函數

圖 4-1 賣權及買權報酬函數

一般而言，歐式選擇權的定義，是規範了對標的資產 S 在某一到期日 T 的報酬為 $h(S_T)$ ，其中報酬函數 $h(x)$ 是非負的。對買權來說， $h(x) = (x - K)^+$ ；對賣權來說， $h(x) = (K - x)^+$ 。歐式選擇權是一種路徑獨立（path-independent）的契約，這是由於它的報酬 $h(S_T)$ 僅是到期資產價格 S_T 的函數。若是契約報酬與到期日前的資產價格有關，則稱為路徑相依（path-dependent）的選擇權，例如美式選擇權（American option），亞式選擇權（Asian option），以及許多其它被統稱為新奇選擇權（exotic option）的契約。選擇權契約的價格也稱做權利金或貼水（premium）。

期貨（futures）或是遠期契約（forward contracts）可以視為歐式選擇權的特例，只不過它們在市場上的交易習慣不同，其報酬函數皆與最簡單的線性函數 $h(x) = x$ 有關。由於期貨契約淺顯易懂，期貨市場的出現由來已久。早在 1848 年芝加哥期貨

交易所 (Chicago Board of Trade, CBOT⁴) 就已經成立, CBOT 對標的商品進行了標準化, 並規範投資人在集中市場的交易行為, 以在增加流動性的同時可降低交易雙方的信用風險。另外由於期貨價格的決定具有簡易的理論答案, 大幅擴張了許多非傳統標的資產的期貨市場, 例如商品 (包括黃金等貴重金屬) 期貨、股票期貨、利率期貨, 以及其它並未集中在交易所而統稱為店頭市場 (over the counter, OTC) 等期貨交易。關於從線性契約如期貨到非線性契約如選擇權, 若以 1848 年成立的 CBOT 與 1973 年成立的 CBOE 作為兩個標竿, 這段發展足足花費了一又四分之一個世紀。

這些金融契約除了內容的形式非常有彈性之外, 「客製化」(taylor made) 的金融商品設計, 使得金融機構可提供多樣化的服務, 讓消費者的金融風險, 例如高科技或石化產業的匯率風險, 得以轉嫁出去。

簡介完衍生性金融商品市場之後, 吾人不禁要問下面兩個問題:

- (1) 選擇權契約的買方應該支付多少錢, 這屬於「訂(定)價」問題(pricing problem)。
- (2) 選擇權契約的賣方在取得了權利金之後, 要如何履約以在未來生成報酬函數的值呢? 這屬於「避險」問題(hedging problem)。

由於上述兩個問題的解答都會涉及「套利」(arbitrage) 的觀念。以下我們舉個例子來說明。

買/賣權價平 (call/put parity) 的套利關係: 以 S_t , C_t 與 P_t 分別表示在 t 時的現貨 (如股價), 其歐式買權與賣權的價格。在此假設它們的到期日 T 與履約價 K 均為相同, 並且資產 S 不支付股利, 無風險利率為 r 。買/賣權的價平關係如下

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}。$$

這個關係的證明可以利用「無套利」推論出來。首先假設 $C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$, 則在 t 時可形成一投資組合 (portfolio) 如下: 買一單位的股票與賣權, 且賣出一買

⁴ 已於 2007 年併入芝加哥交易所集團 (CME groups, Inc.), 該集團主要交易期貨與選擇權契約, 商品面包括了農畜、利率、能源、天氣、股票指數、外匯及金屬等等。

權，淨值為 $C_t - P_t - S_t$ 。若該淨值為正，存入銀行帳戶中獲取利率 r 直到 T 。相反地，則從銀行借錢並直到 T 。在 T 時，有兩種可能的狀況會發生：

(1) $S_T > K$ ：從投資組合中可知最後淨值為 $(C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} - (S_t - K) + S_t = K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$ 。

(2) $S_T < K$ ：從投資組合中可知最後淨值為 $(C_t - P_t - S_t)e^{r(T-t)} + (S_t - K) - S_t = K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$ 。

也就是說，適當的投資組合可以「鎖定」正的報酬而無需任何成本。顯然的，一個有效率的金融市場是不會允許套利行為存在太久。在下節中，我們會使用更深入的定價理論回來證明此買／賣權的價平關係。

以下先考慮一個歐式選擇權的訂（定）價問題，對於其它路徑相依選擇權的評價，由於需要更多的知識，留待後述。假設一個歐式選擇權的報酬（payoff）為 $h(S_T)$ ，其中，股價 S_t 是由一個幾何布朗運動在歷史機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathcal{P})$ 定義如下：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4-1)$$

$$S_0 = x \quad (4-2)$$

範例 4.1 真實與電腦模擬的指數

圖 4-2 中其一為真實的指數，另一為電腦根據式（4-1）所模擬出的指數。讀者是否可以分辨何者為真？關於模擬指數的方法可以根據本章中 Matlab 程式 2-1 及範例 3.4，或者留待第三章第 3.3 與 3.5 節中會有詳細的介紹。

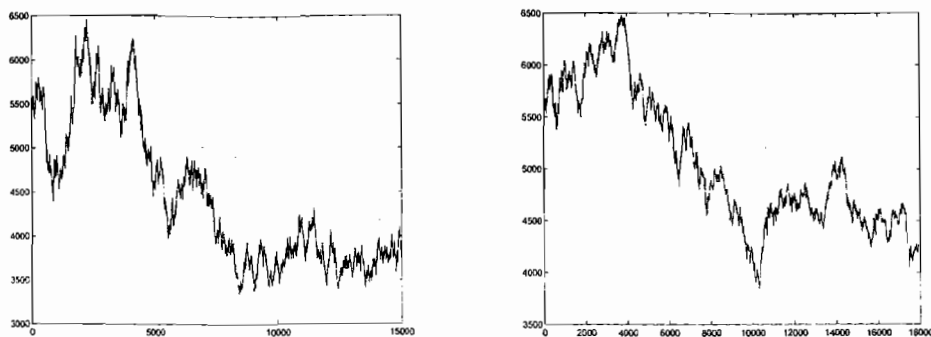


圖4-2 真實與電腦模擬的指數

一個動態交易策略 (dynamic trading strategy)，乃是指一組適應過程 (adapted process) (α_t, β_t) ，其中 α_t 指該策略在時間 t 所需要持有股票 (標的資產) 的單位數，而 β_t 指需要持有的債券 (無風險資產) 單位數。假設時間 t 的債券價格為 e^{rt} ，則此投資組合 (portfolio) 在時間 t 的價值為 $\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}$ 。在到期日 T 的時候，假設此投資組合的價值可以複製歐式選擇權的報酬 $h(S_T)$ ，也就是說

$$\alpha_T S_T + \beta_T e^{rT} = h(S_T)。$$

此外，我們也假設這個投資組合服從了自我融資 (self-financing) 的條件。也就是說，此投資組合價值的變動是完全由標的資產價格變動及債券價格變動所決定。自我融資條件在數學上以微分形式的表示如下：

$$d(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) = \alpha_t dS_t + r\beta_t e^{rt} dt，$$

或者是以積分的形式來描述如下：

$$\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt} = \alpha_0 S_0 + \beta_0 + \int_0^t \alpha_s dS_s + \int_0^t \beta_s de^{rs}, 0 \leq t \leq T。$$

備註：數學上的微分 $d(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt})$ 當然不必然滿足自我融資條件。

應用伊藤引理 (Ito's lemma)，不難發現交易策略 $\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}$ 是一個自我融資投資組合若且唯若它折現後的價值為：

$$de^{-rt}(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) = \alpha_t d(e^{-rt} S_t) \quad (4-3)$$

作業 4.1 利用定理 3.6 證明式 (4-3)。

4.2 Black-Scholes 偏微分方程式(Black-Scholes PDE)

無套利訂價理論 (no arbitrage pricing theory) 是基於一個衍生性商品的公平價格必須等同於某一投資組合的價值

$$\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt} = P(t, S_t) \quad (4-4)$$

否則存在套利機會，其中 $P(t, x)$ 是選擇權在 t 的價值，而股價 S_t 的變數記為 x 。假設選擇權的價格函數足夠平滑，則應用伊藤引理於式 (4-4)，可以導出：

$$(\alpha_t \mu S_t + \beta_t r e^{rt}) dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dW_t \quad (4-5)$$

其中，所有關於 P 的偏微分都是在變數 (t, S_t) 上計算，將上式中等號兩邊 dW_t 的係數相等，我們可以得到

$$\alpha_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t), \quad (4-6)$$

使得透過式 (4-4) 得到

$$\beta_t = (P(t, S_t) - \alpha_t S_t) e^{-rt} \quad (4-7)$$

將 (4-6) 與 (4-7) 的結果代入 (4-5) 中，再讓等號兩邊 dt 項的係數相等可以得到

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) - r P(t, S_t) = 0,$$

而此方程式對任何股價 $S_t > 0$ 及 $0 \leq t < T$ 都成立 (a.s.)。因此，選擇權價格函數 $P(t, x)$ 是以下的 Black-Scholes 偏微分方程式 (BS Pricing PDE) 的解

$$\mathcal{L}_{BS} P(t, x) = 0, \quad (4-8)$$

並且期末條件 (terminal condition) 為 $P(t, x) = h(x)$ 。其中，偏微分算子

$$\mathcal{L}_{BS}(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - r \right) (\cdot)$$

作用在訂價函數 $P(t, x)$ 上，該函數中變數 (t, x) 的定義域為 $[0, T) \times (0, \infty)$ 。Black-Scholes 偏微分方程式 (如 (4-8) 所述)，可由偏微分方程的理論方法或透過一些數值方法，如有限差分法，以及蒙特卡羅模擬法等求解。這些解法留待本書第二部份金融計算中再行討論。

動態交易策略 (α_t, β_t) 又稱避險策略，乃是要著重於此策略可以消除掉市場風險。這個策略要求持有風險資產的單位數為 $\alpha_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t)$ ，在金融工程中也稱作 delta 部位(position)。觀察 Black-Scholes 偏微分方程式 (4-8)，可發現在模型 (4-1) 中所假設的報酬率 μ 並沒有出現在此 PDE 中，這是 Black-Scholes 訂價理論中一個令人訝異的結果。它闡述了即使兩個投資人，對市場中風險資產報酬率有不同的看法，但這並不會影響到他們對選擇權的訂價方式。這是因為在訂價偏微分方程式中，風險性資產的報酬率 μ 並沒有出現。事實上，透過以上的計算，報酬率是由無風險利率 r 所取代，此現象與風險中立訂價理論有著極大的關係，我們會在第五節中詳述。

4.3 Black-Scholes 選擇權訂價公式(Black-Scholes Option Pricing Formula)

將一個歐式買權的價格，記為 $C_{BS}(t, x)$ 。根據式 (4-8)，它會滿足 $\mathcal{L}_{BS} C_{BS}(t, x) = 0$ ， $C_{BS}(T, x) = (x - K)^+$ ，其中 T 是到期日， K 是履約價。事實上可以利用微分方程中變數變換的方式，將此 Black-Scholes pricing PDE 轉換成為一個熱傳導方程式，接著利用熱核 (heat kernel) 對期末條件做卷積，就可以推出下列的封閉解。在此我們雖不提供方程上詳細的推導，但會在下一節當中以機率的方式進行推導。歐式買權存在一個封閉解函數型式如下：

$$C_{BS}(t, x) = x \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2), \quad (4-9)$$

$$\text{其中 } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-u^2/2} du.$$

作業 4.2 驗證 Black-Scholes 公式的正確性。(可直接使用範例 4.1 的希臘字母)

買權與賣權存在一個有趣的關係稱為賣權買權的價平關係 (put-call parity)

$$C_{BS}(t, x) - P_{BS}(t, x) = x - Ke^{-r(T-t)}.$$

此決定性關係可以很容易地由以下的偏微分方程式

$$\mathcal{L}_{BS}(C_{BS} - P_{BS})(t, x) = 0$$

並配合邊界條件 $h(x) = x - K$ 解出

$$(C_{BS} - P_{BS})(t, x) = x - Ke^{-r(T-t)}. \quad (4-10)$$

為了對選擇權進行有效的風險控管，市場上非常重視選擇權的敏感度 (sensitivity) 分析；也就是價格對於各樣的變數 (例如時間 t ，標的物價格 x) 與各樣的參數 (例如無風險利率 r ，波動率 σ) 的導數，並將這些偏微分統稱為「希臘字母」(Greek letters)。譬如說， $\partial P / \partial t$ 叫做 Θ (Theta)， $\partial P / \partial x$ 叫做 Δ (Delta)， $\partial^2 P / \partial x^2$ 叫做 Γ (Gamma)， $\partial P / \partial r$ 叫做 ρ (Rho)， $\partial P / \partial \sigma$ 叫做 v (Vega)，其中有趣的是 Vega 非屬原來真正的希臘字母，但由於在金融實務中常用，也就被納入金融工程中所謂的「希臘字母」了。

範例 4.2 Black-Scholes 公式中的希臘字母

以買權的價格為例，對賣權而言，其希臘字母僅需再參考式 (4-10) 修正後即可。

$$\Theta \text{ (Theta)} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{x\sigma}{2\sqrt{T-t}} \mathcal{N}(d_1) + Kre^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

$$\Delta \text{ (Delta)} = \frac{\partial P}{\partial x} = \mathcal{N}(d_1)$$

$$\begin{aligned}\Gamma \text{ (Gamma)} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{N(d_1)}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\ \rho \text{ (Rho)} &= \frac{\partial P}{\partial r} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ v \text{ (Vega)} &= \frac{\partial P}{\partial \sigma} = x\sqrt{T-t}N(d_1)\end{aligned}$$

以及一些二次或更高次的偏微分，例如 $\Delta\text{Vega} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \sigma}$ 等組合。

備註：透過了這些基本希臘字母的組合，例如 $\Delta\text{Vega} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \sigma}$ ，可以形成更高次的偏微分，它們在實務上的運用顯得相當複雜，我們會在第六章中的避險策略中運用到。

作業 4.3 解釋對歐式買權動態避險時，為何要對標的資產「買高賣低」(buy high sell low)。

注意到從 Black-Scholes 公式當中，只有一個無法直接觀察的參數，也就是波動率 σ ，一般在實務上有兩種方法可以從市場上估計波動率：

1. 直接法：給定一組標的物的歷史價格，我們可以用(1)log return 的二次變異，(2)log return 的最大概似法，或是(3)先計算其報酬率，然後算出標準差。該量稱之為「歷史波動率」(historical volatility)。
2. 隱含法：給定選擇權市場中，關於某到期日 T 與某履約價 K 之歐式買權（或賣權）的成交價格，利用 Black-Scholes 的評價公式反推出 σ ，稱作「隱含波動率」(implied volatility)，通常也記做 $\sigma_{imp}(T, K)$ 。

關於波動率估計的統計問題，第五章會有詳細的討論。

第五節 選擇權的訂價理論 (二)：風險中立訂價 (Option Pricing Theory (II): Risk-Neutral Evaluation)

在這一節中，我們會提供另一種利用機率測度轉換的作法來推導 Black-Scholes 偏微分方程式 (4-8)，先介紹核心的理論 Girsanov Theorem 如下。它提供一種機率

測度轉換的方式，使得具有漂移項的布朗運動得以被視為是一個標準的布朗運動。

定理 5.1： (Girsanov Theorem for Brownian Motion) 令 (W_t) 是機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ 下的一個標準布朗運動，給定隨機過程 (θ_t) 並滿足積分條件 $E_{\mathcal{P}} \left\{ e^{\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds} \right\} < \infty$ ，則可定義一個指數平賭 (exponential martingale)

$$\eta_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

以及一個等義的機率測度 $Q \sim P$ 滿足 $\frac{dQ}{dP} = \eta_T$ ，使得具有漂移項的布朗運動 $W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ ，在機率測度 Q 之下是一個標準的布朗運動。

回顧自我融資投資組合 (如方程式 (4-3) 所述) 的特性，應用伊藤引理可以得到

$$\begin{aligned} de^{-rt}(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) &= \alpha_t d(e^{-rt} S_t) \\ &= \alpha_t (e^{-rt} S_t) \sigma d \left(W_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t \right), \end{aligned}$$

其中布朗運動 W_t 是定義在原歷史機率測度 \mathcal{P} 之下。利用 Girsanov 定理，可以建立一個新的等價機率測度 \mathcal{P}^* ，使得具有漂移項的布朗運動 $\left(W_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t \right)$ ，可以轉換為一個標準的布朗運動 (記為 W_t^*)。因此，隨機微分方程式在 \mathcal{P}^* 下變成：

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= (\mu + r - \mu) S_t dt + \sigma S_t d \left(W_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t \right) \\ &= r S_t dt + \sigma S_t dW_t^*. \end{aligned} \quad (5-1)$$

而且 $\ln S_t / S_0$ 會服從常態分佈 $\mathcal{N} \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right)$ 。漂移布朗運動項中的比值 $\frac{\mu-r}{\sigma}$ 稱作市場風險價格 (market price of risk)，通常被解釋為投資人願意為了選擇權 (投資在未來的風險) 所額外支付的價格。這個比值也是金融中常見的夏普比例 (Sharpe ratio)，用來衡量每單位風險的超額報酬 (excess return)。

總之，利用 Girsanov 定理的機率測度轉換，會導致下面兩個結果：

1. 折現後的股價在新的測度之下是一個 martingale (意思是公平), 這是因為

$$d(e^{-rt}S_t) = (e^{-rt}S_t)\sigma dW_t^*。$$

2. 折現後的投資組合價值在新的測度之下也是公平的, 這是因為

$$de^{-rt}(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) = \alpha_t (e^{-rt}S_t)\sigma dW_t^*。$$

我們稱此機率測度 \mathcal{P}^* 為風險中立機率測度 (risk-neutral probability measure) 或是等義 martingale 測度 (equivalent martingale measure, EMM)。

回顧先前的交易策略, 它必須要能複製到期的報酬 $h(S_T)$, 也就是

$$\alpha_T S_T + \beta_T e^{rT} = h(S_T)。$$

因為 $e^{-rt}(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt})$ 在 \mathcal{P}^* 下是公平的, 我們可以得到

$$\begin{aligned} e^{-rt}(\alpha_t S_t + \beta_t e^{rt}) &= E^*\{e^{-rT}(\alpha_T S_T + \beta_T e^{rT})|\mathcal{F}_t\} \\ &= E^*\{e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t\}。 \end{aligned}$$

另外, 利用股價的馬可夫性質 (Markov property), 投資組合價值等同於

$$\begin{aligned} \alpha_t S_t + \beta_t e^{rt} &= E^*\{e^{-r(T-t)}h(S_T)|\mathcal{F}_t\} \\ &= E^*\{e^{-r(T-t)}h(S_T)|S_t\}。 \end{aligned} \quad (5-2)$$

根據公平價格 (如 (4-4) 定義), 選擇權價格就可以被定義為: 折現後報酬在風險中立機率測度 \mathcal{P}^* 之下的條件期望

$$P(t, S_t) = E^*\{e^{-r(T-t)}h(S_T)|S_t\}, \quad (5-3)$$

並且標的物資產價格 S 在 \mathcal{P}^* 之下滿足了, $t \leq u \leq T$,

$$dS_u = rS_u du + \sigma S_u dW_u^*,$$

$$S_t = x。$$

根據 (5-3) 這個條件期望的結果，蒙地卡羅模擬法就成為一個很自然的方法來估計選擇權的價格。事實上，在風險中立機率測度 \mathcal{P}^* 之下（而不是歷史機率測度 \mathcal{P} 之下），我們可以用類似的方法來定義其他複雜選擇權，例如美式選擇權或其他新奇選擇權的價格。此外，利用條件期望值與偏微分方程式之間的關聯，也就是 Feynman-Kac 公式，我們也能很輕易的利用條件期望值 (5-3)，推導出 Black-Scholes 偏微分方程式如 (4-8)，此方法會在未來詳述。

5.1 Black-Scholes 公式推導 (Derivation of Black-Scholes Formula)

如 (5-3) 所示，選擇權的價格可以定義為一個條件期望值，從 (5-1) 中不難看出 $S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z\right)$ ，其中 Z 是一個標準常態隨機變數。因此，一個 S_T 的條件機率密度函數在給定 S_t 之下也是對數常態分配，使得歐式買權的價格可以寫成一個積分函數如下

$$\begin{aligned} P(t, S_t) &= E^* \left\{ e^{-r(T-t)} \left[S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z\right) - K \right]^+ \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} \left[S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z\right) - K \right]^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= S_t \mathcal{N}(d_1(t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2(t, S_t)), \end{aligned} \quad (5-4)$$

其中

$$d_{1/2}(t, x) = \frac{\ln(x/K) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

作業 5.1 推導出 Black-Scholes 封閉解公式 (5-4)。

作業 5.2 推導出避險係數 Delta $\Delta = \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \mathcal{N}(d_1(t, x))$ 。

作業 5.3 證明 $S_t \mathcal{N}'(d_1(t, S_t)) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}'(d_2(t, S_t)) = 0$ ，並導出 Vega

$$V = \frac{\partial P}{\partial \sigma}(t, x; \sigma) > 0。$$

作業 5.4 (1) 假設報酬函數 $h(x)$ 是凸函數且為齊次 (homogeneous)，意即

$$h(cx) = ch(x), c \in R, \text{證明廣義歐式選擇權價格，如式 (5-3) 所定義，}$$

的自然下界為 $h(S_t)$ 。[Hint：利用 Jensen's Inequality]

(2) 對買權契約來說，進一步證明歐式買權價格的上下界

$$S_t - K \leq (S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ \leq P(t, S_t) \leq S_t,$$

其中第二項稱為折現後的內涵價值 (intrinsic value)。另利用 put-call parity 推導出賣權價格的上下界。

備註：實務上，選擇權的價格可理解為折現後內涵價值與時間價值 (time value) 的和，雖然這樣的實值意義並不大。

5.2 資產訂價基本定理(Fundamental Theorems of Asset Pricing)

定理 5.2：(Martingale Representation Theorem) 在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathcal{P})$ 下， $W_t, 0 \leq t \leq T$ ，是布朗運動並產生了域流 \mathcal{F}_t 。若 $M_t, 0 \leq t \leq T$ ，在此域流下是一個 martingale，則存在一適應過程 $\Gamma_u, 0 \leq u \leq T$ ，使得

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_u dW_u, 0 \leq t \leq T。$$

備註：這裡的 Γ_u 扮演了避險策略的角色，因為折現後的金融資產在風險中立測度下，常假設為一個 martingale。

接下來探討資產訂價基本定理。

定義 5.1： 機率測度 \mathcal{P}^* 是風險中立 (risk-neutral) 若

- (1) \mathcal{P}^* 和 \mathcal{P} 是等義的 (equivalent)。(也就是對每個集合 $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{P}(A) = 0$ 若且唯若 $\mathcal{P}^*(A) = 0$)
- (2) 在測度 \mathcal{P}^* 之下, 折現後資產價格 $e^{-rt}S_t$ 是一個 martingale。

引理 5.1：

若 \mathcal{P}^* 是風險中立的機率測度, 且 V_t 是投資組合的價值, 則在 \mathcal{P}^* 下折現後的投資組合價值 $e^{-rt}V_t$ 也是一個 martingale。

證明：

檢查 $de^{-rt}V_t = e^{-rt}\alpha_t\sigma S_t dW_t^*$ 。

套利 (arbitrage), 也稱作免費的午餐 (free lunch), 是一種交易方式, 使得投資人在沒有任何成本之下, 得以在未來某時 T 必不會有損失, 並且存在正的機率會賺到錢。

定義 5.2： 套利是當一投資組合的價值過程 V_t 滿足了 $V_0 = 0$, 使得在未來某時 $T > 0$,

$$\mathcal{P}(V_T \geq 0) = 1 \text{ 且 } \mathcal{P}(V_T > 0) > 0。$$

備註： 可以證明, 當風險中立的機率測度不存在時, 會導致套利的機會。

定理 5.3： (資產訂價第一基本定理 (First Fundamental Theorem of Asset Pricing)) 若市場模型 (market model) 具有一風險中立的機率測度, 則不存在套利。

證明：

由於在風險中立機率測度 \mathcal{P}^* 之下，折現後的投資組合價值過程 $e^{-rt}V_t$ 是一個 martingale。若 $V_0 = 0$ ，則

$$E^*\{e^{-rT}V_T\} = 0。$$

假設 $\mathcal{P}\{V_T \geq 0\} = 1$ ，由於 \mathcal{P}^* 與 \mathcal{P} 等義，可導出 $\mathcal{P}^*(V_T < 0) = 0$ ，並且意味著 $\mathcal{P}^*(V_T > 0) = 0$ 。再由 \mathcal{P}^* 與 \mathcal{P} 的等義性證出 $\mathcal{P}(V_T > 0) = 0$ ，而此與 V_t 的套利假設互為矛盾。 ■

定義 5.3：（市場模型是完備的（complete））若每一個衍生品可被避險（hedged），該市場亦被稱為完備市場（complete market）。

定理 5.4：資產訂價第二基本定理（Second Fundamental Theorem of Asset Pricing）若市場模型（market model）已具有一風險中立的機率測度，則市場是完備的若且唯若該風險中立的機率測度是唯一的。

證明：

（ \Rightarrow ）假設存在兩個風險中立的機率測度 \mathcal{P}_1^* 與 \mathcal{P}_2^* 。若 $A \in \mathcal{F}_T$ 並考慮報酬函數 $I_A \frac{1}{D_T}$ ，由於 \mathcal{P}_1^* 與 \mathcal{P}_2^* 是風險中立，折現後的投資組合價值過程必然是一個 martingale。故得

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^*(A) &= E_1^*\left\{D_T I_A \frac{1}{D_T}\right\} \\ &= E_1^*\{D_T V_T\} \text{ (portfolio 期末的價值 = 報酬)} \\ &= V_0 \text{ (martingale 性質)} \\ &= E_2^*\{D_T V_T\} \\ &= E_2^*\left\{D_T I_A \frac{1}{D_T}\right\} = \mathcal{P}_2^*(A)。 \end{aligned}$$

由於集合 A 是從 \mathcal{F}_T 中任選的，此兩機率測度必然相等。

(\Leftarrow) 可直接由風險中立評價的理論推導得出，細節則留為習題。 ■

5.3 遠期與期貨的價格(Prices of Forward and Futures)

遠期契約 (forward contract) 規範了交易雙方在不須支付任何費用之下，可以用一個事前約定好了的價格 K ，在未來的某一個時間點 T ，來買或賣某個資產。舉例來說，假設現在的時間為 t ，買賣雙方同意進入一遠期契約，意味著現在同意以某個價格 K ，使得他們得以在未來的時間 T ，用現金 K 與商品 S_T 互換，而互換的過程可以是實務交割或是現金交割。所謂的 T -遠期價格 (T-forward price) $For_S(t, T)$ 就是履約價 K ，使得該遠期契約在時間 t 的價值為 0。在遠期市場中，資產可以是貨幣 (currency)、權益證券 (equity security) 如股票、或是商品市場 (commodity) 如咖啡等。

以遠期契約的買方來說，該契約的報酬函數為 $S_T - For_S(t, T)$ 。由於進入或持有該契約不須支付任何代價，因此定價方程式成立

$$E^*[D_{t,T}(S_T - For_S(t, T)) | \mathcal{F}_t] = 0,$$

其中 $D_{t,T}$ 是從時間 t 到 T 的折現因子。由資產在風險中立測度下 martingale 的性質以及債券的定義，可得 $For_S(t, T) = S_t / B(t, T)$ 。 $B(t, T)$ 為 $\exp(r(T - t))$ 當無風險利率為常數 r 或可為廣義的債券價格 (見本書第貳章的定義)。

作業 5.5 以無套利法推論出遠期契約的價格。

作業 5.6 若假設標的風險性資產 S 服從 Black-Scholes 模型，以風險中立法寫出訂價 PDE，並解出遠期契約的價格。

遠期契約提供了買賣雙方互換價格 (或稱作市場風險 (market risk)) 的機會，在店頭市場 (over the counter, OTC) 交易。它的立意雖好，但無法規避買賣雙方在履約之前潛在的信用風險 (credit risk)。市場就發展出集中交易所 (exchange) 以嚴

格限定參與市場的會員投資機構，並且用「保證金」機制 (margin mechanism) 來減少信用風險，而這種遠期契約就稱之為期貨。

期貨契約的價值定義如下 $Fut_S(t, T) = E^*[S_T | \mathcal{F}_t]$, $0 \leq t \leq T$ 。當無風險利率是常數時，遠期與期貨的價值會一樣，這是由於利用折現後的標的物價格是一個 martingale，可導出

$$\begin{aligned} Fut_S(t, T) &= e^{r(T-t)} E^*[e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t] \\ &= S_t / B(t, T) \end{aligned}$$

當利率是隨機的時候，上式雖不再成立，不過遠期與期貨的價差 (forward-futures spread) 卻能成為衡量債券與現貨相關性的指標，這是由於

$$\begin{aligned} For_S(0, T) - Fut_S(0, T) &= \frac{S_0}{E^*[D_{0,T}]} - E^*[S_T] \\ &= \frac{1}{E^*[D_{0,T}]} (E^*[D_{0,T} S_T] - E^*[D_{0,T}] E^*[S_T]) \\ &= \frac{1}{E^*[D_{0,T}]} Cov(D_{0,T}, S_T) \end{aligned}$$

特別注意到本小節並沒有用到「風險性資產的模型假設」，也就是這裡的假設為「免模型」(model free)，請與選擇權訂價理論互相比較之間的異同。

第六節 Feynman-Kac 公式：條件期望與 PDE

(Feynman-Kac Formula: Conditional Expectation and PDE)

我們已經在第 4.2 節與第 5.1 節中，分別利用無套利方法與風險中立法推導出了歐式選擇權的價格函數。它一方面滿足了 Black-Scholes 訂價 PDE，另一方面又可用

一個條件期望來刻劃，讀著應該會好奇於 PDE 與機率之間的關係。事實上這個聯想完全正確，在許多的應用問題中存在着類似的關聯，使得人們可以用機率的方法來研究 PDE，或者相反。在金融領域中，此二者間的聯繫由 Feynman-Kac 公式確立。

定理 6.1：（Feynman-Kac Formula）給定隨機微分方程 $dX_u = \beta(u, X_u)du + \gamma(u, X_u)dW_u$ ，且 $h(y)$ 是連續有界的函數。對一固定時間 T ，若函數

$$g(t, x) = E\{e^{-r(T-t)}h(X_T)|X_t = x\},$$

由條件期望所定義出來，則 $g(t, x)$ 會滿足以下的 PDE

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \beta(t, x)\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{\gamma^2(t, x)}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) - rg(t, x) = 0.$$

其中的期末邊界條件為 $g(T, x) = h(x)$ 。

證明：

首先觀察到 $e^{-rt}g(t, X_t)$ 是一個 martingale，然後應用伊藤公式做微分並將漂移項設為 0 即可得證。 ■

第七節 布朗運動的路徑性質(Path Properties of Brownian Motion)

衍生性金融商品的設計，常與標的資產的路徑有關。在 Black-Scholes 模型下，就可化簡為與布朗運動的路徑性質有密切的關係，現在我們介紹幾個主要的隨機變量：停止時間（stopping time），首達時間（first hitting time）與路徑極大（running maximum）的分布性質，後二者分別與障礙選擇權與回顧選擇權的訂價有關。更多關於新奇選擇權（exotic option）的定義，訂價，以及計算方式請見第三章第七節與第四章第二節。

7.1 停止時間(Stopping Time)

停止時間是隨機過程中的重要觀念，在金融中通常與某種策略或契約中的履約時間 (exercise time) 有關，為了方便介紹，我們先從離散時間談起。

定義 7.1: 在一個離散模型的機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{n \geq 0}, \mathcal{P})$ 下，隨機變數

$\tau \in \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ 稱為停止時間若

$$\{\tau \leq n\} = \{\omega: \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \leq \infty.$$

上述的定義條件等義於 $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \leq \infty$ 。這可由於在離散的情形下 $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$ 並且 $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{\tau = k\}$ 的事實彼此互推出來。

備註: 停止時間 τ 是否在時間 n 被實現，可由在 n 時的資訊 \mathcal{F}_n 來決定。

範例 7.1 進入或離開時間 (Entry or Exit Time)

令 (X_n) 是一適應過程。給定一個 Borel 集 $B = [c, \infty)$ ，定義 $\tau = \inf\{n \geq 0: X_n \in B\}$ 為隨機過程 X 進入 B 的首達時間， τ 為停止時間。

證明:

從 $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n$ 且 $\tau = \infty$ 若 X 從未進入 B ，可驗證其定義。 ■

定義 7.2: 停止時間 τ 是有界的若存在一個常數 K 使得 $P(\tau \leq K) = 1$ 。

定義 7.3: 一個連續的隨機變數 $\tau \in [0, \infty]$ 稱為停止時間若 $\{\tau \leq t\} = \{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall 0 \leq t \leq \infty$ 。

備註: 根據在 t 時的資訊 \mathcal{F}_t 就能決定是否要在 t 時停止。

許多離散時間下停止時間的性質可以保留至連續時間，不過證明的方式比較複

雜，我們在大部份的情形下將會省略證明。

定理 7.1：（停止時間原則，Stopping Time Principle） 令 τ 是有界停止時間且 X_t 是平賭過程，則 X_τ 可積且 $E\{X_\tau\} = E\{X_0\}$ 。若 X_t 是一個 super-martingale，則 $E\{X_\tau\} \leq X_0$ 。

定理 7.2：（選擇抽樣定理，Optional Sampling Theorem） 若 σ, τ 為有界的停止時間且 $\sigma \leq \tau$ ，另若 X_t 是平賭過程，則 $E\{X_\tau | \mathcal{F}_\sigma\} = X_\sigma$ 。因此可得 $E\{X_\tau\} = E\{X_\sigma\}$ 。

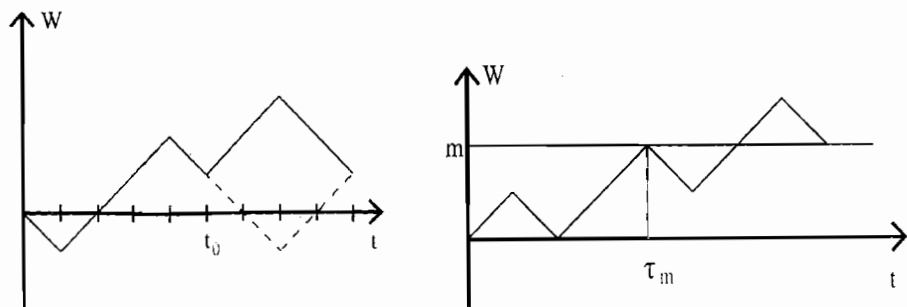
$X_{t \wedge \tau}$ 稱為停止過程 (stopped process)。它意味著當 $t < \tau(\omega)$ 時， $X_{t \wedge \tau} = X_t$ 停止過程就是原來的過程；然而當 $t \geq \tau(\omega)$ 時，過程就像被冰凍住一般，完全的停在 X_τ 的位置。因此也不難想像，若過程 X_t 是一個平賭，在 $X_{t \wedge \tau}$ 停下來之前是公平的。若被停下來，由於之後的過程成了常數，因此也是一個平賭。

備註：一個被停止時間 τ 所停下來（超）平賭過程仍是一個（超）平賭過程。

7.2 鏡射原理與首達時間 (Reflection Principle and First Hitting Time)

定理 7.3：連續時間下的首達時間（The First Passage Time under Continuous Time） 布朗運動 W_t 在給定一門檻水準 $m \in \mathcal{R}$ 的首次穿越時間或稱為首達時間可定義為 $\tau_m = \min\{t \geq 0, W_t = m\}$ ，且 $\tau_m = \infty$ 若 W_t 從未抵達 m ，則 τ_m 是一個停止時間。

一維度布朗運動的鏡射原理 (reflection principle) 是根據獨立增量的對稱性 (symmetry)，這是因為增量所服從的常態變數在空間上對稱於 0。從圖 7-1 (a) 的示意圖可瞭解在 t_0 時，布朗運動虛線的軌跡與鏡射於位置 W_{t_0} 的實線軌跡有者相同的發生機率。停止時間 τ_m 的一條軌跡示意圖見圖 7-1 (b)。



(a) 布朗運動的鏡射原理 (b) 布朗運動的首達時間

圖7-1 布朗運動的軌跡性質（示意圖）

由鏡射原理可得出對於 $\omega \leq m, m \geq 0$ ，布朗運動及其停止時間的聯合分佈可由布朗運動自己來刻畫：

$$P\{\tau_m \leq t, W_t \leq \omega\} = P\{W_t \geq 2m - \omega\}.$$

運用這個結果以及布朗運動的邊界是常態分佈，即可推導出下面停止時間的分佈的結果。

定理 7.4：對於 $m \neq 0$ ，首達時間 τ_m 的 CDF 是

$$P\{\tau_m \leq t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|m|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy, t \geq 0,$$

且其 PDF 是 $f_{\tau_m}(t) = \frac{d}{dt}P(\tau_m < t) = \frac{|m|}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-m^2/2t}$ ，當 $t \geq 0$ 。

在機率統計中，將此首達時間的分佈稱為逆高斯分佈（inverse Gaussian-IG distribution, Wald distribution），由於它比高斯分佈具有較厚的尾部（fatter tail）性質（也就是在極端發生的機率比高斯分佈所描述的大），因此常用來作為金融模型。利用 IG 分佈來作為布朗運動的時間改變（time change），成為一種混合（mixing）過程，稱作常態逆高斯分佈（normal-inverse Gaussian (NIG) distribution），這種分佈屬於廣義雙曲分佈（Generalized Hyperbolic Distribution），是一類具有跳躍性的 Levy

分佈。這些分佈常見於以 Levy 過程作為金融模型的教科書中，見 Tankov and Cont (2003) 或 Applebaum (2009)，其中一些利用傅立葉轉換評價選擇權的結果可見第三章第二節。

由上面結果又可推導出下面的定理。

定理 7.5： 對於 $m \in \mathcal{R}$ ，首達時間 τ_m 是有限的 almost surely，且拉普拉斯轉換 Laplace transform 是

$$E\{e^{-\alpha\tau_m}\} = e^{-|m|\sqrt{2\alpha}} \forall \alpha \geq 0。$$

將定理中的 α 微分可得 $E\{\tau_m e^{-\alpha\tau_m}\} = \frac{|m|}{\sqrt{2\alpha}} e^{-|m|\sqrt{2\alpha}}$ ，並將 α 靠近 0 則可得 $E\{\tau_m\} = \infty$ 祇要 $m \neq 0$ 。這個有趣的結果告訴我們，布朗運動仍存有相當多的軌跡集中在位置 0 的附近。

接下來，我們定義布朗運動從時間 0 到 t 的極大值

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s。$$

對於 $m > 0$ ，事件 $\{M_t \geq m\}$ 等同於事件 $\{\tau_m \leq t\}$ ，這個性質搭配上鏡射原理便得到

$$\begin{aligned} P(\tau_m \leq t, W_t \leq \omega) \\ &= P(M_t \geq m, W_t \leq \omega) \\ &= P((W_t \geq 2m - \omega))， \end{aligned}$$

並且容易的就得到下面關於布朗運動極大值 M_t 與邊界值 W_t 的聯合分佈。

定理 7.6：對於 $t \geq 0$ ， (M_t, W_t) 的聯合分佈是

$$f_{M_t, W_t}(m, w) = \begin{cases} \frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}, & w \leq m, m \geq 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

金融模型中的布朗運動絕大部份並非是「標準的」，具有漂移項的布朗運動 \widehat{W}_t 若定義為 $\widehat{W}_t = \alpha t + W_t$ $0 \leq t \leq T$ ，其極大值 $\widehat{M}_t = \max_{0 \leq t \leq T} \widehat{W}_t$ 的相關結果如下。注意到 $\widehat{M}_t \geq 0$ ， $\widehat{M}_t \geq \widehat{W}_t$ ，且 $(\widehat{M}_t, \widehat{W}_t)$ 取值於 $\{(m, w); w \leq m, m \geq 0\}$ 。

定理 7.7： $(\widehat{M}_t, \widehat{W}_t)$ 的聯合分佈是

$$\tilde{f}_{\widehat{M}_T, \widehat{W}_T}(m, w) = \begin{cases} \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{\alpha^2 T}{2} - \frac{(2m-w)^2}{2T}}, & w \leq m, m \geq 0 \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

將邊界的布朗運動積分即可得極大值 \widehat{M}_t 的分佈如下：

$$\bar{P}(\widehat{M}_T \leq m) = N\left(\frac{m-\alpha}{\sqrt{T}}\right) - e^{-2\alpha m} N\left(\frac{-m-\alpha}{\sqrt{T}}\right), m \geq 0$$

且其機率密度函數是

$$\tilde{f}_{\widehat{M}_T}(m) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(m-\alpha)^2}{2T}} - 2\alpha e^{2\alpha m} N\left(\frac{-m-\alpha}{\sqrt{T}}\right), & m \geq 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

衍生性商品中奇異選擇權 (exotic option) 常在 OTC (over the counter, 店頭市場) 中被交易，它們的訂價原理往往與布朗運動的路徑性質有關，譬如說，障礙選擇權與首達時間，回顧選擇權與極大 (小) 值，亞式選擇權與路徑平均值，甚或這些組合等等，我們會在第三及四章中分別再回到這個主題，並且提供如何以模擬的計算方法，將這些看來相當複雜的衍生品價格很容易的計算出來。

第八節 美式選擇權評價(American Option Price Evaluation: Optimal Stopping and Free Boundary)

美式選擇權與歐式選擇權唯一不同之處，在於選擇權持有人 (holder) 擁有提早履約 (early exercise) 的權利。由於賦予更多的權利，很自然的，美式選擇權的價格自然就要比同樣規格的歐式選擇權契約更加昂貴。一個特例是美式賣權在 Black-Scholes 模型下 (不支付股利)，可被證明出不值得提早履約，因此美式賣權與歐式賣權的價格在這些條件下是相等的。

8.1 最佳停止與自由邊界(Optimal Stopping and Free Boundary)

在風險中立的機率測度之下，美式選擇價格被定義為：

$$P_t = \sup_{t \leq \tau \leq T} E^*[e^{-r(\tau-t)} h(S_\tau) | \mathcal{F}_t],$$

τ 為停止時間以指示該契約可以被履約的時間。吾人可以理解此定義如下：美式選擇權的持有人會根據現有的市場資訊 (無內線消息)，來形成交易策略以決定停止時間，取每種可能的履約時間所對應的選擇權價值的最大值，交易員依此來定義美式選擇權的權利金，以應付精明的投資人所使用的最佳交易策略。

例如在 Black-Scholes 模型下的買權價格， P_t 可進一步化簡為

$$P_{am}(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E^*[e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau)^+ | S_t = x]. \quad (8-1)$$

該函數滿足下面具有自由邊界問題 (free boundary problem) 的聯立偏微分方程組

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS} P_{am}(t, x) = \frac{\partial P_{am}}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P_{am}}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P_{am}}{\partial x}(t, x) - rP_{am}(t, x) = 0, & \text{if } x \geq S_t^* \\ P_{am}(t, x) = K - x, & \text{otherwise} \end{cases}$$

並且在自由邊界上要滿足平滑粘貼 (smooth pasting) 的條件：

$$P_{am}(t, S_t^*) = (k - S_t^*)^+ \quad (\text{邊界上價格函數要連續})$$

$$\frac{\partial P_{am}}{\partial x}(t, S_t^*) = 1 \quad (\text{邊界上價格函數要一次可微})$$

後面的平滑粘貼條件是要限制 PDE 解的形式以避免投機條件 (speculative condition)。當中 S_t^* 即是所謂的自由邊界，用來區別在時間為 t 時是否要提早履約。當股價 x 大於自由邊界時，繼續持有美式賣權；反之則立刻履約取得 $K - x$ 的報酬。然而，自由邊界 S_t^* 必須從整個的偏微分方程組求得，而目前尚未有此問題的封閉解。關於這些 smooth pasting 條件的經濟意涵，可見 Dixit and Pindyck (1994)。

式 (8-1) 也可用下面的「線性互補條件 (linear complementarity condition)」來刻畫

$$\begin{cases} P_{am}(t, x) \geq (k - x)^+ \\ \mathcal{L}_{BS} P_{am}(t, x) \geq 0 \\ (P_{am}(t, x) - (k - x)^+) \cdot \mathcal{L}_{BS} P_{am}(t, x) = 0 \end{cases} \quad (8-2)$$

由此，也可區分停止區域 (stopping region) 與繼續區域 (continuation region) 如下。從時間與空間 (價格) 所形成的集合分別是

$$\text{停止區域: } S = \{0 \leq t \leq \tau, x \geq 0: P_{am}(t, x) = (k - x)^+\}$$

$$\text{繼續區域: } C = \{0 \leq t \leq \tau, x \geq 0: P_{am}(t, x) > (k - x)^+\}$$

由於提早履約的權利僅有一次，選擇權持有人必須要在契約期限內決定何為最佳履約時間 (optimal exercise time)，機率上這屬於一種最佳停止問題 (optimal stopping problem)，也就是上面 PDE 方程中所描述的自由邊界問題。自由邊界刻畫了一交易策略，也就是當股價第一次到這個邊界時，美式買權的持有人就應該履約，而成為最佳的停止時間。在第三及第四章中，我們會分別提到如何以數值偏微分方法與蒙地卡羅模擬法，對美式選擇權的價格函數進行計算。

接下來，對恆存美式選擇權 (perpetual American option) 與美式選擇權的一些

基本性質做探討。一個恆存的美式賣權價格的定義類似於一般美式賣權，只不過停止時間並沒有上界，

$$P_{am}(x) = \sup_{0 \leq \tau} E^* \{ e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+ | S_0 = x \}. \quad (8-3)$$

可以證明 $P_{am}(x)$ 存在下面的封閉解。

$$\text{定理 8.1: } P_{am}(x) = \begin{cases} K - x, & 0 \leq x \leq S^* \\ (K - S^*) (x/S^*)^{-2r/\sigma^2}, & x \geq S^* \end{cases} \text{ 且 } S^* = \frac{2r}{2k + \sigma^2} K.$$

證明：先刻畫定義中 $P_{am}(x)$ 所滿足的方程式，後透過解此方程式得到封閉解。

(1) 方程式刻畫：根據美式選擇權的價格是立刻履約價值與繼續價值的最大值，可得

$$P_{am}(x) = \max \{ (K - S_0)^+, E^* [e^{-rdt} P_{am}(S_{dt}) | S_0 = x] \}.$$

利用 Ito's 公式，

$$\begin{aligned} P_{am}(S_{dt}) &= P_{am}(S_{dt}) - P_{am}(S_0) + P_{am}(S_0) \\ &= dP_{am}(S_t)|_{t=0} + P_{am}(S_0) \\ &= \left(\frac{dP_{am}}{dx}(S_t) r S_t + \frac{d^2 P_{am}}{dx^2}(S_t) \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \right) |_{t=0} dt + \frac{dP_{am}}{dx}(S_t) \sigma S_t |_{t=0} dW_t \\ &\quad + P_{am}(S_0) \end{aligned}$$

且 $e^{-rdt} = 1 - rdt + O(dt^2)$ 。因此取條件期望後，

$$\begin{aligned} E^* [e^{-rdt} P_{am}(S_{dt}) | S_0 = x] &= E^* \left\{ P_{am}(S_0) + \left[-r P_{am}(S_0) + r S_0 \frac{dP_{am}}{dx}(S_0) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{d^2 P_{am}}{dx^2}(S_0) \right] dt \right. \\ &\quad \left. + \text{martingale term} + O(dt^2) | S_0 = x \right\} \end{aligned}$$

$$=P_{am}(x) + \left[-rP_{am}(x) + rx \frac{dP_{am}}{dx}(x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{d^2 P_{am}}{dx^2}(x) \right] dt,$$

使得 $P_{am}(x) = \max\{(K-x)^+, P_{am}(x) + \mathcal{L}P_{am}(x)dt\}$ 其中的微分算子

$$\mathcal{L}(\cdot) = \left[\frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + rx \frac{d}{dx} - r \right](\cdot).$$

這意味著價格函數會滿足

$$P_{am}(x) \geq (K-x)^+$$

或者

$$\mathcal{L}P_{am}(x) \leq 0 \quad (P_{am}(x) \geq P_{am}(x) + \mathcal{L}P_{am}(x)dt)$$

而且在兩者間，其中一個等式必須成立

$$(P_{am}(x) - (K-x)^+) \mathcal{L}P_{am}(x) = 0.$$

因此，我們得到下面線性互補條件對恆存美式選擇權價格 $P_{am}(x)$ 的方程式刻畫：

$$\begin{cases} P_{am}(x) \geq (K-x)^+ \\ -\mathcal{L}P_{am}(x) \geq 0 \\ (P_{am}(x) - (K-x)^+) \cdot \mathcal{L}P_{am}(x) = 0. \end{cases} \quad (8-4)$$

(2) 假設自由邊界 S^* 存在，將上式寫為自由邊界問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}P_{am}(x) = 0, & x > S^* \\ P_{am}(x) = (K-S^*), & x \leq S^* \end{cases} \quad (8-5)$$

並滿足 $P_{am}(S^*) = (K-S^*)^+$ 且 $P'_{am}(S^*) = -1$ (平滑貼粘條件)。

方程組 (8-5) 的解法是先假設解的形式為 $P_{am}(x) = Lx^p + \beta X^q$ ，將投機條件 (speculation condition; $x \uparrow \infty, P_{am}(x) \uparrow \infty$) 移除後可得 $P_{am}(x) = \alpha x^{-2r/\sigma^2}$ 。現在整個問題剩下兩個未知數 α 和 S^* ，可從平滑、貼粘的兩個條件順利解出，並且可以檢查式 (8-5) 的解確實會滿足式 (8-4)。

備註：恆存美式選擇權的解，對應了提早履約的交易策略：當股價 x 小於或等於 S^* 時，由於美式選擇權的價值恰等於立即履約的價值，應立即履約。

作業 8.1 由於恆存的美式賣權的價格存在封閉解，我們可以看看這個解的基本性質

(1) 檢查價格函數滿足平滑粘貼的條件

$$P'_{am}(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < S^* \\ -(K - S^*) \frac{2r}{\sigma^2 x} \left(\frac{x}{S^*}\right)^{-2r/\sigma^2}, & x \geq S^* \end{cases}$$

$$P'_{am}(S^*) = -1$$

(2) 價格函數在自由邊界上的二次微分不連續 $P''_{am}(S^*) \neq 0$ 。

與歐式選擇權比較起來，美式選擇權可以提早履約的功能吸引投資人的喜好。不過從上面關於價格函數的討論可以發現，美式選擇權顯得複雜許多，買方必須能夠計算自由邊界以決定提早履約的時間，雖然也可以透過檢查美式選擇權的價格是否與立即履約的價值相同。賣方也必須要計算自由邊界，以決定適當的避險策略。下面我們討論美式選擇權與歐式選擇權避險的不同之處，並且引導出著名的 Doob-Meyer Decomposition。

定理 8.2： 在風險中立機率測度 \mathcal{P}^* 下， $e^{-rt}P_{am}(S_t)$ 是一個 supermartingale，並且最佳停止的過程 $e^{-r(t \wedge \tau^*)}P_{am}(S_{t \wedge \tau^*})$ 是一個 martingale。

證明：

(1) 計算 $e^{-rt}P_{am}(S_t)$ 的微分

$$\begin{aligned} de^{-rt}P_{am}(S_t) &= e^{-rt} \mathcal{L}P_{am}(S_t)dt + e^{-rt}P'_{am}(S_t)\sigma S_t dW_t^* \\ &= -e^{-rt}rKI(S_t < S^*)dt + e^{-rt}P'_{am}(S_t)\sigma S_t dW_t^* \end{aligned} \quad (8-6)$$

上面第二個等號成立是代入了式 (8-5)，因此 $e^{-rt}P_{am}(S_t)$ 是一個 supermartingale。

備註：注意到這個supermartingale是一個遞減的漂移項與一個martingale項組成。

另外注意到，由於 τ^* 是標的資產的最佳停止時間，對 $e^{-rt}P_{am}(S_t)$ 從時間0到 τ^* 積分便得

$$e^{-r(t \wedge \tau^*)}P_{am}(S_{t \wedge \tau^*}) = P_{am}(S_0) + \int_0^{t \wedge \tau^*} e^{-ru} \sigma S_u P_{am}'(S_u) dW_u^*.$$

這證明了最佳停止過程 $e^{-r(t \wedge \tau^*)}P_{am}(S_{t \wedge \tau^*})$ 是一個martingale。

備註：Ito積分過程是一個martingale，並且停止的Ito積分過程也是一個martingale。

事實上，由定理 8.2 可證明出若 $t \rightarrow \infty$ ，由附錄一的定理 4.6 DCT 可得恆存美式選擇權在風險中立機率測度下訂價的定義：

$$\begin{aligned} P_{am}(x) &= E^*[e^{-r\tau^*}P_{am}(S_{\tau^*})|\mathcal{F}_0] \\ &= E^*[e^{-r\tau^*}H(S_{\tau^*})|\mathcal{F}_0] \\ &= \sup_{0 \leq \tau \leq \infty} E^*[e^{-r\tau}H(S_{\tau})|\mathcal{F}_0] \end{aligned}$$

另外，從下面關於風險管理的推導，也可看出美式選擇權的訂價與避險是一致的。

8.2 美式賣權的避險策略(Hedging Strategy of American Put Options)

站在恆存美式選擇賣方的立場，一開始的收費 $P_{am}(S_0)$ 成為整個避險行動的起始資本額 (initial capital)。避險策略是除了 $\Delta_t = P_{am}'(S_t)$ ，並且有額外的消費率 (consumption rate) $C_t = rK I(S_t < S^*)$ 可支出，如此可在任何時刻複製出一美式賣權。此避險策略可從式 (8-6) 略見一斑。

當讀者對恆存美式選擇權有深入的認識時，一般的美式選擇權的理論結果也是類似的，我們節錄如下。

美式賣權的價格函數 $P_{am}(t, x)$ 定義為

$$P_{am}(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E^* [e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau)^+ | S_t = x],$$

其中 τ 是定義在時間 t 與 T 中的 stopping time。此函數 $P_{am}(t, x)$ 會等義的滿足：

(1) 線性互補條件

$$\begin{cases} P_{am}(t, x) \geq (K - x)^+ \\ \mathcal{L}_{BS} P_{am}(t, x) \geq 0 \\ (P_{am}(t, x) - (K - x)^+) \cdot \mathcal{L}_{BS} P_{am}(t, x) = 0 \end{cases}$$

與

(2) 偏微分方程

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS} P_{am}(t, x) = 0, x > S^*(t) \\ P_{am}(t, x) = (K - x)^+, x \leq S^*(t) \\ P_{am}(t, S^*(t)^-) = P_{am}(t, S^*(t)^+) \text{ 粘接 (pasting)} \\ \frac{\partial P_{am}}{\partial x}(t, S^*(t)^-) = P_{am}(t, S^*(t)^+) = -1, \text{ 平滑 (smooth)} \end{cases}$$

圖 8-1 示意出最佳停止時間 τ^* 是當股價 S 第一次達到自由邊界（曲線位置）的時間。

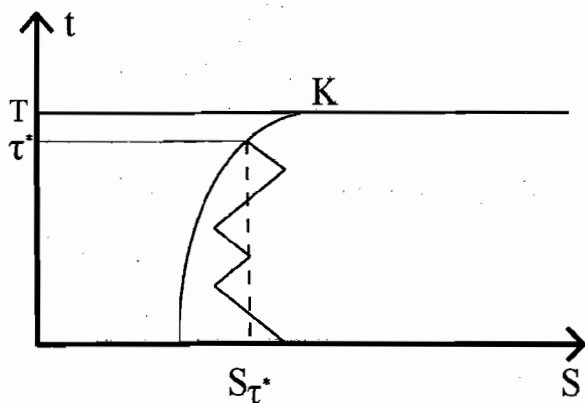


圖8-1 美式選擇權的自由邊界（示意圖）

另也可對 $e^{-rt}P_{am}(t, S_t)$ 微分得到

$$\begin{aligned}
& de^{-ru}P_{am}(u, S_u) \\
&= e^{-ru}\mathcal{L}_{BS}P_{am}(u, S_u)du + e^{-ru}\frac{\partial P_{am}(u, S_u)}{\partial x}\sigma S_u dW_u^* \\
&= -e^{-ru}rKI(S_u < S^*(u)) + e^{-ru}\frac{\partial P_{am}(u, S_u)}{\partial x}\sigma S_u dW_u^*。
\end{aligned}$$

這意味著 $e^{-rt}P_{am}(t, S_t)$ 是一個 supermartingale

$$\begin{aligned}
& e^{-rt}P_{am}(t, S_t) \\
&= P_{am}(0, S_0) + \int_0^t e^{-ru}\frac{\partial P_{am}(u, S_u)}{\partial x}\sigma S_u dW_u^* - \int_0^t e^{-ru}rKI(S_u < S^*(u))du
\end{aligned}$$

由此也可看出類似的避險策略。

Doob-Meyer Decomposition 確認了可將一個 supermartingale, SM_t 分解成為一個 martingale 項 M_t 與一個非遞減 (nondecreasing) 的項 A_t 如下:

$$SM_t = M_t - A_t。$$

最後我們證明一個有趣的結果：在某些條件下，美式買權並不值得提早履約。

定理 8.3： 在風險中立機率測度並且股票若沒有發放股利的情形下，美式買權的價格會等於歐式買權的價格。

證明：

分兩步驟證明。

(1) 先證若凸函數 $h(x) \geq 0$ 且 $h(0) = 0$ ，則美式選擇權折現後的內在價格 (discounted intrinsic value) $e^{-rt}h(S_t)$ 是一個 submartingale。這可先由

(I) 若 $x \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$h(\lambda x) = h((1-\lambda)0 + \lambda x) \leq (1-\lambda)h(0) + \lambda h(x) = \lambda h(x) \quad (\text{由凸性})$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad & E^*[e^{-r(u-t)}h(S_u)|\mathcal{F}_t] \\
 & \geq E^*[h(e^{-r(u-t)}S_u)|\mathcal{F}_t] \\
 & \geq h(E^*[e^{-r(u-t)}S_u|\mathcal{F}_t]) = h(S_t)
 \end{aligned}$$

(由 $e^{-rt}S_t$ 在風險中立機率測度下的 martingale 性質)。所以

$$E^*[e^{-ru}h(S_u)|\mathcal{F}_t] \geq e^{-rt}h(S_t) \quad (8-7)$$

$e^{-rt}h(S_t)$ 是一個 submartingale。

(2) 由於式 (8-7) 中時間 $t \leq u \leq T$ ，可得 $E^*[e^{-r(T-t)}h(S_T)|\mathcal{F}_t] \geq h(S_t)$

這告訴我們，此美式買權的繼續價值必不小於現在履約的價值，因此值得等待直到到期日 T ，所以美式買權的價格會等於歐式買權的價格。 ■

從數值計算的角度而言，在過去十多年中關於美式選擇權價格的估計有了長足的進步，尤其以蒙地卡羅模擬法中的最小平方方法最富盛名，我們會在第四章中詳加介紹，其中也會探討美式選擇權的其它重要性質，另第三章中介紹有限差分的數值 PDE 解法。

Chapter 2

利率與信用衍生性金融商品

本章學習重點

- 第一節 利率模型
- 第二節 信用風險模型
- 第三節 關聯方法：多資產的聯合分佈
- 第四節 尾端（聯合違約）機率之估計
- 第五節 信用衍生品市場：CDS 與 CDO

The purpose of models is not to fit the data but to sharpen the questions.

~ S. Karlin (1983)

第一節 利率模型(Interest Rate Model)

零息債券是債券市場中的基本元素。以 $B(0, T)$ 記為債券價格，該契約的到期日為 T ，面額 1 元，且在到期前不支付任何利息。固定在日期 T_1, T_2, \dots, T_j 支付固定利息 C_1, C_2, \dots, C_j ，其中最後一期支付利息併本金 C_j ，的債券價格 $CB(0, T_j)$ 可有如下的分解

$$CB(0, T_j) = \sum_{k=1}^j C_k B(0, T_k)。$$

也就是說，一個支付利息的債券可以由許多零息債券組合出來，一般常用拔靴法 (bootstrapping method) 加以計算，見 Hull (2010)。

殖利率 (yield) 是債券市場中慣用來描述零息債券的價格，它的定義是

$$yield(T) = -\frac{\ln B(0, T)}{T}，$$

相當於該零息債券所對應的固定利率，使得 $B(0, T) = \exp(-yield(T) \times T)$ 。由不同到期日 T 所對應的殖利率所形成的一個期限結構 (term structure)，稱之為殖利率曲線 (yield curve)。

範例 1.1 美國公債殖利率曲線

從美國財政部官網 (<http://www.treasury.gov/Pages/default.aspx>) 可下載美國公債殖利率曲線。比較 2008 年 9 月 15 日與 2011 年 11 月 18 日的殖利率曲線，可以發現看出殖利率的變動情形可能是很大的。

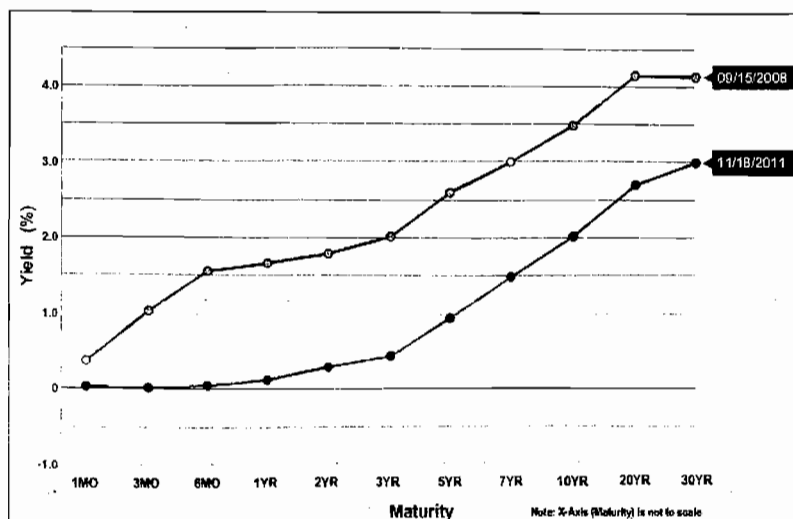


圖 1-1 美國公債殖利率曲線

1.1 短期利率模型

為了捕捉殖利率的變動，傳統上文獻引入了「短期利率 (short rate)」用來描述債券的價格，其做法如下：

$$B(t, T) = E^* \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) | \mathcal{F}_t \right].$$

不難看出，這是將前述的 $yield(T)$ 推廣成一隨機模型。例如在風險中立的機率測度之下，假設短期利率 r_t 的動態行為，服從如下均數迴歸的隨機微分方程，則債券價格具有封閉解。

Vasicek (或 Ornstein-Uhlenbeck) 模型：

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta dW_t^* \quad (1-1)$$

CIR (或 square-root) 模型

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta \sqrt{r_t} dW_t^*.$$

由於馬可夫性質， $B(t, T)$ 可以記作時間與當下短期利率的函數， $P(t, r_t)$ 。給定

上述的隨機模型，債券價格函數則具有仿射 (affine) 的結構，稱為仿射函數 (affine function) $P(t, r) = A(T-t) \exp(-C(T-t)r)$ ，其中函數 A 與 C 滿足一聯立常微分方程組。

定義折現因子 (discount factor) $D_t = \exp(-\int_0^t r_u du)$ 我們可以利用 $D_t B(t, T)$ 的平賭性質推導出零息債券的評價 PDE，且期末邊界條件為 1， $f(T, r) = 1$ 。例如在 Vasicek 模型下，PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(t, r) + \alpha(m-r) \frac{\partial P}{\partial r}(t, r) - rP(t, r) = 0. \quad (1-2)$$

在 CIR 模型下，PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2}\beta^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(t, r) + \alpha(m-r) \frac{\partial P}{\partial r}(t, r) - rP(t, r) = 0.$$

利用距離至到期日的時間 $\tau = T - t$ 做變數變換，則零息債券價格函數可表示為 $P(T-\tau, r) = A(\tau) \exp(-C(\tau)r)$ ，其中 $A(0) = 1$ 且 $C(0) = 0$ ，代入方程式 (1-2) 中可得以下聯立常微分方程組

$$\begin{cases} -C' = \alpha C - 1 \\ A'/A = \frac{1}{2}\beta^2 C^2 - \alpha m C \end{cases}$$

依序解出

$$C(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}$$

$$A(\tau) = \exp\left\{-\left[R\tau - R\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^3}(1 - e^{-\alpha\tau})^2\right]\right\}$$

其中 $R = m - \beta^2/(2\alpha^2)$ 。因此，在 Vasicek 模型下，零息債券的價格為

$$P(t, r) = \exp\left\{-\left[R(T-t) - (R-r_t)\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^3}(1 - e^{-\alpha\tau})^2\right]\right\}. \quad (1-3)$$

有別於 PDE 的解法，我們可以藉著方程式 (1-1) 的解

$$r_t = r_0 e^{-\alpha t} + m(1 - e^{-\alpha t}) + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s^*,$$

以及債券價格的定義來推導出封閉解。注意到 r_t 是一高斯過程，其積分的均值(\hat{m})與變異數($\hat{\sigma}^2$)分別為

$$\hat{m} := E^* \left[\int_t^T r_s ds | r_t \right] = m(T-t) + (m - r_t) \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

$$\hat{\sigma}^2 := Var^* \left[\int_t^T r_s ds | r_t \right] = \beta^2 \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \right)^2 ds.$$

接著利用 $\int_t^T r_s ds$ 的動差函數可解出

$$P(t, r) = E^* \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | r_t \right] = e^{-\hat{m} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2}.$$

這個由機率方法推導的結果與由方程推導的結果(1-3)一致。

當短期利率假設 CIR 模型時，機率上的推導會比較複雜，牽涉的 noncentral chi square 分布，在此先不做討論。不過由於 PDE 的解仍具有 affine 的結構，也就是 $P(T - \tau, r) = A(\tau)e^{-C(\tau)r}$ ，因此求解的過程仍與 Vasicek 模型下類似。我們僅列出結果如下：

$$A(\tau) = \left(\frac{2\theta e^{(\theta+\alpha)\tau/2}}{(\theta + \alpha)(e^{\theta\tau} - 1) + 2\theta} \right)^{2\alpha m / \beta^2}$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\theta\tau} - 1)}{(\theta + \alpha)(e^{\theta\tau} - 1) + 2\theta}$$

$$\theta = \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}.$$

債券選擇權評價 (Bond Option Pricing)

前一節裏的債券評價用選擇權的方式(風險中立評價)進行推導，因此債券選擇權就可視為一複合選擇權(compound option)，就是一個選擇權定義在另一個選擇權上(option on option)。這一類問題會在第三章中的複合選擇權做更詳細的討論，

在此我們先針對債券的歐式選擇權評價。

考慮一選擇權報酬函數 $h(x)$ ，由於債券選擇權的標的物是債券，報酬為 $h(P(T_0, r_{T_0}; T_1))$ ，其中 T_0 為選擇權的到期日， $T_1 (> T_0)$ 是債券的到期日。以買權來說則是 $(P(T_0, r_{T_0}; T_1) - K)^+$ ，其中 K 是選擇權的履約價。根據選擇權定價理論，一個債券選擇權的價格為

$$Q(t, x) := E^* \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} h(P(T_0, r_{T_0}; T_1)) | r_t = x \right]。$$

利用 Feymann-Kac 公式可知，函數 $Q(t, x)$ 會滿足以下方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \alpha(m - x) \frac{\partial Q}{\partial x} - xQ = 0，$$

而期末條件為

$$Q(T_0, x) = h(P(T_0, r_{T_0}; T_1)) = h \left(e^{-(R(T_1 - T_0) - (R - x)C(T - T_0) + \frac{\beta^2}{4\alpha} C(T - T_0)^2)} \right)$$

其中 $C(T - T_0) = (1 - e^{-\alpha(T - T_0)})/\alpha$ 且 $R = m - \beta^2/(2\alpha^2)$ 。

在歐式買權下， $Q(t, x)$ 存在類似 Black-Scholes 公式的封閉解如下

$$Q(t, x) = P(t, T)N(h_1) - P(t, T)KN(h_2)$$

其中 $h_{1,2} = \frac{\log \frac{P(t, T)}{P(t, T_0)} - \log K \pm \frac{1}{2} v^2}{v}$ ，且 $v = \frac{\beta^2}{2\alpha^3} (1 - e^{-2\alpha(T_0 - t)})(1 - e^{-\alpha(T - t)})^2$ 。

1.2 Forward/LIBORRate 利率模型

另一類刻劃債券價格的方式是利用遠期利率 (forward rate)，本文僅討論 Heath-Jarrow-Morton 模型與 LIBOR 模型。

(一) Heath-Jarrow-Morton 模型

令 $B(t, T)$ 為在時間 t 到期日為 T 的零息債券。現考慮一個遠期投資計畫 (forward investing plan) 如下：在時間 t ，賣出一個在未來 T 到期的零息債券 (因此有了 $B(t, T)$)

的收入)；同時買入 $\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$ 單位 $(T+\delta)$ -到期的零息債券 ($\delta > 0$ ，因此支出了 $B(t,T)$)。此投資組合在時間 t 的淨值為 0，在 T 時為了賣出部位 (short position) 必須支付 1 元，而在 $T+\delta$ 時由於持有買入部位 (long position) 會收到 $\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$ 元。總的來說，在時間 T 投資了 1 元，在 $T+\delta$ 時得到了 $\frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$ 元，因此殖利率是 $\frac{1}{\delta} \log \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}$ 。也就是說，投資人可以在較早的時間 t 「鎖定 (lock in)」未來從 T 到 $T+\delta$ 這段「遠期」時間的利率。

定義 1.1： 在時間 t 投資未來 T 的遠期利率 (forward rate) 為

$$\begin{aligned} f(t,T) &= -\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log B(t,T+\delta) - \log B(t,T)}{\delta} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} \log B(t,T) \end{aligned}$$

備註：一個遠期利率 $f(t,T)$ 即是在時間 T 的瞬間利率，但可以在稍早的時間 t 加以鎖定。

從定義中，對遠期利率 $f(t,T)$ 中的 T 積分便得

$$\int_t^T f(t,v) dv = -[\log B(t,T) - \log B(t,t)] = -\log B(t,T)$$

其中 $B(t,t)=1$ 。也就是

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,v) dv\right), 0 \leq t \leq T. \quad (1-4)$$

零息債券價格與遠期利率函數是息息相關的。當 $T=t$ 時，利率 $R(t)=f(t,t)$ 的意義為在 t 時借入的瞬間利率。

接下來，討論遠期利率與債券價格的動態行為。假設遠期利率的模型，在歷史機率測度下服從

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t, 0 \leq t \leq T$$

則債券價格的動態行為會滿足

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= d \exp\left(-\int_t^T f(t, v) dv\right) \\ &= B(t, T) \left[R(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 \right] dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)dW_t \end{aligned}$$

其中 $\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, v)dv$ 且 $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v)dv$ 。注意到，推導中會用到 $d \int_t^T f(t, v) dv = f(t, t)dt - \int_t^T df(t, v) dv$ 。

無套利條件 (No Arbitrage Condition)

風險中立評價法要求折現後的債券價格

$$D(t)B(t, T) = \exp\left\{-\int_0^t r_u du\right\} B(t, T), t < T$$

在風險中立機率測度下，必須是一個平賭過程。因此，先計算

$$\begin{aligned} dD(t)B(t, T) &= D(t)B(t, T) \left[\left(-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 \right) dt - \sigma^*(t, T)dW_t \right] \\ &= D(t)B(t, T) \times -\sigma^*(t, T)[\Theta_t dt + dW_t] \end{aligned} \quad (1-5)$$

Θ_t 稱作市場風險價格 (market price of risk)。可觀察到對每一個到期日 T ， Θ_t 解了下面的方程式

$$-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 = -\sigma^*(t, T)\Theta_t。$$

對上式變數 T 微分後可得

$$-\alpha(t, T) + \sigma^*(t, T)\sigma(t, T) = -\sigma(t, T)\Theta_t，$$

使得

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)[\sigma^*(t, T) + \Theta_t]。 \quad (1-6)$$

從式(1-5)的計算中知道，平賭的條件在於，具漂移項的布朗運動增量 $\Theta_t dt + dW_t$ 必須做測度轉換以成為一個(標準)布朗運動增量 $d\tilde{W}_t$ 。只要波動率 $\sigma(t, T)$ 非零， $\Theta_t, 0 \leq t \leq T$ 會存在，且風險中立的機率測度 \tilde{P} 具唯一性。

式(1-6)中 Θ_t 的可解性稱為 HJM 無套利條件(HJM no arbitrage condition)。在此條件下，遠期利率在 \tilde{P} 測度中會滿足

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t \\ &= \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)[\Theta_t dt + dW_t] \\ &= \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t, \end{aligned}$$

其中在該測度下 \tilde{W}_t 是布朗運動。注意此時遠期利率的漂移項的係數 $\sigma(t, T)\sigma^*(t, T)$ 完全由波動率決定，這個結果似乎頗出人意外，與先前第一章在 Black-Scholes 模型下所討論的結果不同。至於折現後債券價格的動態行為則自然是一平賭

$$dD(t)B(t, T) = -\sigma^*(t, T)D(t)B(t, T)d\tilde{W}_t$$

且

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)d\tilde{W}_t。$$

以上結果可歸納成為下面定理。

定理 1.1： 滿足 HJM 無套利條件(見式(1-6))，遠期利率在風險中立的機率測度 \tilde{P} 之下，它會滿足

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t，$$

而且零息債券價格會滿足

$$dB(t, T) = R(t)B(t, T)dt - \sigma^*(t, T)B(t, T)d\tilde{W}_t。$$

在該機率測度下， \tilde{W}_t 是布朗運動，並且債券價格的解為

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{D_t} \exp \left\{ - \int_0^t \sigma(u, T) d\tilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma^*(u, T))^2 du \right\}。$$

HJM 模型具有一般性，一因子的 Vasicek, Hull-White, CIR 等模型皆是 HJM 的特例。然而，HJM 模型校準的問題甚為複雜使得它的實用性就降低了。另一類稱之為市場模型 (market model) 的崛起，例如下面介紹的 LIBOR 市場模型 (LIBOR Market Model, LMM) 與 GBM (Brace, Gatarek, Musiela) 模型，則逐漸的廣為接受。

(二) LIBOR 市場模型

LIBOR 是倫敦同業拆款利率 (London interbank offered rate, LIBOR) 的縮寫。

定義 1.2：遠期 LIBOR 率 (forward LIBOR rate) $L(t, T)$ 的定義是

$$L(t, T) = \frac{B(t, T) - B(t, T + \delta)}{\delta B(t, T + \delta)}$$

金融上的解釋是「1+投資存續期間 (duration of investment) 乘上遠期 LIBOR 利率會等於報酬」

$$1 + \delta L(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}$$

(1 + duration of investment × interest rate = repayment.)

它可以理解為在 t 時，一個成本為零的投資組合由以下資產構成：

- (1) 賣出一個 T 到期的零息債券，
- (2) 買入 $\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}$ 單位之 $(T + \delta)$ 到期的零息債券。

這個投資組合在期初 t 時無成本，在未來 T 時投資 1 元，且在 $T + \delta$ 時會獲得 $\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}$ 元。以單利來看，遠期 LIBOR 率 $L(t, T)$ 解釋了投資在未來期間 $[T, T + \delta]$ 中 1 元的獲利狀況。相對的，前一節定義的遠期利率可視為同樣投資行為的連續複利。

由於債券選擇權的訂價理論較為繁複，須不斷使用測度轉換故在此省略，以下僅節錄一重要定理，對債券市場以及實務應用有興趣的讀者請見 Brigo and Mercurio (2006)。

定理 1.2：（Black Caplet Formula）考慮一個上限合約在時間 $T + \delta$ 的報酬為 $(L(T, T) - K)^+$ 其中 K 是非負的履約價， $\delta > 0$ 為票期（tenor）。假設遠期 LIBOR 率 $L(t, T)$ 在風險中立機率測度 \tilde{P} 下服從了

$$dL(t, T) = \gamma(t, T)L(t, T)d\tilde{W}_t^{T+\delta}, 0 \leq t \leq T$$

$\gamma(t, T)$ 假設為不具隨機性的函數。則在時間 0 的一個利率上限合約的價格是

$$B(0, T + \delta)[L(0, T)N(d_+) - KN(d_-)]$$

其中

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^T \gamma^2(t, T)dt}} \left[\log \frac{L(0, T)}{K} \pm \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(t, T)dt \right]。$$

第二節 信用風險模型(Credit Risk Model)

信用事件的定義，以及該事件發生的時間，對信用風險模型的建構來說一直是非常重要的議題。常見的機率模型概分為兩大類：結構式模型（structural-form model），與縮減式模型（reduced-form model），它們都屬於由下而上（bottom up）的模式。另一類的模式是由下而上（top-down），可參閱 Brigo and Mercurio（2006），Hull（2011）及相關文獻。

2.1 結構式模型

由於結構式模型符合資本結構的觀念，文獻中此類模型的使用很早就出現了。例如 Black and Scholes（1973）與 Merton（1974）皆以在債務到期日 T 時，若公司

資產價值 S_T 低於債務 K ，則視為違約；也就是違約事件由集合 $\{\omega: S_T(\omega) < K\}$ 來定義。顯然，公司或資產的違約事件不應該僅由某邊界日期的價格行為來定義，Black and Cox (1976) 提出了以首達時間 (first passage time) 作為違約時間 τ 的定義；也就是說 $\tau = \inf\{t \geq 0: S_t = K\}$ 。因此，資產 S 在時間 T 前違約的事件可定義為 $\{\tau \leq T\} = \{\inf_{0 \leq t \leq T} S_t \leq K\}$ 。接著，利用布朗運動在一段時間中最小值的機率密度函數，不難導出在 Black-Scholes 模型下之首次穿越時間之機率的封閉解。

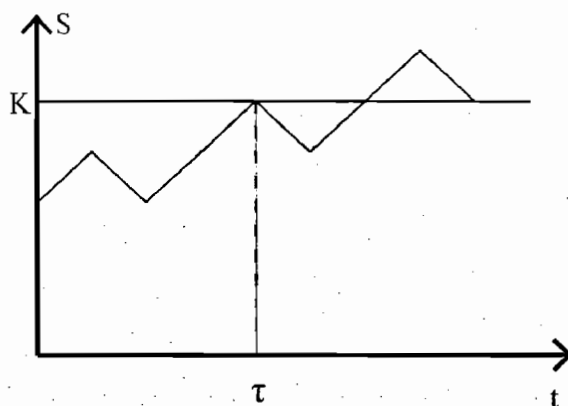


圖2-1 幾何布朗運動的首達時間 (示意圖)

範例 2.1 違約距離 (Distance to Default)

在 Black-Scholes 模型下，若一家公司在某 T 時間的負債為 D ，且總資產服從

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0,1)$$

則該公司在 T 時的違約機率 (probability of default) 是

$$\begin{aligned} DP &= P(S_T < D) \\ &= P\left(Z < \frac{\ln\left(\frac{D}{S_0}\right) - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

一般將違約距離 (distance to default) 定義為 $\ln(D/S_0)/\sigma$ ，以利在給定資產負債表時，可以衡量債務到期時間下的違約機率。

作業 2.1 在 Black-Cox 模型下計算違約機率。

對於暴露在高維度的資產池下的信用風險，結構式模型的使用就益顯困難。主因在於，在高維度下，例如 n 個資產，違約時間 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 的聯合分配並不容易刻劃。文獻上僅有 Zhou (2001a, 2001b) 中有關於 2 個違約時間的聯合機率密度函數，或見 Bielecki and Rutkowski (2002) 之詳述。相對於結構式模型在高維度情形下的缺失，縮減式模型就顯得容易使用許多，也成為重要的信用風險模型，其基本概念是將存活函數用來衡量一個可違約個體（或資產）存活超過時間 T 的機率。

2.2 縮減式模型

定義 2.1：存活函數 (Survival Function)

若 $\tau \geq 0$ 是一個個體的違約時間 (default time)，它的機率分配函數為 $F_\tau(t)$ ，則 $S_\tau(t) = P(\tau > t) = 1 - F_\tau(t)$ 稱為違約時間 τ 的存活函數。

若一間公司已經營運了一段時間 t ，那麼這家公司接下來會立刻倒閉的機率（瞬間倒閉的機率）會是多少呢？一個很有用的工具，通常出現在存活分析以及可靠度理論中，是透過危險率函數 (hazard rate function) 的建置，其定義如下：

定義 2.2：危險率函數 (Hazard Rate Function)

假設違約時間 τ 的機率密度函數是 $f_\tau(t)$ ，其存活函數為 $S_\tau(t)$ ，則該違約時間危險率函數的定義為：

$$h_\tau(t) = \frac{f_\tau(t)}{S_\tau(t)}。$$

給定一家公司已經存活了 t 年，那麼它在下一段時間 Δt 會違約的機率為何呢？這個機率可以被推導如下：

$$P(\tau \in [t, t + \Delta t] | \tau > t) = \frac{P(\tau \in [t, t + \Delta t])}{P(\tau > t)} \approx \frac{f_\tau(t)\Delta t}{1 - F_\tau(t)} = h_\tau(t)\Delta t \quad (2-1)$$

我們可以看出這個條件違約機率 (conditional default probability)，可以由危險函數 $h_\tau(t)$ 與違約時間區間 Δt 的乘積來逼近。由以上結果，我們很容易可以得到以下的積分結果：

$$\int_0^t h_\tau(s) ds = \ln(1 - F_\tau(s)) \Big|_t^0。$$

因此，一個違約時間的分配函數，可以由危險率決定：

$$F_\tau(t) = P(\tau \leq t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t h_\tau(s) ds \right\}。 \quad (2-2)$$

方程式 (2-2) 揭示了違約時間分配函數的模型，事實上等同於危險率函數的模型建置。我們可以將上述的關係，推廣到隨機違約強度模型。考慮一個非負的隨機過程來模擬違約強度，例如使用平方根過程（或稱作 CIR 過程）如下：

$$dh_t = \alpha(m - h_t)dt + \beta\sqrt{h_t}dW_t (h_t \geq 0, t \in [0, T])，$$

則可以定義一個存活機率，如下所述：

$$P(\tau > T) = E \left\{ e^{-\int_0^T h_s ds} \middle| \mathcal{F}_0 \right\}。 \quad (2-3)$$

此作法非常類似於利率模型中的零息債券問題。方程式 (2-3) 存在一個封閉解，此解稱作一個仿射函數 (affine function)，見本章 1.1 節的利率模型。

第三節 關聯方法：多資產的聯合分佈(Copula Method: Joint Distribution of Multi Assets)

我們已經刻畫了單一資產的違約時間，現在開始討論如何利用關聯函數來建構多資產的違約機率分佈函數。使用關聯函數來建構多變量隨機變數常見於保險領域，Li (2000) 將關聯函數引入金融中的信用風險模型，以下介紹關聯函數。

定義 3.1： 關聯函數 (Copula Function) 一個 N 維度的關聯函數 C 是一個定義於 I^N ，值域為 I 的實值函數，其中 $I = [0,1]$ 。它滿足：

1. $C(\mathbf{u})$ 對每一個分量 $u_k, k = 1, \dots, n$ ，是一個遞增函數，此性質稱作 n -increasing。
2. 對任何一個 $\mathbf{u} \in I^N$ ，若任何一個 $u_k = 0$ ，則 $C(\mathbf{u}) = 0$ ；若除了 k 以外的 $u_i = 1, i \neq k$ ，則 $C(\mathbf{u}) = u_k$ 。
3. 對任意 $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ，則一個 n -box 定義為 $\mathbf{B} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ 會滿足 $V_n(\mathbf{B}) \geq 0$ ，其中 V_n 為 n -volume。

關聯函數 C 能夠被直覺的理解為一個多變量分配函數，而且它的邊際分佈皆為均勻分布函數。

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 < u_1, \dots, U_n < u_n)$$

令 F 為一個 n 維度的分佈函數，且 F_1, \dots, F_n 為單變量的邊際分佈函數，注意到 $u_i = F_i(x_i) \ i = 1, \dots, n$ 為均勻分布於 $[0,1]$ 的變數。關聯函數能夠結合這些均勻分布的邊際函數，而成為一個多變量的分佈函數。利用轉換，我們可以得到

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) &= P(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_n^{-1}(U_n) \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= F(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

下述的 Sklar 定理，保證了上述關係。

定理 3.1： (Sklar 定理) 令 F 是一個 n 維度的多變量分佈函數，其邊際分佈為 $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ ，則存在一個 n 維度的關聯函數 C 使得

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)。$$

此外，若邊際分佈函數 $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ 皆是連續的，則 C 為唯一的。

如果所有的邊際分佈函數 $F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$ 皆為連續可微分，則這些邊際分佈函數的密度函數可以被簡單的表示。使用下標作為聯合以及單變量機率密度函數 f 的標示如下：

$$f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

應用 Sklar 定理可以得到：

$$f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

其中 $u_i = F_i(x_i)$ 。聯合密度函數可以很簡單的表示為，所有邊際密度函數以及關聯函數的乘積。此結果建立了一個可以很容易產生更多不同多變量分配函數的機制，我們可以透過關聯函數以及邊際密度函數，來決定多資產之間的相關性。當邊際密度函數很容易估計時，此機制將會非常有用。

關聯函數在金融領域中扮演了很重要的角色，此方法可以有效說明資產間的相關性，它也可以告訴我們許多資產同時違約的機率。從風險管理的角度來說，這是一個很關鍵的議題。實證上來說，我們也關心許多資產在極端分位點上同時發生違約的機率。例如有許多的公司在 1987 年 10 月 19 日當天股價遭受了很大的損失，從信用風險的角度，也有許多類似同時違約的例子。若股價下跌至某一個極端水準時，資產容易違約，關聯函數可以用來描述這些資產同時違約的可能性。

3.1 信用風險中的關聯模型

主要有兩類關聯函數，一類是橢圓族 (elliptical class) 關聯函數，另一類為阿基米德族 (Archimedean class)。第一類的橢圓族包括了高斯分配、學生-t 關聯函數，阿基米德族則通常對高維度的擴展性上，具有很大的效用。

首先，我們介紹高斯關聯函數，因為它在信用風險模型中時常出現，它主要倚賴於相關矩陣。定義 Φ^R 為多變量的常態機率分配函數，其中相關矩陣為 R ，均值为 0，且每一分量標準差為 1。令 ϕ 為一單變量標準常態的分佈函數，一個高斯關聯函

數可由下式定義：

$$C_G^R(u_1, \dots, u_n) = \Phi^R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))。 \quad (3-1)$$

注意到每一個變數皆屬於 0 與 1 之間，它們可與標準常態函數作轉換。

上式所描述的相關性，主要是由多變量的常態密度函數的相關矩陣 R 所決定，一個很直接的推廣是將高斯關聯函數改為學生-t 關聯函數，後者具有較真實的尾端分佈性質。它沒有如式(3-1)的封閉形式，卻很容易由多維度的學生分配函數定義。

阿基米德族包括了 Gumbel、Clayton、Frank、以及一般化 Clayton 關聯函數等。此族主要是由具有連續凸性與嚴格遞減等性質的關聯生成函數 (copula generating function) $\phi(u)$ ，定義於 $[0,1]$ 與值域在 $[0,\infty]$ 的實質函數。此族的關聯函數可以由下面的形式來定義：

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))。$$

例如， n 維度的 Clayton 生成函數是

$$\phi_\theta = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1)，$$

則它的關聯函數則定義為

$$C_\theta^{cl}(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1)^{\frac{1}{\theta}}, \theta > 0$$

Gumbel 關聯生成函數定義如下：

$$\phi_\theta(u) = (-\ln u)^\theta, \quad \theta \in [0, \infty)$$

Frank 關聯函數如下

$$\phi_\theta(u) = -\ln \frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1}, \theta \neq 0$$

我們可以看出，阿基米德族的關聯函數，是由一維度的關連生成函數來產生多維度的關聯函數。這具有很大的便利性，特別是在參數估計上，能用很少的參數，來描述高維度的機率分配。

令 d 為可違約資產的總數， τ_i 為資產 i 的違約時間， $F_i(t), 0 \leq t \leq \infty$ 為 τ_i 的累積分佈函數。假設每個 $F_i(t), i = 1, \dots, d$ 皆為嚴格單調，則資產 i 的違約時間可以由下式抽樣：

$$\tau_i = F_i^{-1}(U_i), \quad (3-2)$$

其中每個 U_i 皆為均勻分布隨機變數。關聯函數方法可以在這些均勻分布隨機變數間提供許多相關性的結構。因此，它們所對應的違約時間 τ_i ，則很自然地具有很多種相關結構。

3.2 關聯因子模型

在此我們考慮簡單的高斯關聯函數與學生-t 關聯函數，利用尾端機率來描述多資產的聯合違約機率。一個高斯關聯模型，描述了對每一個均勻分布的隨機變數 U_i 如下

$$U_i = \Phi_i(Z_i) \quad (3-3)$$

其中 $i=1, \dots, d$ 。向量 $(Z_1 \dots Z_d)^T$ 是一個多變量的常態隨機向量， T 為向量轉置。每一個 Φ_i 為第 i 個常態隨機變數的分佈函數。因此，違約時間 τ_i 與 τ_j 的相關性便可由常態隨機變數 Z_i 與 Z_j ，透過 $F_i^{-1}\Phi_i$ 與 $F_j^{-1}\Phi_j$ 來共同決定。假若每個 Z_i ，具有以下的特殊分解：

$$Z_i = \rho_i W_0 + \sqrt{1 - \rho_i^2} W_i \quad (3-4)$$

其中 W_0 為共同因子， W_i 為邊際因子。而 W_0, \dots, W_d 皆為一維 i.i.d. 的標準常態隨機變數，且 $|\rho_i| \leq 1$ 。高斯因子關聯函數 (Gaussian factor copula function)，即被定義為上式的分解情形。這種結構對模型縮減 (model reduction) 相當有用。因為原來高斯

關聯模型是由整個相關矩陣組成，矩陣元素總個數的尺度是 d^2 ；而高斯因子關聯模型，透過 (3-4) 讓整個相關矩陣由 ρ_i 來定義，則矩陣元素總個數的尺度減少至 d ，見 Laurent and Gregory (2005)。我們可以看出，使用高斯因子關聯模型將有助於維度縮減 (dimension reduction)，從 d^2 降為 d 。雖然此因子模型在統計估計上面有許多好處，但也可能面臨模型太過簡化的缺點。例如隱含相關 (implied correlation)，即是將高斯一因子關聯模型 (Gaussian one-factor copula model) 之參數 ρ (見式 (3-4))，從信用衍生品的市場報價所反推出來的數值。這個觀念等同於在權益市場 (equity market) 中的一歐式選擇權價格透過 Black-Scholes 公式反推出的隱含波動率 σ 。但是，由於信用衍生性商品的複雜度普遍高於歐式選擇權甚多，是否可用一個隱含相關來度量信用風險，仍有可議之處。其餘如交易對手風險 (counterparty risk) 的討論，Gregory (2010) 中有詳細的討論。

另一個類似關聯模型的是學生-t，它規範均勻隨機變數 $U_i = t_v(S_i)$ ，其中 $S_i, i = 1 \dots d$ 均為自由度為 v 的學生-t 隨機變數， t_v 為其累積分配函數。多變量學生-t 隨機向量 $\mathbf{S} = (S_1 \dots S_d)^T$ 可被拆解為 $\mathbf{S} = \mathbf{Z} / \sqrt{Y/v}$ ，其中 \mathbf{Z} 為一個具有共變異數矩陣 Σ 的中央常態隨機向量， Y 則為一個自由度 v 的卡方分佈， $t_{\Sigma, v}$ 則為此學生-t 隨機向量的聯合分佈函數。當每一個 Z_i 有類似 (3-4) 的因子結構時，則此關聯模型被稱為學生-t 因子關聯模型。關於其他學生-t 關聯模型可以在參考文獻 Laurent and Gregory (2005) 中找到。

第四節 尾端 (聯合違約) 機率之估計

(Estimation of Tail (Joint Default) Probability)

給定一組時間向量 (T_1, \dots, T_d) 用來描述違約時間 (τ_1, \dots, τ_d) 的上界，聯合違約事件即可被定義為 $\prod_{i=1}^d I(\tau_i \leq T_i)$ 。將 (3-3) 代入 (3-2) 中，每一個違約事件 $\{\tau_i \leq T_i\}$ 即可被刻畫為 $\{Z_i \leq c_i\}$ ，其中 $c_i = \Phi_i^{-1}(F_i(T_i))$ 。在一個高斯關聯模型下，聯合違約機率

$P = E\{\prod_{i=1}^d I(\tau_i \leq T_i)\}$ ，或可以被表示為向量型式如下：

$$P = E\{I(Z < C)\} \quad (4-1)$$

其中 $Z=(Z_1, \dots, Z_d)$ ， $C=(C_1, \dots, C_d)$ 。由於多變量常態分佈函數為已知，尾端機率可被表示為下列積分形式：

$$P = \int_{-\infty}^{c_1} \dots \int_{-\infty}^{c_d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \Sigma^{-1} z\right) dz_d \dots z_1, \quad (4-2)$$

其中 $z=(z_1, \dots, z_d)$ 。類似的學生-t 關聯模型的聯合違約機率，可表示成：

$$P = E\{I(S < C)\}, \quad (4-3)$$

其中 $S = (S_1 \dots S_d)^T$ 是具有相關舉證 Σ 以及自由度 v 的多變量學生-t 隨機向量， $C=C=(C_1, \dots, C_d)^T$ 是違約門檻，給定向量 S 的聯合機率密度函數，尾端機率的積分型式也可被寫成

$$P = \int_{-\infty}^{c_1} \dots \int_{-\infty}^{c_d} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2}) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{v}{2}) (v\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{1}{v} z^T \Sigma^{-1} z\right)^{-\frac{v+d}{2}} dz_d \dots z_1 \quad (4-4)$$

其中 $Z=(Z_1, \dots, Z_d)$ 。

Han and Wu (2012) 發展出蒙地卡羅方法中高效能的重要抽樣法，或見第四章第一節中的介紹，以估算式 (4-1) - (4-4)，並將這些算法推廣至下一節討論之第 k 個違約機率的估計問題上。

第五節 信用衍生品市場：CDS 與 CDO(Credit Derivatives Market: CDS and CDO)

在信用衍生性商品的討論中，若我們需要對一籃子的違約交換，或類似的商品進行評價，在這個過程中通常需要第 k 個違約資產發生的機率。第 k 個違約交換

(k^{th} -to-default swaps)的機制非常類似保單，對於保護買方(protection buyer)來說，他/她必須定期支付一筆保險費用，一直持續到某個信用事件發生或契約終止為止，支付的金額總和稱為「保護端(protection leg)」；同時，此交換商品的發行人，或稱保護賣方(protection seller)，將補償買方因為違約所受的損失，這個損失金額稱為「違約端(default leg)」。評價此商品相當於要計算買方與賣方的公平價格，在風險中立測度下，此公平價格可由下述方式來決定，在此我們先介紹一些關於我們訂價模型的假設與符號。

- n ：交換合約中包含的可違約資產數目。
- T ：此契約的到期日。
- R_i ：第 i 個資產的回收率。
- M_i ：第 i 個債務面額
- $\Delta_{j-1,j}$ ：付款時間區間，市場上的慣例為一季。
- h_i ：第 i 個資產的危險率
- τ_i ：第 i 個資產的違約時間
- $B(0, \tau) : \exp(-\int_0^\tau r(u)du)$ 到期日為 τ 的折現因子，其中 $r(\cdot)$ 為無風險利率。

一個信用衍生性金融商品的公平價格，將使保護買方所付的金額與保護賣方所支付的損失補償期望值相同。令 $I(\cdot)$ 為指標函數，第 k 個違約(即 τ 為 τ_1, \dots, τ_n 的第 $n-k$ 個從大排到小的順序統計量)所可能產生的現金流平均值(違約端)即為：

$$DL = E\{(1 - R) \times M \times B(0, \tau) \times I(\tau < T)\}, \quad (5-1)$$

其中 E 為風險中立測度下的期望值。另一方面，對於保護買方，期望現金流量為：

$$PL = E \left\{ \sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times M \times prep \times B(0, t_j) \times I(\tau > t_j) \right\}. \quad (5-2)$$

當 (5-1) 與 (5-2) 相等時，我們可得到公平費率 (premuim, 或稱貼水) $prep$ 如下：

$$prep = \frac{E\{(1-R) \times M \times B(0, \tau) \times I(\tau < T)\}}{\sum_{j=1}^N \Delta_{j-1, j} \times M \times B(0, t_j) \times I(\tau > t_j)} \quad (5-3)$$

信用違約交換 (Credit Default Swap - CDS) 的訂價問題即是當上式 (5-3) 中可違約資產數目為 $n=1$ ，一般稱為「單一名字」(single name)。抵押債務債券或稱為擔保債權憑證 (Collateralized Debt Obligation-CDO) 指的是當 (5-3) 式中可違約資產數目是高維度時，一般也稱為「多重名字」(multi names)。可以從 (5-3) 中看出，要計算此類商品價格，是相當具有挑戰性的。

單一名字的資產標的物通常是公司，但也可以是任何可違約的單一資產，例如 CDO 的分券 (tranche)、貸款、或一些資產證券化的商品。不過後者在 2008 年九月中的金融海嘯之後發行數量已變得很低，前者的公司 (firm) CDS 仍然在市場上熱絡的交易中。

一家公司的 CDS 價格直接反映出該機構的信用風險，這對某些投資人，特別是債券投資人，是很有吸引力的。此外，將一些具代表性的公司的 CDS 加權後所編成的指數，稱為 CDS index，可以反映出這些族群的整體信用狀況。CDX 與 iTraxx 是兩大 CDS 指數。譬如說，CDX NA IG (north America, Investment Grade) 指數是以 125 家北美投資等級⁵⁵以上的公司的 CDS 價格加權而得，該指數區分為 1, 2, 3, 5, 和 7 年的合約。iTraxx Europe 使用了 125 家歐洲投資等級的 CDS 編製，該指數區分為 3, 5, 和 7 年的合約。Markit 公司每年的三月及九月會調整成份 CDS，見 www.markit.com 的說明，這些 CDS 指數價格，以及其它與信用的相關商品。基本上，CDS 指數具有透明化，標準化，並具有具有相當好的流動性，受到市場參與者的許多青睞。

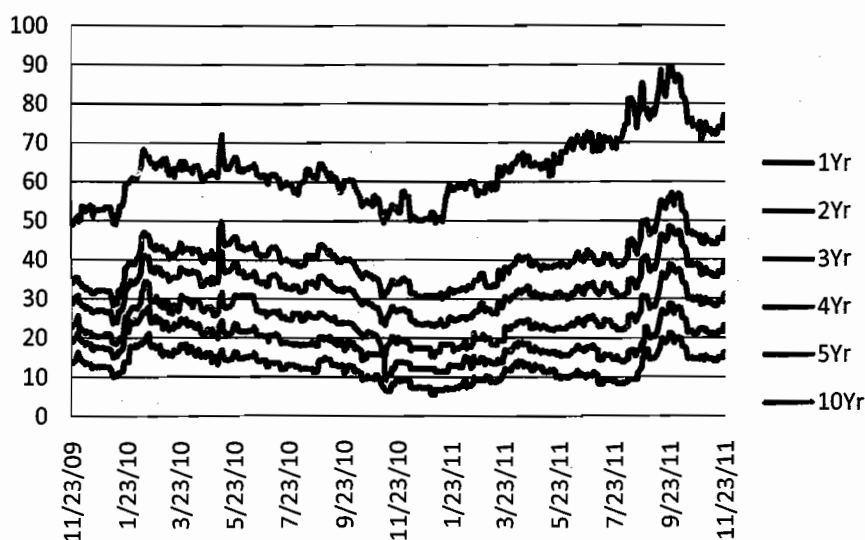
專業投資人在面對 CDS 指數的投資組合中可能產生的損失風險，市場上的分券 (tranche) 則提供一些信用衍生性商品。譬如說，itraxx Europe tranches 將參考投資組合 (reference portfolio) 所可能產生的損失區分了 0%-3% (equity)，3%-6%

⁵⁵標準普爾信評等級在 BBB- (含) 以上，以下的評等稱為投機等級 (speculative grade)。

(mezzanine BBB+)，6%-9% (mezzanine AA+)，9%-12% (senior)，12%-22% (first super senior)，等不同信用風險等級的商品。然而，22%-100% (2nd super senior) 等級一般不在市場上交易。在金融海嘯之前，CDO 的交易就是以這種形式快速散佈在全球的資本市場。

如何衡量這些 tranche 的風險？市場上多半採用先前提到過的 Gaussian factor copula 以隱含相關係數 (implied correlation) 作為一種類似於隱含波動率的觀念。如前述僅以一個隱含相關係數來衡量資產池中高達 125 個個體 (entity) 的違約情形，在使用以及解釋上必須十分小心。

由以上的討論，可窺見信用評等公司 (rating agency) 在信用衍生信商品中亦扮演了關鍵的角色。全球最大的信評公司包括了 Standard & Poor (標準普爾)，Fitch (惠譽)，以及 Moody's KMV (穆迪 KMV)。事實上從 2011 年 8 月 10 日美國標準普爾調降美國信評 (由 AAA 到 AA+) 所引發的股災看來，信評機構對於全球經濟的影響力不容小覷。



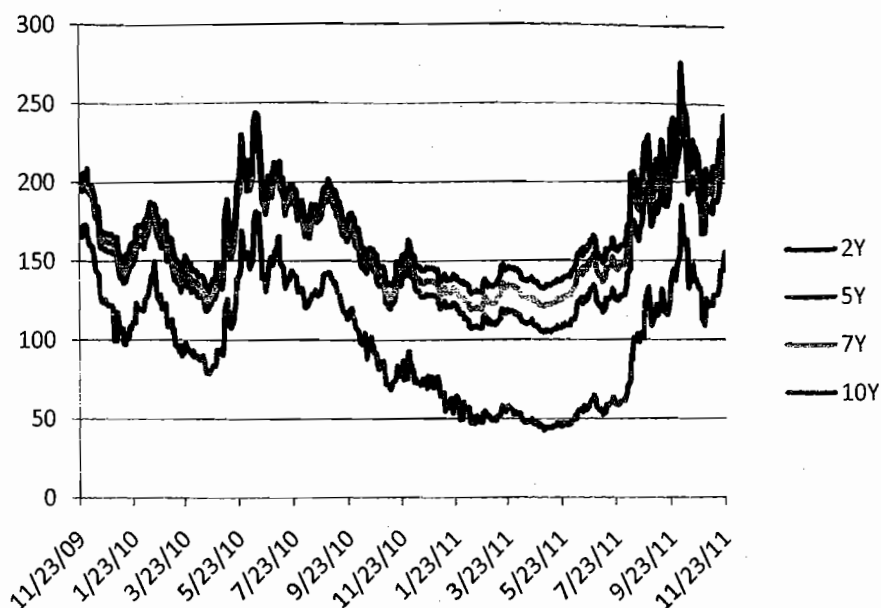


圖5-1 IBM CDS（上圖）與CDX.NA.IG（下圖）的歷史資料

範例 5.1

圖 5-1 中顯示了 IBM CDS 與 CDX.NA.IG 的日歷史費率，以 basis point (10^{-4}) 為單位，資料期限從 2009 年 11 月 23 日到 2011 年 11 月 23 日，資料來源為 Bloomberg。由於愈遠期的違約機率愈大，費率也就愈高。

一個簡易用來分析這些 CDS (index) 資料的方法式採用了下述的近似

$$\lambda_t(T) \approx \frac{s_t(T)}{1-R},$$

其中 $s_t(T)$ 是 CDS 在 t 時到期日 T 的費率， R 是回復率 (recovery rate)，而 λ_t 是 t 時的違約強度 (default intensity)。利用此近似很容易估計出 T 年內的違約機率 $DP(T) \approx 1 - \exp(-\lambda_t(T) \times T)$ 。

除了可從市場上 CDS 的資料近似違約機率之外，信評公司也會公佈不同評等下債券的平均違約率。表 5.1 分別揭露了標準普爾與穆迪一年與五年的違約率。

範例 5.2

以標準普爾 BB 等級的債券來說，一年內會違約的機率是 1.1%，五年內會違約的機率是 2.2%，因此二至五年的違約機率是 1.1%。在第一年存活條件下但違約發生在二到五年中的條件機率大約是 $1.1\% / (1 - 1.1\%) \approx 1.1\%$ ，這個數值也常用來近似違約強度 $\lambda_t(T) \times T$ ， $T = 4$ 。

表 5.1 平均累積違約率 (Average cumulative default rate) (%)

<i>S&P/Moodys Rating</i>	<i>AAA/Aaa</i>	<i>AA/Aa</i>	<i>A/A</i>	<i>BBB/Baa</i>	<i>BB/Ba</i>	<i>B/B</i>	<i>CCC</i>
<i>S&P Y1</i>	0.0	0.0	0.1	0.2	1.1	4.8	16.4
<i>Moody's Y1</i>	0.0	0.0	0.0	0.2	1.8	8.1	
<i>S&P Y5</i>	0.0	0.1	0.1	0.4	2.2	4.0	7.0
<i>Moody's Y5</i>	0.0	0.1	0.1	0.4	2.0	4.9	

資料來源：www.efalken.com

以上提供了使用動態的 CDS 牌告費率，圖 5-1，以及比較靜態的違約率，表 5.1，來計算或近似違約強度。此外，還有許多關於 CDX 或 iTraxx 等信用衍生性商品訂價的細節，例如資產證券化的過程，信用風險的傳染性效應 (contagious effect) 與近來美國實施的金融改革等議題，以及跨市場，例如信用以及股票選擇權，的相關交易策略與訊息解讀，這些已超出本書的範圍，在此不再加以討論。

範例 5.3 (CDS Pricing)

如前述信用違約交換的貼水 P_t 定義為

$$P_t = \frac{E\{(1 - R) \times B(t, \tau) \times I(\tau < T) | \mathcal{F}_t\}}{E\{\sum_{j=1}^N \Delta_{j-1, j} \times B(t, t_j) \times I(\tau > t_j) | \mathcal{F}_t\}},$$

其中 τ 代表了某一資產的違約時間， R 是恢復率， $B(0, t)$ 是 0 到 t 時的折現因子，且

$$\Delta_{j-1,j} = \begin{cases} t_j - t & \text{if } t_{j-1} < t \leq t_j \\ t_j - t_{j-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

縮減式模型 (reduced form model) 假設了違約時間 τ 的分佈為

$$P(\tau < t) = E \left\{ \exp \left(- \int_0^t h_u du \right) \right\}.$$

若假設違約強度 $h_{u \geq t}$ 服從一 O-U 過程

$$dh_u = \alpha(m - h_u)du + \beta dW_u,$$

且 $h_t = x$ 。則

(a) 計算違約時間 τ 的機率密度函數。

(b) 假設 $B(0, t) = \exp(-rt)$ 且 R 給定，運用(a)的結果證明 $P_t = P(t, x; \alpha, m\beta, r)$ 。

解答：

(a) Conditional CDF 是

$$P(\tau < T | \mathcal{F}_t) = 1 - E \left\{ \exp \left(- \int_t^T h_u du \mid \mathcal{F}_t \right) \right\} = 1 - \exp(A(t, T) - B(t, T)h_t).$$

由條件機率密度函數的定義可導出

$$\begin{aligned} g(y = \tau | t, x) &= \frac{\partial}{\partial y} P(\tau < y | \mathcal{F}_t) \\ &= -\exp(A(t, y) - B(t, y)x) \times (A'(t, y) - B'(t, y)x), \end{aligned}$$

使得 CDS premium 的分子 = $(1 - R) \cdot \int_t^T e^{-r(y-t)} g(y) dy$ ，其中

$$A(t, y) = (B(t, y) - (y - t)) \cdot \left(m - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \right) - \frac{\beta^2}{4\alpha} B(t, y)^2$$

$$B(t, y) = \frac{1 - e^{-\alpha(y-t)}}{\alpha}$$

$$A'(t, y) = (B'(t, y) - 1) \left(m - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \right) - \frac{\beta^2}{2\alpha} B(t, y) B'(t, y)$$

$$B'(t, y) = -e^{-\alpha(y-t)}.$$

CDS premium 的分母則是

$$\begin{aligned} & E\{\sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times B(t, t_j) \times Z(\tau > t_j) | \mathcal{F}_t\}, \quad \Delta_{j-1,j} = \begin{cases} t_j - t & \text{if } t_{j-1} < t \leq t_j \\ t_j - t_{j-1} & \text{otherwise.} \end{cases} \\ & = \sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times e^{-r(t_j-t)} \cdot \int_{t_j}^{\infty} g(y|t, x) dy \\ & = \sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times e^{-r(t_j-t)} \cdot P(\tau > t_j | \tau > t) \\ & = \sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times e^{-r(t_j-t)} \cdot [1 - P(\tau < t_j | \tau > t)] \\ & = \sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times e^{-r(t_j-t)} \cdot [1 - (1 - \exp\{A(t, t_j) - B(t, t_j)h_t\})] \\ & = \sum_{j=1}^N \Delta_{j-1,j} \times e^{-r(t_j-t)} \cdot \exp\{A(t, t_j) - B(t, t_j)h_t\} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A(t, t_j) &= (B(t, t_j) - (t_j - t)) \times \left(m - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\right) - \frac{\beta^2}{4\alpha} B(t, t_j)^2 \\ B(t, t_j) &= \frac{1 - e^{-\alpha(t_j-t)}}{\alpha}. \end{aligned}$$

作業 5.1 若違約強度服從 CIR 過程，重新推導範例 5.2 的結果。

範例 5.4

將 CDS premium 公式分子中的 $E[B(t, \tau)1(\tau < T)|\mathcal{F}_t]$ 對利率進行推廣。

一般而言，在違約時間的條件機率密度函數存在之下

$$E[B(t, \tau)1(\tau < T)|\mathcal{F}_t] = E\left[\int_t^T B(t, y) g(y) dy | \mathcal{F}_t\right],$$

也可以分別表示為

$$\begin{aligned} E \left[\int_t^T B(t, y) g(y) dy | \mathcal{F}_t \right] &= E \left[\int_t^T B(t, y) dP(\tau < y | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T B(t, y) dP(\tau \in dy | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned} E[B(t, \tau) 1(\tau < T) | \mathcal{F}_t] &= E \left[\int_t^\infty B(t, s) 1(s < T) 1(\tau \in [s, s + ds]) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T B(t, s) 1(\tau \in [s, s + ds]) | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

再者，若 $B(t, s)$ 是決定性 (deterministic) 函數，

$$\begin{aligned} &E \left[\int_t^T B(t, s) 1(\tau \in [s, s + ds]) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_t^T B(t, s) P(\tau \in ds | \mathcal{F}_t) \\ &= \int_t^T B(t, s) E \left[h_s e^{-\int_t^s h_u du} | \mathcal{F}_t \right] ds. \end{aligned}$$

若 $B(t, s)$ 是隨機的，

$$\begin{aligned} &E \left[\int_t^T B(t, s) I(\tau \in [s, s + ds]) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[E \left[\int_t^T B(t, s) I(\tau \in [s, s + ds]) | \{B(t, s)\}_{s=t}^T \right] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T B(t, s) E[I(\tau \in [s, s + ds]) | \{B(t, s)\}_{s=t}^T] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[E \left[\int_t^T B(t, s) h_s e^{-\int_t^s h_u du} ds | \{B(t, s)\}_{s=t}^T \right] | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T B(t, s) h_s e^{-\int_t^s h_u du} ds | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

作業 5.2 讀者可以想想若給定一序列的真實 CDS 資料，如何估計出模型的參數？

PART II

計算金融

**(COMPUTATIONAL
FINANCE)**

Chapter 3

數值方法與蒙地卡羅模擬

本章學習重點

- 第一節 數值偏微分方程：有限差分法
- 第二節 快速傅立葉轉換方法：解不同模型下的選擇權價格
- 第三節 擾動法的近似解
- 第四節 隨機模擬法：亂數產生與歷史模擬
- 第五節 蒙地卡羅方法的基本理論
- 第六節 數值隨機微分方程
- 第七節 新奇選擇權
- 第八節 縮減變異的基本技術：反變異，條件抽樣，布朗橋

It is, in fact, the coupling of the subtleties of the human brain with rapid and reliable calculations, both arithmetical and logical, by the modern computer that has stimulated the development of experimental mathematics. This development will enable us to achieve Olympian heights.

~ N. Metropolis (1987)

第一節 數值偏微分方程：有限差分法

(Numerical PDE: Finite Difference Method)

在本節中，我們討論如何利用數值方法中的有限差分法 (finite difference method)，來解二階線性拋物型偏微分方程式 (second order linear parabolic-type PDE)。在金融問題中，這類方程式通常是由選擇權訂價問題所推導出來的。例如著名的 Black-Scholes 偏微分方程式，它是用來評價在 Black-Scholes 模型下一個歐式選擇權的價格，其形式如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0, \text{ on } [0, T] \times (0, \infty) \\ P(T, x) = h(x) \end{cases} \quad (0-1)$$

其中 σ 為波動率， r 為無風險利率， $h(x)$ 為一報酬函數。利用自然對數 \log 轉換 $x \rightarrow \log x$ ，將方程式 (0-1) 定義為 $P(t, x) = u(t, \log(x))$ ，則 $u(t, x)$ 滿足了以下的偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - ru(t, x) = 0, \text{ on } [0, T] \times (-\infty, \infty) \\ u(T, x) = g(x) \equiv h(e^x) \end{cases} \quad (0-2)$$

因此，當計算在時間 t ，股價 x 的一歐式選擇權價格時，可先將式 (0-2) 解出並帶入 $u(t, \log(S_t))$ ，該值就是 $P(t, S_t)$ 。

對 PDE (0-2) 來說，透過 \log 轉換的最大好處是保持了一個非退化的擴散係數

$\sigma^2/2$ ，以維持（具漂移項）布朗運動之無窮小生成元（infinitesimal generator）的橢圓性質。而 PDE (0-1) 則是有會退化的擴散係數 $(\sigma x)^2/2$ ，若 x 很靠近 0 的話。

1.1 有限差分法

上述偏微分方程式 (0-2) 中空間變數（標的 log 價格）的定義域為 $(-\infty, \infty)$ 。實際上利用數值方法解的時候，一個辦法是將這樣的定義域局部化（localization），也就是將上述方程式 (0-2) 先設定在有限的定義域並先改寫為以下的方程組：

$$\begin{cases} \frac{\partial u_l}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}(t, x) + r \frac{\partial u_l}{\partial x}(t, x) - ru_l(t, x) = 0, & \text{on } [0, T] \times (-l, l) \\ u_l(t, -l) = u_l(t, l) = 0 \\ u_l(T, x) = g(x) \end{cases}$$

其中邊界 l 就是一個預定的邊界。注意到，我們將偏微分方程式解 u 函數在邊界的條件設為 0，這稱為 **null Dirichlet boundary condition**。我們也可以將它設為其它情形，不過在這裡為了簡單起見，我們先設定為這個形式。可以證明當邊界 l 趨近到無限大時，上述方程式解 $u_l(t, x)$ 會收斂到真正方程式 $u(t, x)$ ， $\lim_{l \rightarrow +\infty} u_l(t, x) = u(t, x)$ 。

考慮一維度的訂價問題如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \tilde{A}u(t, x) = 0 & \text{on } [0, T] \times O_x \\ u(t, x_{\min}) = u(t, x_{\max}) = 0 & \text{if } t \in [0, T] \\ u(T, x) = g(x) & \text{if } x \in O_x \end{cases} \quad (1-1)$$

其中狀態空間 $O_x = [x_{\min}, x_{\max}]$ 。微分算子 \tilde{A} 定義為

$$\tilde{A}u = \frac{\sigma(x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} - ru,$$

其中 $\sigma(x)$ 假設為有下界的正值函數，係數 $b(x)$ 為連續。

有限差分法是將方程組 (1-1) 中的時間與空間離散化，基本的想法是將原來的偏微分方程式轉換成一個代數系統方程式。藉由將原來的變數 (t, x) 離散化為

$$(t_n = nk, x_i = xmin + ih),$$

其中離散時間大小 k 定義為 T/N 使得 $t_N = T$ 而且 $t_0 = 0$ ，離散空間大小 h 定義為

$\frac{x_{max}-x_{min}}{I}$ 使得 $x_0 = xmin$ 而且 $x_I = xmax$ ，我們利用 $u(t_n, x_i)$ 來逼近 $u(t, x)$ 並將其註明為 u_i^n 。

另外，將 \tilde{A}_h 定義為微分算子 \tilde{A} 的離散算子，並且假設原來偏微分方程式解 $u(t, x)$ 是二次連續可微分 C^2 ，然後取代以上的偏微分如下：

$$b(x_i) \frac{\partial u(t_n, x_i)}{\partial x} = b(x_i) \frac{\nabla u_i^n}{2h} + O(h^2) \quad (1-2)$$

和

$$\sigma^2(x_i) \frac{\partial^2 u(t_n, x_i)}{\partial x^2} = \sigma^2(x_i) \frac{\Delta u_i^n}{h^2} + O(h^2), \quad (1-3)$$

其中 ∇ 和 Δ 分別定義為中央差分算子如下：

$$\begin{aligned} \nabla u_i^n &= u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \\ \Delta u_i^n &= u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n, \end{aligned}$$

並且對於時間的離散逼近如下：

$$\frac{\partial u(t_n, x_i)}{\partial x} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + O(k). \quad (1-4)$$

我們利用一個所謂的 θ -scheme 來逼近方程式 (1-1)，其中 $\theta \in [0, 1]$ ，此方法會導出：

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \theta \tilde{A}_h u_i^n + (1 - \theta) \tilde{A}_h u_i^{n+1} = 0, \\ u_i^N = g(x_i). \end{cases} \quad (1-5)$$

當 $\theta = 0$ 時，此有限差分方法就稱做為顯性的 (explicit)。這是因為用來產生 (u_i^n) 的方程式是遞迴的

$$u_i^n = u_i^{n+1} + \frac{k}{h^2} \sigma(x_i)^2 \Delta u_i^{n+1} + \frac{k}{h^2} h b(x_i) \frac{\nabla u_i^{n+1}}{2} - k r u_i^{n+1},$$

其中比例 k/h^2 會被要求要接近 1，使得這個顯性的算法是穩定的 (stable)，而 u_0^n 還有 u_I^n 必須也要同時滿足邊界的條件。觀察到方程式 (1-2, 1-3, 1-4)，我們看到時間上的誤差具有一次準確性，空間上具有二次準確性，因此這樣的顯示計算法並不是很有效率。

當 $\theta \in (0,1)$ ，有限差分的算法就稱之為隱性的 (implicit)，這時候要解一個三對角線 (tri-diagonal) 系統的線性方程式以算出 $(u_i^n)_{i=0}^I$ 。當 $\theta = 1/2$ ，方程式 (1-5) 就會對應著名的 Crank-Nicolson 算法。這個算法被證明不論是在時間或是狀態上皆是二次準確，由於 Crank-Nicolson 在逼近時間偏導 $\partial/\partial t$ 時可提供較高的準確性。當 $1/2 \leq \theta < 1$ 的時候，這個算法就稱為無條件的穩定 (unconditional stable)，因為只要 h 與 k 夠小即可導致收斂。

備註：對於一個歐式選擇權評價問題來說，上述方程式函數可分別定義如下： $b(x) = r$ 、 $\sigma(x) = \sigma$ 皆為常數， $g(x) = h(e^x)$ 其中 h 為一報酬函數。這就將原來 Black-Scholes PDE 透過 log 轉換後成為一個非退化的 PDE 形式。

當我們如上定義 null Dirichlet boundary conditions，差分算子 \tilde{A}_h 定義如下：

$$A = \left((\tilde{A}_h)_{ij} \right)_{0 \leq j \leq I, 0 \leq i \leq I}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 & \cdots & & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & & \cdots & & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

其中參數 α 、 β 以及 γ 分別定義如下：

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma^2}{2h^2} - \frac{1}{2h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ \beta = -\frac{\sigma^2}{h^2} - r \\ \gamma = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{cases} \quad (1-6)$$

若我們的邊界條件為 null Neumann conditions，也就是空間邊界上的偏微分設為 $\partial u(t, l)/\partial x = \partial u(t, -l)/\partial x = 0$ ，矩陣 A 則是

$$A = \begin{pmatrix} \beta + \alpha & \gamma & 0 & \cdots & & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & & \cdots & & 0 & \alpha & \beta + \gamma \end{pmatrix}.$$

在演算法裡面的每一個時間步驟，都不免要解一個向量型式的方程組：

$$\left(\frac{1}{k} I_d - \theta A \right) u^n = \left(\frac{1}{k} I_d + (1 - \theta) A \right) u^{n+1}, \quad (1-7)$$

I_d 是一個 $(I+1) \times (I+1)$ 的單位矩陣 (identity matrix) 而且終端條件為

$$u^N = (g(x_i))_{i=0}^I.$$

1.2 解線性方程組：歐式選擇權

使用隱性的有限差分法來解一個評價的偏微分方程式，通常會導致於解一個線性系統

$$Au = g,$$

例如方程式 (1-7)。在這一小節裡面，我們介紹兩種基本方法用來解一個這樣的線性系統。

LU 分解法是試圖將矩陣 A 拆解成為一個下三角矩陣 L 和一個上三角矩陣 U 的乘積。由於 A 矩陣在上述的 PDE 有限差分法的離散之後成為一個三對角線矩陣，其對應的 LU 分解法通常稱之為 Crout 分解使得

$$A = LU$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & \bar{l}_I & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$U = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 & \bar{u}_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{d}_2 & \bar{u}_2 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \bar{d}_{I-1} & \bar{u}_I \\ 0 & \cdots & & 0 & \bar{d}_{I+1} \end{pmatrix}$$

因此，原始的線性問題就可以拆解成兩個子問題

$$\begin{aligned} Lq &= g \\ Uu &= q, \end{aligned}$$

後式中 q 是一個中介的向量，並且我們可以利用一個從上到下的遞迴來解 q 。類似的，我們在解 u 向量的時候也可以從下到上去解它。整個算法如下：

Downward Scheme

$$\begin{aligned} q_1 &= g_1 \\ \text{For } 2 \leq i \leq I, \text{ increasing } i \\ q_i &= g_i - \bar{l}_{i-1} q_{i-1} \\ \text{end.} \end{aligned}$$

Upward Scheme

$$\begin{aligned}
 & q_{i+1} = q_i / d_i \\
 & \text{or } 1 \leq i \leq I-1, \text{ decreasing } i \\
 & q_{i+1} = \frac{q_i - \bar{u}_i u_{i+1}^{k+1}}{d_i}
 \end{aligned}$$

上述的隱性算法通常數值解法當中還有另外一種很有效的算法：SOR 算法。此遞迴算法的使用以及穩定性的討論可以參照有限差分法或者矩陣計算的專門討論書籍。

將這些數值偏微分方程做一些簡單的推廣，就可以解決美式選擇權的訂價問題或者其它隨機模型所推導出的訂價偏微分方程式。對這方面感興趣的讀者可參閱 Lamberton and Lapeyre (1993) 或 Zhu et al. (2004)。以下我們考慮美式選擇權的例子。

1.3 解非線性方程組：美式選擇權

廣義來說，一個互補問題具有以下形式

$$A \cdot B = 0, A \geq \vec{0}, B \geq \vec{0},$$

其中 A 與 B 均為向量， $A \geq \vec{0}$ 代表 A 中每個元素均大於 0。對美式賣權來說，見第一章中的方程組 (8-2)，在經過上一節中有限差分法的離散化之後便可得

$$A = \left(\left(\frac{1}{k} I_d - \theta \bar{A}_h \right) u_i^n - \left(\frac{1}{k} I_d + (1 - \theta) \bar{A}_h \right) u_i^{n+1} \right)_{i=0}^I$$

$$B = (u_i^n - (K - x_i)^+)_{i=0}^I$$

同樣的也可以證明離散解 u^n 可收斂至真實解 $u(t, x)$ ，使得 $P_{am}(t, s) = u(t, \log(s))$ 。為了處理線性互補的條件

$$u_i^n - (K - x_i)^+ > 0$$

可以修正前一節中 upward scheme 的算法如下即可解出美式賣權的價格

Upward Scheme

$$u_I^{k+1} = q_I / d_I$$

For $1 \leq i \leq I-1$, decreasing i

$$\tilde{u}_i^{k+1} = \frac{q_i - \bar{u}_i u_{i+1}^{k+1}}{d_i}$$

$$u_i^{k+1} = \max\{\tilde{u}_i^{k+1}, (K - x_i)^+\}$$

end.

另外也可以利用 Projected SOR (PSOR) 以疊代法解線性不等式，可參閱 Wilmott (2000)。

第二節 快速傅立葉轉換方法：解不同模型下的選擇權價格(FFT Method:Solving Option Prices under Different Models)

利用傅立葉轉換方法 (Fourier Transform Method) 評價選擇權的做法如下。令 $C_T(k)$ 為一歐式買權，到期日為 T 、履約價格為 $exp(k)$ 、標的物價格為 S_0 。在一風險中立的機率測度下， $\log(S_T)$ 的傅立葉轉換記為 $\phi_T(u) = E[exp(iu \log(S_T))]$ 。吾人欲得出 $C_T(k)$ 的傅立葉轉換，然而這要先乘上一「阻尼參數」(Damping Parameter) 定義出當 $\alpha > 0$ ，

$$C_T(k) = exp(\alpha k) C_T(k)。$$

原因是歐式買權的價格 $C_T(k)$ 在左尾 ($k \rightarrow -\infty$) 的極限值不是 0，而導致了 $C_T(k)$ 不是絕對可積函數。然而，它乘上了阻尼參數後的 $C_T(k)$ 便無此缺陷，令其傅立葉轉換記為

$$\Psi_T(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{ivk} C_T(k) dk。$$

歐式買權價格的傅立葉轉換與 $\log(S_T)$ 的傅立葉轉換有著以下的關係。

定理 2.1 :

$$\Psi_T(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v} \quad (2-1)$$

證明：

$$\begin{aligned} \Psi_T^{X(T)}(v) &= \int_R c_{0,T}(k; S_0) e^{ivk} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^s e^{\alpha k} (e^s - e^k) e^{ivk} dk ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \int_{-\infty}^s (e^{s+\alpha k+ivk} - e^{k+\alpha k+ivk}) e^{ivk} dk ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left[\frac{e^{s+\alpha k+ivk}}{\alpha + iv} - \frac{e^{k+\alpha k+ivk}}{\alpha + 1 + iv} \right]_{-\infty}^s ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \left[\frac{e^{s+\alpha s+ivs}}{\alpha + iv} - \frac{e^{s+\alpha s+ivs}}{\alpha + 1 + iv} \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(s) \frac{e^{s+\alpha s+ivs}}{(\alpha + iv)(\alpha + 1 + iv)} ds \\ &= \frac{e^{-rT}}{(\alpha + iv)(\alpha + 1 + iv)} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^{s+\alpha s+ivs} ds \\ &= \frac{e^{-rT}}{(\alpha + iv)(\alpha + 1 + iv)} \int_{-\infty}^{\infty} q_T(s) e^{i(v - ((\alpha + 1)i)s)} ds \\ &= \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v} \end{aligned}$$

接著取反傅立葉轉換得到

$$\begin{aligned} C_T(k) &= e^{-\alpha k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(v) e^{ivk} dv \\ &= e^{-\alpha k} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Real}(\psi_T(v) e^{ivk}) dv. \end{aligned} \quad (2-2)$$

最後之等式可由選擇權價格是實數的必然性，以及實部積分函數是偶函數加以導出。

關於積分式(2-2)的計算方式，在運用了快速傅立葉轉換(fast Fourier transform, FFT)以後，可將原來的計算量 $O(N^2)$ 降至 $O(N \log N)$ ，因此提升了計算選擇權價格的效率性。快速傅立葉轉換是工程上常使用的積分技巧，在許多的計算軟體中都有現成的指令可以直接使用，而關於該轉換的理論推導及應用可見 Carr and Madan (1999) 與 Cherubini et al. (2010)。

由式(2-1)可看出若特徵函數有封閉解，則一歐式選擇權的價格變可由快速傅立葉方法加以計算，以下舉幾個常見的隨機模型，包括了跳躍-擴散(jump-diffusion)模型、Variance Gamma 模型與隨機波動(stochastic volatility)模型。

跳躍-擴散(Jump-Diffusion)模型：在 Black-Scholes 模型中加入一跳躍過程 Z_t 稱之為 jump-diffusion 模型或是 Merton 模型，其中 Z_t 是一個複合泊松(compound Poisson)過程，使得標的資產價格滿足

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t + dZ_t。$$

Z_t 與布朗運動 W_t 互為獨立，它每個跳躍的大小(jump size) Y_i 都 i.i.d.服從了 log-normal 分佈，使得 $\ln Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$ ，並且泊松過程 N_t 的強度(intensity)假設為 λ 。上述隨機微分方程的解是

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu^M t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right),$$

其中參數 $\mu^M = r - \sigma^2 - \lambda(\exp(\mu + \frac{1}{2}\delta^2) - 1)$ 。若 $X_T = \log S_T$ ，則

$$\phi_T(u) = \exp \left[T \left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2} \right) + i\mu^M u + \lambda \left(\exp \left(-\frac{\delta^2 u^2}{2} + i\mu u - 1 \right) \right) \right]$$

VG (Variance Gamma) 模型：定義為一個經過 Gamma 過程的時變布朗運動 (time-changed Brownian motion)，也稱作 Laplace 過程，它是一個純跳躍 (purely jump) 的過程，不含任何的擴散項 (diffusion term)。令原來具有漂移項的布朗運動是 $\theta t + \sigma W_t$ ，則一個 VG 過程可表示為

$$X_t(\sigma, \theta, \nu) = \theta \Gamma(t; 1, \nu) + \sigma W(\Gamma(t; 1, \nu)),$$

其中每單位時間 Gamma 過程的均值率假設為 1 且變異數為 ν 。套入在風險中立的 Black-Scholes 模型後成為

$$S_t = S_0 \exp(rt + X_t(\sigma, \theta, \nu) + \omega t), \quad t > 0$$

其中 $\omega = \log(1 - \theta\nu - \sigma^2\nu/2)/\nu$ ，使得

$$\phi_T(u) = \exp(\log(S_0 + (r + \omega)T)(1 - i\theta\nu u + \frac{\sigma^2 u^2 \nu}{2}))^{-T/\nu}.$$

隨機波動 (Stochastic Volatility) 模型：在給定如下方程式

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_{1t} \\ dY_t = \kappa(\theta - Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t} d(\rho W_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2} W_{2t}) \end{cases} \quad (2-3)$$

所定義之 Heston 模型下，吾人可求出

$$\begin{aligned} \phi_T(u) = & \frac{\exp\left(\frac{\kappa\theta T(\kappa - i\rho\sigma u)}{\sigma^2} + iuTr + iu \log S_0\right)}{\left(\cosh \frac{\gamma T}{2} + \frac{\kappa - i\rho\sigma u}{\gamma} \sinh \frac{\gamma T}{2}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}} \\ & * \exp\left(-\frac{(u^2 + iu)Y_0}{\gamma \cosh \frac{\gamma T}{2} + \kappa - i\rho\sigma u}\right), \end{aligned}$$

其中 $\gamma = \sqrt{\sigma^2(u^2 + iu) + (\kappa - i\rho\sigma u)^2}$ 。進一步運用第 (2-1) 式及 FFT 的轉換後，就可以算出歐式買權在 Heston 模型下的價格。另關於 Bates 模型、CGMY 模型等皆可由此傅立葉轉換方法求得選擇權價格，見 Cherubbini et al. (2010)。本書中第六章的實證研究也會提供與 FFT 方法在模型校準 (model calibration) 的比較結果。

第三節 擾動法的近似解(Asymptotic Approximation of Perturbation Method)

考慮一多因子隨機波動模型 (multifactor stochastic volatility model)，在此設定 S_t 為股價 (標的物) 並伴隨兩個隨機波動因子 Y_t 與 Z_t ， Y_t 是一個服從均數回歸 (mean reversion) (廣義來說是一遍歷擴散 (ergodic diffusion))，譬如說 Ornstein-Uhlenbeck 過程是一個典型的例子，另外 Z_t 僅假設為一個隨機擴散過程。考慮在歷史機率的測度之下，兩因子的隨機波動模型可寫成：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(0)}, \quad (3-1)$$

$$\sigma_t = f(Y_t, Z_t),$$

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \nu\sqrt{2\alpha}dW_t^{(1)},$$

$$dZ_t = \delta c(Z_t)dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)dW_t^{(2)},$$

其中的布朗運動 $W_t^{(0)}, W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ 具有相關性如下所示

$$d\langle W^{(0)}, W^{(1)} \rangle_t = \rho_1 dt, \quad (3-2)$$

$$d\langle W^{(0)}, W^{(2)} \rangle_t = \rho_2 dt,$$

$$d\langle W^{(1)}, W^{(2)} \rangle_t = \rho_{12} dt,$$

$$|\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1, |\rho_{12}| < 1.$$

多尺度隨機波動模型引入了兩個差異極大的時間尺度，其中一個用於刻畫時間快速變動（時間尺度較小），另一個則刻畫時間慢速變動（時間尺度較大）。快的時間尺度用於反應高頻資料如每日新聞事件，而慢的時間尺度用於反應經濟環境中的景氣循環（business cycle）。

文獻中，見 Fouque et al. (2011)，或第六章的實證研究中都指出，在不同資料頻率下，可觀察到不同時間尺度的存在性。在上述介紹的多尺度隨機波動模型中，Fouque et al. (2003) 考慮了在隨機波動模型中引入快與慢兩種時間尺度，並探討其對選擇權價格的影響。

在一風險中立之機率測度下，多時間尺度的隨機模型描述如下：

$$dS_t = rS_t dt + f(Y_t, Z_t)S_t dW_t^{(0)*}, \quad (3-3)$$

$$dY_t = \left(\frac{1}{\epsilon} (m - Y_t) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \Lambda_1(Y_t, Z_t) \right) dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{(1)*},$$

$$dZ_t = (\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta} g(Z_t) \Lambda_2(Y_t, Z_t)) dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) dW_t^{(2)*},$$

將均數回歸率（rate of mean reversion）設定成 $\frac{1}{\epsilon}$ ，其中 ϵ 為極小的參數，使 $\frac{1}{\epsilon}$ 成為極大的數，而讓 Y_t 在長期均數（long run mean） m 附近上下快速震盪，且設定震盪大小為 $\frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}$ ，以便未來做有用的推導。相對地，在另一個較慢的時間尺度所對應的隨機波動因子 Z_t ，在 Z_t 中放入 δ 以刻畫緩慢變動的過程，其中 δ 為極小的數。總而言之， Y_t 是快速變動的過程，而 Z_t 是緩慢變動的過程。模型中的參數與係數均有適當的設定，讓整個隨機系統如式（3-1）可以被良好定義。而 $W_t^{(0)*}, W_t^{(1)*}, W_t^{(2)*}$ 為在此測度下之布朗運動，並維持一樣的相關性。

使用奇異與正則的擾動方法（singular and regular perturbation method），Fouque et al. (2003) 推導出在這些多尺度隨機波動模型下，定義在式（3-4）中的選擇權價格 $p^{\epsilon, \delta}$ 可以被兩項和 $P_0 + \tilde{P}_1$ 來逼近。

$$P^{\varepsilon, \delta}(t, x, y; T, h) = E_{t, x, y, z}^* \{e^{-r(T-t)} h(S_t)\}, \quad (3-4)$$

$$P^{\varepsilon, \delta}(t, x, y; T, h) - \left(P_0(t, x, ; T, h; \bar{\sigma}(z)) + \tilde{P}_1(t, x; T, h; \bar{\sigma}(z)) \right) = O(\max\{\varepsilon, \delta\}). \quad (3-5)$$

第零項 (zeroth order term) P_0 ，也稱作極限項 (limiting term)，是 PDE (3-6)

的解：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}(z)) P_0(t, x, ; \bar{\sigma}(z)) = 0 \\ P_0(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (3-6)$$

第一項 (first order term) \tilde{P}_1 ，也稱作修正項 (correction term)，是 PDE (3-7)

的解：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}(z)) \tilde{P}_1(t, x, ; \bar{\sigma}(z)) = -(A^\varepsilon + 2B^\delta) P_0(t, x, ; \bar{\sigma}(z)) \\ \tilde{P}_1(T, x) = 0. \end{cases} \quad (3-7)$$

這兩個逼近項的和對真實選擇權價格 $P^{\varepsilon, \delta}$ 的誤差，被證明了與 ε, δ 在相同的尺度下。其它相關的定義皆在下面，其中式 (3-8) 定義了對快速變動的過程 Y_t 不變分佈的平均，並且式 (3-9) 中揭露了修正項 \tilde{P}_1 具有封閉解，若極限項 P_0 也有封閉解。

$$A^\varepsilon = V_2^\varepsilon x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_3^\varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right),$$

$$B^\delta = V_0^\delta \frac{\partial}{\partial \sigma} + V_1^\delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right).$$

$$V_0^\delta = -\frac{\sqrt{\delta}}{2} g(z) \langle \Lambda_2(y, z) \rangle \bar{\sigma}'(z),$$

$$V_1^\delta = \frac{\sqrt{\delta}}{2} \rho_2 g(z) \langle f(y, z) \rangle \bar{\sigma}'(z),$$

$$V_2^\varepsilon = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \langle \Lambda_1(y, z) \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y} \rangle,$$

$$V_3^\varepsilon = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \rho_1 \langle f(y, z) \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y} \rangle,$$

$$\bar{\sigma}(z)^2 = \langle f(\cdot, z) \rangle^2. \quad (3-8)$$

$$\tilde{P}_1(t, x; \bar{\sigma}(z)) = (T - t)(A^\varepsilon + B^\delta) P_0(t, x, ; \bar{\sigma}(z)) \quad (3-9)$$

$$\mathcal{L}_0 \phi(y, z) = f^2(y, z) - \bar{\sigma}^2(z)$$

$$\langle l(\cdot) \rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \int_{-\infty}^{\infty} l(y) e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} dy.$$

擾動分析結果顯示漸進展開 (asymptotic expansion) 的前兩項 P_0 與 \tilde{P}_1 具有以下性質：

- (1) 當逼近一個很複雜的隨機波動模型所定義出的選擇權價格 $P^{\varepsilon, \delta}$ 時，此兩種時間尺度 ε, δ 扮演了修正 Black-Scholes 公式的角色。當 ε, δ 各自趨近於零，選擇權價格會趨近於 Black-Scholes 公式中的選擇權價格，這些極快速變動與極慢速變動的隨機過程，對選擇權價格的主要影響是在尺度 $\sqrt{\varepsilon}$ 與 $\sqrt{\delta}$ 的修正項。
- (2) P_0 與 \tilde{P}_1 的計算對隨機波動模型並不敏感，其中所需的參數或是係數均可由隱含波動率曲面調校出來。

Fouque et al. (2011) 的專書中也探討了避險 (hedging) 與模型校準 (model calibration) 的結果，本書中第六章的實證研究也會提供與這些擾動方法的比較結果。

第四節 隨機模擬法：亂數產生與歷史模擬 **(Stochastic Simulation Methods: Random Number** **Generation and Historical Simulation)**

4.1 概說

蒙地卡羅方法的基本概念與使用可以追溯到人們試圖計算圓周率 π 。Buffon's needle 實驗提供了一種隨機的方法來估計圓周率，其步驟如下：

第一：在地上畫出一個方塊 (domain)，每邊長均為 1，然後在此方塊裡畫出最大的一個圓 (region of interest)。

第二：給定相同（identical）的物品（sample），像針，穀（麥）粒，或者是沙粒等，並將它們均勻的散布在這個方塊上面。

第三：數出散落在圓中（event）的數目。

第四：算出圓中散落物的數目佔整體散落物總數的比例（proportion）。理論上來說這個比例應該要接近圓周率 π 除以四，因此將這個數乘以四之後就是圓周率 π 的一個近似值。

在這個實驗的過程中有兩個重點值得探討。第一是採（抽）樣的問題，就是我們將散落物很均勻的散布在方塊中。由於這個操作受人為因素的影響很大，往往不容易做到，同時每一個散落物本身也都必須是一樣的，這也有實際上的限制。第二個問題是，實驗中散落物的數量必須要非常的大以達到較精準的估計，而這也會造成一些實際上的困難。因此這個 Buffon's needle 實驗所從事的一種利用機率（或隨機）的方式來估計圓周率 π 的方法，在實行上就變得不普遍。然而這一切都在二十世紀當中有所改觀了！隨著電腦技術的進步，運用機率統計上的抽樣方法進行許多科學以及工程問題的模擬（simulation），已經成為一種主要的計算方式並且通稱為蒙地卡羅方法。

蒙地卡羅方法的正式的起源，來自於 1945 年人類歷史上所發生的兩件破天荒的大事。第一件就是原子彈試爆成功，還有就是第一台電腦（electronic computer），名稱叫做 ENIAC，在賓州大學被建立起來。這兩件發生在美國的大事之後不久，一種新的計算方法『蒙地卡羅法』便誕生了。在當時二次世界大戰的期間，美國有一個曼哈頓計畫（Manhattan Project）在研究發展核子武器。當時的科學家除了透過物理實驗來直接觀察基本粒子的行為之外，也思考著如何藉著電腦，利用模擬這些基本粒子的運動方式，來度量一些實驗上難以觀察到的稀有事件，以便得到更好的預測或對物理現象有更進一步的了解。

蒙地卡羅方法第一次有意義的使用，可以追溯到費米（Enrico Fermi）的工作。在 1930 年代他自己就利用一些物理的元件產生隨機變數，以計算粒子在擴散過程中

的一些物理量，但他並沒有正式發表這方面的結果。接著到 1940 年代，John von Neumann 還有 Stanislaw Ulam，他們在美國 Los Alamos 國家實驗室從事核子武器方面的研究，才正式開始蒙地卡羅計算的序曲。蒙地卡羅這個名字是當時曼哈頓計畫裡面的一個代號，von Neumann 決定使這個代號來稱做他們所從事的粒子模擬實驗計劃；而「蒙地卡羅」這個名稱乃是由 Ulam 所倡議的。這是由於當時他的一位親戚很喜歡到摩納哥 (Monaco) 的蒙地卡羅賭場去賭博，與他所從事的科學研究，兩者的隨機性有異曲同工之妙。

事實上，蒙地卡羅方法或稱之為蒙地卡羅模擬實驗，乃是基於一類計算的流程。這個流程會重覆的產生一些隨機樣本，以至於能夠產生一些統計上的估計量。根據 Jackel 和 Platen 的定義⁶，若一種方法能夠根據一個事前決定的機率分配，利用抽樣的方法對既定的區域來估測一個特別的度量，則其可稱之為蒙地卡羅方法。由於蒙地卡羅方法，要求大量的隨機樣本，因此如何產生「真實的」隨機樣本，是一件困難的事情。特別是現代電腦原始被設計的目的乃是要產生一些數位的結果，因此所有利用電腦產出的隨機樣本都只是逼近值，並不能像真正從物理實驗所能夠得到的樣本那麼具有隨機性。von Neumann 發展了第一個偽隨機變數 (pseudo random number) 的方法，叫做 Middle-Square Digits。他也知道這些數字事實上並不能真正反映出隨機的性質，然而由於它的計算速度非常快，同時不失其運用的準確性，von Neumann 就接受並且推薦這種計算方法。

隨著現在電腦技術的進步，事實上也隨著數論，渾沌理論，以及統計方法的進步等共同加持之下，蒙地卡羅方法，或者是這一種所謂的實驗數學的方法已經變得十分普及。在 Metropolis⁷的一段紀錄中，他談到未來數學達到的狀態最終會分成兩個部份，一個是理論的部份，另一個就是在實驗的部份。從理論上來說，人類大腦能夠發展對於算數上面或者是在邏輯上面，乃是會越來越考慮一類很純的問題，討論一些比較精粹的結果。然而另外一個方向是利用電腦進行非常大量而且也是值得

⁶ Encyclopedia of Quantitative Finance. Editor Rama Cont. John Wiley and Sons, 2010.

⁷ Metropolis, N. "The Beginning of the Monte Carlo Method." *Los Alamos Science*, No.15, p.125.

信賴的一些計算。這兩方面的發展，都將終使人類能夠達到一個很高的境界，他所謂的 Olympia Height（奧林匹亞的高地）。

雖然蒙地卡羅的模擬方法在科學及工程領域中的應用已有一段不算短的歷史，然而在計算金融（computational finance）領域的發展則遲至 Phelim Boyle 在 1977 年的一篇關於利用蒙地卡羅法來評價選擇權的論文上面。儘管當時電腦運算的速度相當緩慢，然而很快的人們知道，蒙地卡羅模擬方法最終對於非常複雜的選擇權價格，對高維度選擇權的價格，風險管理等等相關金融工程領域，具有不可取代的地位。當今計算機的功能已經相對變得強大許多，現在的 CPU 在一秒之內能夠提供的計算量相當於過去第一台電腦 ENIAC 兩個月的總計算量。金融計算的應用層面愈來愈大，包括了訂價、避險、風險管理、投資組合、模型校準、壓力測試等等。從 500 大超級電腦的使用族群中可知，見 www.top500.org，金融應用不論在超級電腦的數目與計算量的比例上約在全球上排名第三，大幅超過我們熟悉的一些國防，氣象，生醫等領域，不難想見金融計算的使用已經十分普及了。

4.2 亂數產生器

利用數位式電腦模擬所產生的隨機樣本，其原理常令人咋舌。原因式這些「亂數產生器」幾乎是由決定性的算法（deterministic algorithms）產生出均勻（uniform）分布的樣本，例如利用 mid-square 方法，渾沌理論中的遞迴式，線性同倫產生法（linear congruential generation），或是擬亂數產生法（quasi random number generation）等等不一而足。當然這些產生器並不具有任何的隨機性，他們只是在「統計上」或者通過某些「準則測驗」便為人們所接受。現在幾乎科學計算的軟體都提供了快速，跨平台，長週期等好性質的亂數產生器，見 Niederreiter（1992）或 Lemieux（2009），我們在此便不深入介紹，讀者亦可見專書 Numerical Recipe in C（Press et al.（2002））來自行撰寫程式。

亂數產生器僅針對均勻分佈抽樣，但如何對其它隨機變數 X 進行抽樣呢？假設其分佈函數 F_X 存在且可逆，則在給定一個 $[0,1]$ -均勻分配的隨機變數 U 之下，新的隨

機變數 $F_X^{-1}(U)$ 與原來的 X 具有同樣的分佈函數。其原理如下：

$$P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x) = P(X \leq x)。 \quad (4-1)$$

從這個結果可知，只要能夠對均勻變數 U 進行抽樣，則藉由分佈函數 F_X ，就可以對隨機變數 X 抽樣了。這是為甚麼亂數產生器主要用來產生均勻分布的樣本。

範例 4.1

對指數隨機變數進行抽樣 $F_{\text{exp}}(x; \theta) = 1 - e^{-\theta x}, x \geq 0$ ，確認 $-\theta \log(1 - U)$ 會服從該指數分布。

4.3 歷史模擬

圖 4-1 是根據 2011 年 8 月 4 日每 15 秒的臺灣大盤指數，畫出當日報酬分佈的直方圖，資料是從台灣期貨交易所下載。不難看出均值約為 0 而且其機率分布並不服從常態分布。使用機率模型來描述或解釋臺指高頻資料的（動態）行為，事實上不是一件容易的事，可參閱本書第五章中所提供的方法對高頻資料的波動率進行估計，其中第六節有詳細實證資料的比較。

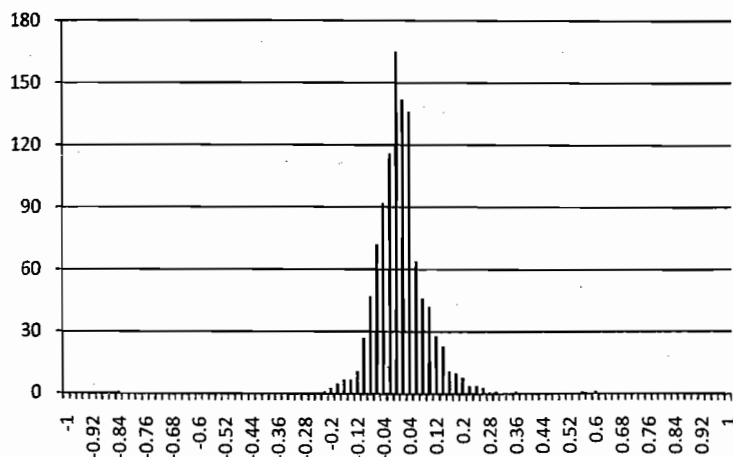


圖 4-1 臺灣大盤指數高頻（15秒）報酬率的直方圖

圖 4-2 是根據 2010 年 10 月 22 日到 2011 年 10 月 24 日一年美國 S&P 500 指數的日資料，畫出當年日報酬分佈的直方圖，資料是從 Yahoo Finance 網頁下載。不難看出均值約為 0 而且其機率分布並不服從常態分布。事實上樣本平均數是 0.000104，年化標準差是 0.09117，而這個簡單的估計可以用在第四章的範例 1.1 中以估計風險值 VaR。

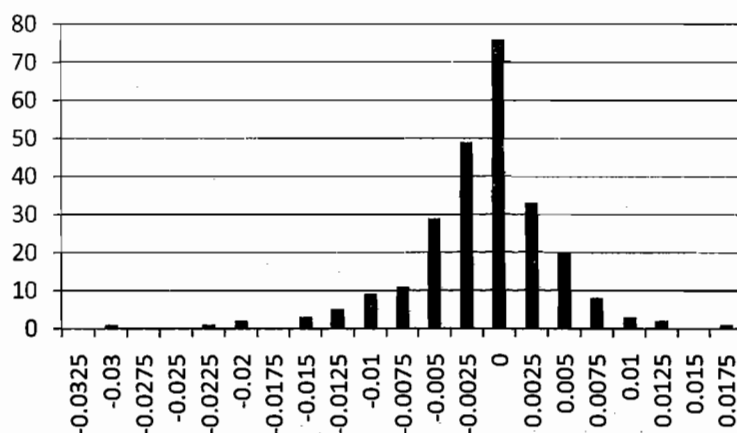


圖4-2 S&P 500指數日報酬率的直方圖

在不使用任何數學模型的條件下，若仍然要產生「隨機」樣本，『歷史模擬法』(historical simulation)是一個普遍的辦法，其原理如下：將已經發生過（或實現過）的許多歷史價格的報酬假想為將來可能產生的價格變化。

範例 4.2

在估計風險值時，將歷史報酬從大排到小，依據信心水準，算出最後的幾個百分位數後，再代入風險值的定義。

備註：這是實務上非常慣用的一種計算方式，這種算法雖然粗糙但很容易推廣到高維度的投資組合上。關於此計算的細節以及風險值的定義請見第四章中的重要抽樣法。

歷史模擬法的優點是避免隨機模型的誤用。然而過去的歷史經驗是否能夠充分

代表未來的風險則是一大疑問？這是使用歷史模擬法要特別小心的地方。另外對於某些流動性不足甚至一些店頭市場的交易商品，歷史資料可能不足或者根本不存在，則模型上的使用似乎仍不可避免。可參閱第六章第二節對風險值估計的回溯測試比較。

第五節 蒙地卡羅方法的基本理論(Basic Theory of Monte Carlo Method)

在許多金融工程的應用中，期望值的計算問題會很自然的發生。這些應用包括了選擇權的訂價問題、違約（default）或倒閉（ruin, bankrupt）機率的估計等等。對訂價問題來說，常可用 $E[h(X)]$ 的形式表達，其中隨機變數 X 代表一個具有風險性資產的標的物價格，函數 h 代表了報酬函數。若隨機變數 X 的機率密度函數 $f_X(x)$ 是已知的，期望值的計算就可以被轉化成為一個定積分問題：

$$E[h(X)] = \int h(x)f_X(x)dx \quad (5-1)$$

而且常可以利用數值積分（numerical integration）的辦法將其解出，例如辛普森法（Simpson rule），（Gauss）quadrature 算法等，見 Stoer and Bulirsch（1980）或 Miranda and Fackler（2002）。但是當隨機變數 X 的維度增加，也就是積分問題的定義域維度變大，那麼所謂的維度詛咒（curse of dimensionality）就會將這些數值計算方法的效率性給大幅的降低了。此外並不是不常見的，在一些新奇選擇權（exotic option）的訂價問題上，機率密度函數也是不知道的，或者是要用其它非常昂貴的方法才能計算得出。在這些情況之下，蒙地卡羅模擬法都可以成為替代定積分運算的一個選項，來克服先前提到的困難。

一個基本或者是原始的蒙地卡羅方法，其理論仰賴於大數法則以及中央極限定理，大數法則確保了樣本平均（sample mean）的收斂性。

定理 5.1：強大數法則 (Strong Law of Large Numbers)

Let $(X_i, i \geq 1)$ be a sequence of independent random variables following the same distribution as a random variable X . We assume that the $E\{|X|\} < +\infty$. Then,

$$E\{X\} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \text{ almost surely,}$$

where the sample mean $S_N = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N)$ and N is the sample size. That is,

$$P(\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = E\{X\}) = 1.$$

此大數法則確保了使用估計式 (estimator) S_N 來逼近期望值 $E\{X\}$ 是可行的，另注意到以下範例中的兩個事實：

範例 5.1

1. S_N 是不偏的估計式 (unbiased estimator)。由樣本間的獨立性，很容易確認統計上對不偏的定義 $E\{S_N\} = E\{X\}$ 會成立。
2. S_N 的變異數為 $Var(S_N) = \sigma_X^2 / N$ 。

從範例中 S_N 的變異數可以看出，要增加估計式精準度的辦法只有兩個。其一是增加樣本數 N ；其二是減少變異數 σ_X^2 。顯然變異數縮減 (variance reduction) 具有二次的效果，大過於增加樣本數 N 僅具有的一次效果。我們會在本章最後一節以及下一章專門討論變異數縮減的方法，其中有些饒富金融中的概念，並帶出風險管理的應用等。將此大數法則應用在解決積分問題 (5-1) 上，可得

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(X_i) \approx E\{h(X)\},$$

其中 X_i 代表了由 X 服從的分配所抽取出的獨立樣本。

下面介紹的中央極限定理進一步提供了估計式的誤差分析 (error analysis)。

定理 5.2： 中央極限定理 (Central Limit Theorem) Let $(X_i, i \geq 1)$ be a sequence of independent random variables following the same distribution of the random variable X . Assuming the first two moments of X exist, we obtain

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} (S_N - E\{X\}) \rightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ in distribution,}$$

where σ_X denotes the standard deviation of X .

意味著當 N 很大的時候，估計式 S_N 與 $E\{X\}$ 之間的誤差可以被近似為 $\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \varepsilon$ ，其中 ε 是一個標準常態隨機變數。不難看見當 N 非常大的時候，或者是 σ_X 非常小的時候，所得到的數值誤差就可以被降低了。因此， $\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$ 通常用來衡量估計式的誤差並被稱作標準誤差 (standard error, S.E.)。

另外，一個可以展示數值誤差的方式是透過信賴區間 (confidence interval, CI)。這可以很容易的從標準化的誤差 (standardized error, SE)，也就是 $(S_N - E\{X\})/(\sigma_X/\sqrt{N})$ ，會漸近的服從標準常態分配來理解。當 N 很大的時候，中央極限定理告訴我們

$$P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} (S_N - E\{X\}) \in dx\right) \approx \frac{-\exp(x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

所以我們可以保證這樣的誤差值落在 $[a, b]$ 的機率是 $\int_a^b \frac{-\exp(x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx$ 。

這個結果引入了以下信賴區間的定義，一個 S_N 的 $(100 - \alpha)\%$ 的信賴區間為

$$\left[S_N - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}, S_N + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \right] \quad (5-2)$$

其中 $z_{\alpha/2} > 0$ 而且 $-z_{\alpha/2}$ 代表了一個標準常態分配的 $\alpha/2\%$ 的百分位數 (percentile)。

例如一個 S_N 的 95% 與 99% 的信賴區間就分別是

$$\left[S_N - 1.96 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}, S_N + 1.96 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \right]$$

$$\left[S_N - 2.58 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}, S_N + 2.58 \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \right]$$

這是由於 $-Z_{0.05/2} = 1.96$ 且 $-Z_{0.01/2} = 2.58$ 。在計算實務中，標準差 σ_X 可從樣本 $X_i, 1 \leq i \leq N$ 中估計出，通常取為 $\sigma_X \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - S_N)^2$ 。

作業 5.1 從式 (5-2) 寫出估計式 S_N 的 90% 信賴區間。

5.1 評價歐式選擇權

回顧在風險中立的機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P^*)$ 中，歐式選擇權的價格可以表示為 $P(t, S_t) = E^*[e^{-r(T-t)} H(S_T) | \mathcal{F}_t]$ 。該 $H(\cdot)$ 記為一報酬 (payoff) 函數，例如 $H(x) = \max[K - x, 0]$ 為一賣權函數， $H(x) = \max[x - K, 0]$ 為一買權函數， K 為到期日的執行價， r 為無風險利率， t 為現在的時間點， T 為到期日。根據第一章中的隨機財務理論，如果標的物資產價格 S_t 服從幾何布朗運動

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*, \quad (5-3)$$

則解為 $S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z\right)$ ，其中 Z 為一標準常態分布。利用此解析解 (analytic solution) 來對 S_T 進行抽樣可得到以下對選擇權價格 $P(t, x)$ 的估計式，稱為 S_{N1}

$$P(t, S_t = x) \approx S_{N1} := \frac{e^{-r(T-t)}}{N} \sum_{i=1}^N H\left(S_T^{(i)}\right) \quad (5-4)$$

其中第 i 個樣本為 $S_T^{(i)} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z_i^{(i)}\right)$ 。

範例 5.2

在 Black-Scholes 模型下，利用估計式 S_{N1} (5-4) 計算一歐式買權價格。契約與模型參數給定如下： $r=2\%$ ， $\sigma=40\%$ ， $K=9000$ ，距離到期日時間 $T-t$ 為 1 年，且股價

$$S_t = 9000。$$

解答：由封閉解 (closed-form solution) 算出此範例的價值為 1503.40，而由模擬 10000 次所得的樣本平均為 1501.64 且標準誤差為 27.27。

第六節 數值隨機微分方程 (Numerical Stochastic Differential Equations)

由於大部份的隨機微分方程都不具封閉解，接下來我們討論如何模擬由隨機微分方程所定義出的伊藤過程 (Ito process)，其中很關鍵的一個步驟是離散化 (discretization)。我們會考慮兩種對隨機微分方程主要的離散化方式，一是 Euler 離散方式 (Euler scheme)，另一是 Milstein 離散方式 (Milstein scheme)。

考慮一維度的伊藤過程 X_t 定義如下：

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t。 \quad (6-1)$$

Euler 離散方式，是將上述方程式的解 X_t ，利用遞迴定義的 \hat{X}_t 來逼近：

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + \underbrace{a(t_i, \hat{X}_{t_i})\Delta t_i}_{O(\Delta t)} + \underbrace{b(t_i, \hat{X}_{t_i})\Delta W_{t_i}}_{O(\sqrt{\Delta t})}。$$

一個強收斂 (strong convergence) 的結果分析了 Euler 離散方式的誤差如下：

$$E\left(\sup_{0 \leq t_i \leq T} |X(t_i) - \hat{X}(t_i)|\right) \leq C\sqrt{\Delta t}。$$

這裡的強收斂結果指出，當我們用 \hat{X}_t 來逼近隨機過程 X_t 的軌跡時，所產生的最大絕對誤差的期望值是有上界的，且此上界的尺度大小為 $\sqrt{\Delta t}$ 。

能否將上述的誤差改進呢？答案是肯定的。這方面的研究在數值隨機微分方程 (numerical stochastic differential equation) 上有相當多的工作，可以參閱 Kloeden

and Platen (2011) 或 Mikosch (1999)。其中，Milstein 法是一個經常使用來改善 Euler 離散化的一個簡單方法，它主要是改進了 Euler 方法中對隨機積分

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) dW_u \approx b(t_i, X_{t_i}) \Delta W_{t_i} + O(\sqrt{\Delta t})$$

的逼近方式。運用伊藤定理並帶入式 (6-1) 即可推出

$$\begin{aligned} db(t, X_t) &= b_t(t, X_t) dt + b_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} b_{xx}(X_t) b^2(t, X_t) dt \\ &\approx b_x(t, X_t) b(t, X_t) dW_t. \end{aligned}$$

後式中的近似符號是忽略了前式中 dt 項，因為較 dW_t 項小。可以看出，對 $b(u, X_u)$ ，其中 $t_i < u < t_{i+1}$

$$b(u, X_u) \approx b(t_i, X_{t_i}) + b_x(t_i, X_{t_i}) b(t_i, X_{t_i}) [W_u - W_{t_i}],$$

因此可得

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} b(u, X_u) dW_u \approx b(t_i, X_{t_i}) \Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} b_x(t_i, X_{t_i}) b(t_i, X_{t_i}) (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i).$$

Milstein 離散方式較精準的理由在於它修正了 Euler 離散方法（僅用了上面右式第一項，誤差為 $\sqrt{\Delta t}$ ）對此隨機積分的近似誤差，它將精準度從 $\sqrt{\Delta t}$ 提高到了 Δt 。簡言之，Milstein 離散方式所定義出的遞迴式 \hat{X}_t 如下：

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + \underbrace{a(t_i, \hat{X}_{t_i}) \Delta t_i}_{O(\Delta t)} + \underbrace{b(t_i, \hat{X}_{t_i}) \Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} b_x(t_i, X_{t_i}) b(t_i, X_{t_i}) (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i)}_{O(\Delta t)}.$$

利用此修正，Milstein 證明了下面的強收斂結果，如下所示：

$$E\left(\sup_{0 \leq t_i \leq T} |X(t_i) - \hat{X}(t_i)|\right) \leq C \Delta t.$$

它保證了，使用 \hat{X}_t 來逼近 X_t 時的最大絕對誤差均值的上界尺度為離散時間長度 Δt 。後來還有許多關於高精度離散方法的誤差分析，非常類似對常微分方程的離散分析

方法，在此就不再加以闡述。

作業 6.1 利用伊藤定理證明

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} W_u dW_u - W_{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_u = \frac{1}{2} (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i)。$$

然而以財務的角度來說，除非我們所訂價的問題為路徑相依（在此情況下，我們將會傾向使用較精準的 Milstein 離散化方式）。否則，若僅考慮歐式選擇權的訂價問題時，不論是使用 Euler 或是 Milstein 的離散方式，皆可得到以下期望值弱收斂（weak convergence）的逼近誤差：

$$|E\{H(X_T)|X_0 = x\} - E\{H(\hat{X}_T)|\hat{X}_0 = x\}| \leq C\Delta t$$

此結果顯示，不論用哪一種離散化過程 \hat{X}_t 來逼近 X_t ，若我們僅關心歐式選擇權價格的逼近（選擇權的價格為一期望值），此弱收斂結果保證期望值誤差的絕對值的上界，皆為離散時間長度 Δt 的尺度。

總之，數值隨機微積方程中的強收斂重在伊藤過程路徑的誤差，而弱收斂則重在期望值的誤差。在對歐式選擇權的評價上，無論是 Euler 離散方式或是 Milstein 離散方式都能達到相同的精準度；然而對路徑相依的選擇權，例如新奇選擇權，Milstein 的離散方式仍能提供較小的偏誤。

範例 6.1

將 Black-Scholes 模型所定義的幾何布朗運動如方程式（6-1），進行 Euler 離散化。

解答：

- (1) 直接法： $S_{t+1} = S_t(1 + r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t)$ ，其中 $\varepsilon_t, t = 0, 1, \dots$ 為 iid 的標準常態隨機變數。
- (2) Log-transform 法： $X_{t+1} = X_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t$ 且 $S_t = \exp(X_t)$ 。

Matlab 程式 3-1 根據 Log-transform 方法模擬出標的價格的路徑

```
dt=T/NSteps;
nudt=(r-0.5*sigma^2)*dt;
sqdt=sqrt(dt);
sidt=sigma*sqdt;
RandMat=randn(Nrepl, NSteps);
Increments=[nudt+sidt*RandMat];
LogPaths=cumsum([log(S0)*ones(Nrepl,1), Increments],2);
SPaths=exp(LogPaths);
```

作業 6.2 根據 log-transform 離散法，畫出數條模擬的股價路徑，並試評論範例 6.4 中的兩種離散法。

範例 6.2

根據前一節範例 5.2 的模型設定，以及本節範例 6.1 的離散方式來對期末股價 S_T 進行抽樣，使用基本蒙地卡羅法來估計歐式選擇權價格。

解答：在離散時間 Δ_t 夠小的情形下，例如 $1/250$ 約為模擬資產的每日價格，所得到的估計值與標準差皆與範例 5.2 的直接抽樣方法相當接近。可參考 Matlab 程式 3-1 與 3-2。

Matlab 程式 3-2 根據 Matlab 程式 3-1 所模擬出標的價格進而估計一歐式選擇權

```
discount=exp(-r*dt);
SPaths(:,1)=[]; %get ride of starting points
CashFlows=exp(-r*TM). *max(0,SPaths(:,NSteps)-K);
price=mean(CashFlows)
se=sqrt(cov(CashFlows)/Nrepl)
```

第七節 新奇選擇權(Exotic Options)

以下我們討論幾種常見的新奇選擇權，例如二元、障礙、回顧、和複合選擇權等，其餘如亞式選擇權則留待下一章變異數縮減法中的控制變異法再詳述。

7.1 二元選擇權

亦稱之為 Digital Option，其報酬函數為不連續。最常見的有現金或零報酬 (cash or nothing) 及資產或零報酬 (asset or nothing)，並可規劃成買權或賣權形式。以買權而言，現金或零的報酬函數為 $h(x) = NI(x > K)$ ，如果資產價格高於履約價 K 則支付一筆定額現金 N (可能是資產價格本身的現金等)，如果低於執行價格則不支付報酬。以賣權而言，報酬函數為 $h(x) = NI(x < K)$ ，如果資產價格低於履約價 K 則支付一筆定額現金 N (可能是資產價格本身的現金等)，如果高於執行價格則不支付報酬。在 Black-Scholes 模型下的定價 PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0,$$

且期末條件 (terminal condition)，例如買權 $P(T, x) = NI(x > K)$ ，其封閉解如下

$$P(0, S_0) = NS_0 \mathcal{N}(d_2(0, S_0)).$$

範例 7.1 評價以現金或零報酬的二元歐式選擇權

起始股價 $S = 100$ ，履約價為 $K = 100$ ，無風險利率 $r = 0.08$ ，股利率為 $q = 0.03$ ，距離到期日時間 $T = 1$ ，波動率為 0.2 ，蒙地卡羅的模擬次數為 10000 次。以下是數值結果：（括弧中是標準誤差）

<i>Closed Form</i>			<i>Basic Monte Carlo</i>		
<i>Price</i>	<i>Call</i>	<i>Put</i>	<i>Price (SE)</i>	<i>Call</i>	<i>Put</i>
<i>Cash</i>	0.4685	0.4546	<i>Cash</i>	0.5299 (0.0144)	0.3932 (0.0144)

7.2 障礙式選擇權

區分為入局式 (knock-in) 與出局式 (knock-out) 選擇權：

(一) 入局式 (knock-in)

當標的資產價格觸及某障礙價格 B ，選擇權才生效，而成為基本選擇權。有下降入局式 $I(\min_{0 \leq t \leq T} S_t < B)H(S_T)$ 與上升入局式 $I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t > B)H(S_T)$ 兩種報酬型式，其中 $H(S_T)$ 表示期末報酬，通常為一買權 (call) 或賣權 (put)。

(二) 出局式 (knock-out)

當根本資產價格觸及某障礙價格 B ，選擇權會失效；反之則成為基本選擇權。有下降出局式 $I(\min_{0 \leq t \leq T} S_t > B)H(S_T)$ 與上升出局式 $I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t < B)H(S_T)$ 兩種報酬型式。

對生效的障礙選擇權，它的期末報酬函數可以是 call 或 put，所以障礙選擇權的報酬總共有八種可能的型式如下：

1. 下降入局式 (down and in) call
2. 上升入局式 (up and in) call
3. 下降入局式 (down and in) put
4. 上升入局式 (up and in) put
5. 下降出局式 (down and out) call
6. 上升出局式 (up and out) call

7. 下降出局式 (down and out) put 8. 上升出局式 (up and out) put

舉例來說，上升出局式買權 (up and out call) 的報酬為 $I(\max_{0 \leq t \leq T} S_t < B)(S_T - K)^+$ 。

在 Black-Scholes 模型下的定價 PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0$$

而其邊界條件為 $P(t, B) = P(t, 0) = 0, 0 \leq t \leq T$ 且 $P(T, x) = (x - K)^+$ 。其封閉解如下

$$\begin{aligned} P(0, S_0) = & S_0 [N(\delta_1(T-t, S_0/K)) - N(\delta_1(T-t, S_0/B))] \\ & - e^{-rT} K [N(\delta_2(T-t, S_0/K)) - N(\delta_2(T-t, S_0/B))] \\ & + B \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[N\left(\delta_1\left(T-t, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_1\left(T-t, \frac{B}{S_0}\right)\right) \right] \\ & + e^{-rT} K \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[N\left(\delta_2\left(T-t, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_2\left(T-t, \frac{S_0}{K}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \delta_1(\tau, s) = \frac{\ln(s) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \text{ 且 } \delta_2(\tau, s) = \frac{\ln(s) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}。$$

其它報酬形式的障礙選擇權價格，其 PDE 的邊界條件以及封閉解皆可被類似的推導出來。

障礙選擇權的市場價值

障礙選擇權相較於對應的歐式選擇權，它的限制條件較多，所以價格也較低。對一個基金經理人來說，為了保持基金獲利的穩定性，可以買一個 put 作為避險。若該基金中資產價格如他預期不斷的上升的話，買障礙選擇權付出的成本會比較便宜；而若資產價格下跌的話，買障礙選擇權更可以較低的價格達到同樣的避險功能。

範例 7.2 評價障礙選擇權價格

考慮初始價格 $S=50$ ，履約價格 $K=50$ ，距離到期時間 $T=1$ ，股價離散時間長度 $dt=0.004$ ，波動率 0.1 ，無風險利率 $r = 0.01$ 且上升式障礙價格為 52 ，下降式障礙價格為 48 。以下是數值結果（括號中是標準誤差）：

	<i>Simulation Time = 1000</i>	<i>Simulation Time = 10000</i>
<i>Down and InCall</i>	<i>0.6313 (0.0531)</i>	<i>0.5579 (0.0155)</i>
<i>Down and OutCall</i>	<i>1.6978 (0.1004)</i>	<i>1.6538 (0.0316)</i>
<i>Up and In Call</i>	<i>2.3067 (0.1040)</i>	<i>2.1922 (0.0325)</i>
<i>Up and Out Call</i>	<i>0.0224 (0.0053)</i>	<i>0.0195 (0.0014)</i>
<i>Down and in Put</i>	<i>1.5691 (0.0778)</i>	<i>1.7001 (0.0258)</i>
<i>Down and out Put</i>	<i>0.0234 (0.0047)</i>	<i>0.0230 (0.0015)</i>
<i>Up and In Put</i>	<i>0.3647 (0.0337)</i>	<i>0.4935 (0.0134)</i>
<i>Up and Out Put</i>	<i>1.2278 (0.0759)</i>	<i>1.2296 (0.0245)</i>

推廣一、雙重障礙選擇權 (Double Barrier Option)

將原來障礙選擇權的單一障礙推廣至上障礙 (upper barrier U) 與下障礙 (lower barrier L)。例如，雙重出局買權 (Double-knock-out call) 的報酬為

$$I(\min_{0 \leq t \leq T} S_t > L, \max_{0 \leq t \leq T} S_t < U)(S_T - K)^+$$

在 Black-Scholes 模型下的定價 PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0$$

而其邊界條件為 $P(t, L) = P(t, U) = 0, 0 \leq t \leq T$ 且 $P(T, x) = (x - K)^+$

推廣二、巴黎式選擇權 (Parisian Option)

推廣障礙選擇權中的首達時間 (first hitting time)，到資產價格的逗留時間 (sojourn time ; excursion time)，定義資產 S 第一次觸及 B 的時間為 $T_B = \inf\{t > 0 | S_t = B\}$ ，在時間 t 之前資產 S 最後一次觸及 B 的時間為 $g_t^B = \sup\{u \leq t | S_u = B\}$ ，(向下) 逗留時間定義為 $T_B^-(D) = \inf\{t > 0 | (t - g_t^B)I(S_t < B) > D\}$ ，意即資產 S 在時間 g_t^B 與 T_B 之間持續在障礙 B 之下至少旅行了 D 時間之久。向上逗留時間可相對的定義為 $T_B^+(D) = \inf\{t > 0 | (t - g_t^B)I(S_t > B) > D\}$ 。

一個巴黎下降出局式買權 (down and out call) 的報酬定義為 $I(T_B^-(D) > T)(S_T - K)^+$ ，而下降入局式買權則為 $I(T_B^-(D) < T)(S_T - K)^+$ 。其餘六種基本變化可依此類推。顯然的，當 D 為 0 時，巴黎式選擇權即回復為一障礙選擇權。

巴黎選擇權的定價問題較為困難，尚未發現有封閉解；從方程的角度來看，由於缺乏維度縮減 (dimension reduction) 的結果，數值 PDE 的解法顯得相當複雜。目前常用的是利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 來求算巴黎選擇權的價格。利用布朗運動之偏移時間的拉普拉斯轉換存在封閉解，因此在 Black-Scholes 模型下可導出巴黎選擇權在拉普拉斯轉換下的封閉解。亦可見 AVW 的漸進公式，見 Anderluh and Van der Weide (2004)，與使用了控制變異法的蒙地卡羅方法，見 Bernard and Boyle (2011)。

範例 7.3 評價障礙選擇權價格

考慮初始價格 $S=100$ ，履約價格 $K=100$ ，距離到期時間 $T=3$ ，逗留時間 $D=1/12$ 年，股價離散時間長度 $dt=0.004$ ，波動率 0.3，無風險利率 $r=0.04$ ，股利率 0.004，且上升式障礙價格為 52，下降式障礙價格為 48。Parisian Up and In Call 的數值結果是 21.8224 (1.2993)。

7.3 回顧選擇權

投資人可以根據在一段特定期間內，股價的最高價或是最低價來定義報酬的型式，因此稱為回顧選擇權，通常可分為浮動履約價回顧選擇權及固定履約價回顧選擇權。舉例來說，浮動履約回顧買權（Floating Strike Lookback Call Option）的報酬為 $(Y_T - S_T)$ 其中 $Y_t = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$, $0 \leq t \leq T$ 為最大值過程（running maximum process）。在 Black-Scholes 模型下，該回顧選擇權的價格訂為

$$P(t, S_t, Y_t) = E^* \left[e^{-r(T-t)} (Y_T - S_T) | S_t, Y_t \right],$$

其定價 PDE 為

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, x, y) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x, y) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x, y) - rP(t, x, y) = 0$$

而邊界條件為 $P(t, 0, y) = e^{-r(T-t)}y$, $\frac{\partial P}{\partial y}(t, y, y) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq y$ 且 $P(T, x, y) = y - x$, $0 \leq x \leq y$ 。

備註：此 PDE 有兩個變數 x 與 y ，是所謂的二維 PDE，與先前一維度的 Black-Scholes PDE 相較是複雜許多。已有一些維度縮減法（dimension reduction technique）將該定價 PDE 轉換為一維度的問題。

此浮動履約的回顧選擇權有封閉解 $P(t, x, y) = yu\left(t, \frac{x}{y}\right)$, $0 \leq t \leq T$, $0 < x \leq y$,

其中令 $z = x/y$, $0 < z \leq 1$

$$u(t, z) = (1 + \sigma^2/2r)zN(d_1(T-t, z)) + e^{-r(T-t)}N(-d_2(T-t, z)) - (\sigma^2/2r)e^{-r(T-t)}z^{1-2r/\sigma^2}N(-d_2(T-t, z^{-1})) - z.$$

作業 7.1 評價回顧選擇權價格（Floating Strike Call/Put, Fixed Strike Call/Put）。考慮初始價格 $S=65$ ，履約價格 $K=55$ ，距離到期時間 $T=1$ ，股價離散時間長度 $dt=0.004$ ，波動率 0.3 ，無風險利率 $r=0.06$ ，模擬次數為 10000 。

7.4 複合選擇權

就財務理論來說，Black-Scholes (1973) 的經典論文中便提及公司的股價可視為一種複合選擇權的價值。Geske (1979) 推導出第一個買權在買權 (call on call) 之複合選擇權價格的封閉解，後來複合選擇權被發現可以用來逼近美式選擇權的價格，或用來成為一個投資組合的保險 (option on portfolios) 等其它應用。精要的來說，複合選擇權是一種讓投資人得以鎖定「遠期波動率 (forward volatility)」的投資工具，它對一籃子選擇權可提供有效的避險方式。

一個複合選擇權賦予持有人權力，而非義務，去買 (long)，或賣 (short) 標的「選擇權」。為了簡化起見，在此僅考慮歐式的複合選擇權，其到期日為 T_1 ，履約價為 K_1 ，而其標的選擇權的到期日為 T ，履約價為 K 。舉例來說，一個歐式買權在一個歐式買權上的價格定義如下

$$V(t, x) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}(C_{BS}(T, S_T; T_1, K_1) - K)^+ | S_t = x] \quad (7-1)$$

其中最底層真正的標的資產為 S ，假設服從了 Black-Scholes 模型，

$$S_T = S_t \exp\left((r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma\sqrt{T-t}Z\right), Z \sim N(0, 1);$$

標的歐式買權在時間 T ，股價 S_T 時的價格記為 $C_{BS}(T, S_T; T_1, K_1)$ ，它當然滿足了 Black-Scholes 公式 (見第一章的式 (4-9))。定義

$$\begin{aligned} g(z) &= C_{BS}(T, S_T(z); T_1, K_1) - K \\ &= S_T(z)N(d_1(z)) - Ke^{-r(T_1-T)}N(d_2(z)) - K \end{aligned} \quad (7-2)$$

由於 $g(z)$ 對變數 z 而言是嚴格遞增，

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(z)}{\partial z} &= \frac{\partial C_{BS}}{\partial S_T} \frac{\partial S_T(z)}{\partial z} \\ &= N(d_1(z))\sigma\sqrt{T-t}S_{T_1}(z) > 0. \end{aligned}$$

同時也不難觀察到 $g(z) \uparrow \infty$ ，當 $z \uparrow \infty$ ；且 $g(z) \downarrow -K$ 當 $z \downarrow -\infty$ 。因此必然存在一個唯一的 z^* ，使得 $g(z^*) = 0$ 。利用此單調的性質，一個歐式買權在歐式買權上

的價格即為

$$\begin{aligned} V(t, x) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)^+ f_Z(z) dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{z^*}^{\infty} g(z) f_Z(z) dz \end{aligned}$$

其中 $f_Z(z)$ 是標準常態的機率密度函數。將式 (7-2) 代入上面 $V(t, x)$ 中的積分，可展開成為三項的積分式。前兩項會有雙重積分，而第三項甚為容易。由於前兩項的化簡技巧雷同，以下針對第一項的雙重積分進行運算如下。

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{z^*}^{\infty} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-(\zeta - \sigma\sqrt{T-t})^2/2 - \gamma^2/2} d\gamma d\zeta \\ & \quad (\text{令 } y' = \sigma\sqrt{T-t} - \zeta; y'^* = \sigma\sqrt{T-t} - z^*) \\ &= \frac{x}{2\pi} \int_{-\infty}^{y'^*} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(\frac{x}{K_1}) + (\gamma + \frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-T}}} \frac{\sqrt{\frac{T-t}{T_1-T}} y'}{\sqrt{T_1-T}} e^{-(y'^2 + \gamma^2)/2} d\gamma dy' \\ & \quad (\text{令 } \omega = \gamma\sqrt{1-\rho^2} + \rho y', \rho = \sqrt{\frac{T-t}{T_1-T}}) \\ &= x \int_{-\infty}^{y'^*} \int_{-\infty}^{d_1^*} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{\omega^2 - 2\rho\omega y' + y'^2}{2(1-\rho^2)}} d\omega dy' \\ &= x N_2(y'^*, d_1^*, \rho) \end{aligned}$$

在 Black-Scholes 模型下，我們可以推導出一個歐式買權在歐式買權上價格的封閉解如下：

$$\begin{aligned} V(t, x) &= x N_2(y'^*, d_1^*, \rho) - K_1 e^{-r(T_1-t)} N_2(-z^*, d_2^*, \rho) - K e^{-r(T-t)} N(-z^*) \quad (7-3) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} y'^* &= \sigma\sqrt{T-t} - z^*, \quad d_1^* = \frac{\ln(\frac{x}{K_1}) + (\gamma + \frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-T}}, \\ d_2^* &= d_1^* - \sigma\sqrt{T_1-t}, \quad \rho = \sqrt{\frac{T-t}{T_1-T}}, \end{aligned}$$

而 $N_2(\cdot, \cdot, \rho)$ 表示雙變量常態分佈的積分函數當共變異為 ρ 時。

對於定義在式 (7-1) 中的複合選擇權，式 (7-3) 提供了在 Black-Scholes 模型下的封閉解。另外也可以使用 PDE 的解法，不過就必須解兩條遞迴的 PDE 如下：

(1) 先解標的買權 $C_{BS}(t, x)$ 的價格函數

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial x^2} + rx \frac{\partial C_{BS}}{\partial x} - rC_{BS} = 0 \\ C_{BS}(T_1, x) = (x - K_1)^+ \end{cases}$$

可由數值 PDE 方法解出 $C_{BS}(T, x)$ 的函數。

(2) 其次解出複合買權 $V(t, x)$ 的價格函數

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0 \\ V(T, x) = (C_{BS}(T, x) - K)^+ \end{cases}$$

注意到上面方程組(1)與(2)中僅有期末條件不同，主方程式是一模一樣的；另由於 PDE 數值解法的速度很快，以上雙層 PDE 的求解並不會造成任何計算上的問題。

然而對於蒙地卡羅方法來說，複合選擇權的求解則必須用「蒙地卡羅在蒙地卡羅 (Monte Carlo on Monte Carlo)」的方式。也就是說，根據定義 (7-1)

$$V(T, x) \approx \frac{e^{-r(T-t)}}{N} \sum_{i=1}^N (C_{BS}(T, S_T^{(i)}, T_1, K_1) - K)^+$$

是複合選擇權價格的估計式，然而當中的每一個標的買權樣本仍需由另一層蒙地卡羅加以計算：

$$C_{BS}(T, S_T^{(i)}) \approx \frac{e^{-r(T_1-T)}}{M} \sum_{j=1}^M (S_T^{(i,j)} - K_1)^+.$$

由於蒙地卡羅的收斂速度很慢，遠不及在低維度時的數值 PDE 方法，解雙重蒙地卡羅的計算方式應該加以避免。一般來說，任何牽涉到 Monte Carlo on Monte Carlo 的計算問題都是蒙地卡羅法的罩門。使用者應盡量避開這種情形，或者使用其

他技巧取代或互相結合。例如見 Fouque and Han (2005) 對複合選擇權在隨機波動模型下 PDE 的逼近法；或見下一節對美式選擇權的最小平方法的評價方法，這些方法都適當的針對原始蒙地卡羅法進行了取代或改良。

》》》第八節 縮減變異的基本技術：反變異，條件抽樣，布朗橋(Basic Techniques to Reduce Variance: Antithetic Variate, Conditional Sampling, Brownian Bridge)

8.1 反變異

基本觀念在於如何簡單快速的增加樣本數。考慮隨機變數 X 可直接由 $F^{-1}(U)$ 抽樣出來，其中 F 是 X 的累積分配函數，而 U 是實值 $[0,1]$ 均勻分布的隨機變數。若樣本 $X(\omega) = F^{-1}(U(\omega))$ 與 $\tilde{X}(\omega) = F^{-1}(1 - U(\omega))$ 兩者發生的機率相同，也就是機率密度函數存有對稱性，則我們可以透過一次抽樣 $U(\omega)$ ，而得到一組 $(X(\omega), \tilde{X}(\omega))$ 的隨機樣本。注意到這組樣本並非彼此獨立，不過卻是增加樣本數一倍的簡易方法，因此吾人可以期待此反變異數法所形成的估計式最多祇能把變異數降低一半。

舉例來說，若 X 服從 $(0,1)$ 均勻分布，則可取 $\tilde{X} = 1 - X$ 。又或若 X 的機率密度函數是對稱的，例如是服從標準常態分布，則可取 $\tilde{X} = -X$ 。不難由

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{h(X) + h(\tilde{X})}{2}\right) &= \frac{\text{Var}(h(X)) + \text{Cov}(h(X), h(\tilde{X}))}{2} \\ &\leq \frac{\text{Var}(h(X))}{2} \end{aligned}$$

若 $h(X)$ 和 $h(\tilde{X})$ 是負相關，可得到反變異的方法至多可降低一半的變異數。從標準誤差的觀點，這也等意於減少了一半的計算量。若 $h(X)$ 和 $h(\tilde{X})$ 是正相關，則完全沒有使用反變異法的必要了。

Matlab 程式 3-3 將 Matlab 程式 3-1 中的部份程式由下面兩行程式取代，就是使用

了反變異數法

```
randmat=randn(round(nrepl/2),nsteps);
increments=[nudt+sidt*randmat;nudt-sidt*randmat];
%use Antithetic Variate Method
```

作業 8.1 (Pricing European Options by Antithetic Variate Method) 以 Matlab 程式 3-3 重作範例 6.2 中以蒙地卡羅法評價歐式選擇權價格，並比較與基本蒙地卡羅法的變異數縮減程度。

8.2 條件抽樣

基於以下一個簡單的變異數分解

$$\text{Var}(V) = E[\text{Var}(V|X)] + \text{Var}(E[V|X]) \quad (8-1)$$

可以看出條件期望的變異數必然不大於原來的變異數 $\text{Var}(E[V|X]) \leq \text{Var}(V)$ 。在式 (8-1) 中 $E[\text{Var}(V|X)]$ 的意義為「不可(被 X)解釋的」變異數(unexplained variance)而 $\text{Var}(E[V|X])$ 為「可(被 X)解釋的」變異數(explained variance)。然而此方法的缺點在於「蒙地卡羅在蒙地卡羅」(Monte Carlo on Monte Carlo)，也就是二重遞迴式的計算成本較高；並且容易看出不偏估計式為

$$E[E(V|X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M V^{(j)}(X^{(i)})。$$

如何在給定的 V 中挑選適當的 X 呢？這並沒有固定的答案，端賴於 V 的結構。以金融的問題而言，若 V 具有「模型因子」(model factor)，例如 $V = h(X, Y)$ ，其中 X 描述資產價格而 Y 描述無風險利率，則條件於 Y 所形成的不偏估計式 $E[E(h(X, Y)|Y)]$ ；亦即 $E(h(X, Y)) = E[E(h(X, Y)|Y)]$ ，往往會有較佳的變異數縮減的效果。尤其當內層的條件期望 $E(h(X, Y)|Y)$ 有封閉解時，此條件抽樣的計算速度會

大約為1；也就是將原來的二重遞迴簡化為一個遞迴如下所示

$$\begin{aligned} E(h(X, Y)|Y) &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M h(X^{(j)}, Y^{(i)}) \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(h(X|Y^{(i)})) \end{aligned}$$

範例 8.1 (Gaussian factor copula)

在本書第二章第三節中曾介紹高斯關聯模型，並得到第 i 個資產違約事件的刻劃如下，亦可見第二章中式 (3-4)：對 $1 \leq i \leq n$,

$$\{\tau_i = F_i^{-1}(\phi(W_i)) \leq T_i\}$$

其中 $W_i = \rho_i Z_0 + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i$ 且所有的風險因子 Z 都是 iid $N(0, 1)$ 。聯合違約事件的機率可以很容易的計算如下：

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^n I(\tau_i \leq T_i) \right] &= E \left[\prod_{i=1}^n I(W_i = \rho_i Z_0 + \sqrt{1 - \rho_i^2} Z_i \leq c_i := \phi^{-1}(F_i(T_i))) \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n I \left(Z_i \leq \frac{c_i - \rho_i Z_0}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

現在將共同因子 Z_0 條件化，就可以得到條件抽樣的估計式

$$E \left[E \left[\prod_{i=1}^n I \left(Z_i \leq \frac{c_i - \rho_i Z}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right) | Z_0 = z \right] \right]$$

由於 Z 是獨立的常態變量，上式裡面的條件期望可以簡化為

$$\prod_{i=1}^n N\left(\frac{c_i - \rho_i Z_0}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right),$$

而最終聯合違約機率為

$$E\left[\prod_{i=1}^n N\left(\frac{c_i - \rho_i Z_0}{\sqrt{1 - \rho_i^2}}\right)\right]$$

並可得到其估計式，當然也可以用定積分的方式求解。

8.3 布朗橋

從資產價格的幾何布朗運動 (geometric Brownian motion) $S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$ ，可以窺見若要透過這個解模擬一價格路徑，只要能夠解模擬該布朗運動的路徑即可。利用布朗運動的獨立增量性質

$$W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (8-2)$$

Z_i 為 iid 的常態隨機變數。式 (8-2) 中描述了常見的以序列方式建構布朗運動的軌跡。

布朗橋的觀念來自於一多變量常態向量的條件期望，可由附錄一中作業 8.1 推導出來，因而它的建構方式是跳躍的而非循序漸進的。以二元方式建構出的布朗橋摘要如下，

$$W_T = \sqrt{T} Z_1, \quad W_{T/2} = \frac{1}{2} W_T + \frac{1}{2} \sqrt{T} Z_2, \quad W_{T/4} = \frac{1}{2} W_{T/2} + \frac{1}{2} \sqrt{T/2} Z_3, \quad W_{3T/4} = \frac{1}{2} (W_{T/2} + W_T) + \frac{1}{2} \sqrt{T/2} Z_4, \dots, \quad W_{(n-1)T/n} = \frac{1}{2} (W_{(n-2)T/n} + W_T) + \frac{1}{2} \sqrt{T/n} Z_n.$$

這個特點在評價歐式選擇權上非常有用，因為布朗橋的第一步就可以對期末報酬進行抽樣；但對路徑相依的選擇權，當然還是要將整條路徑給模擬出來。傳統（如式 (8-2)）與布朗橋產生布朗運動軌跡的原理如下圖所示：

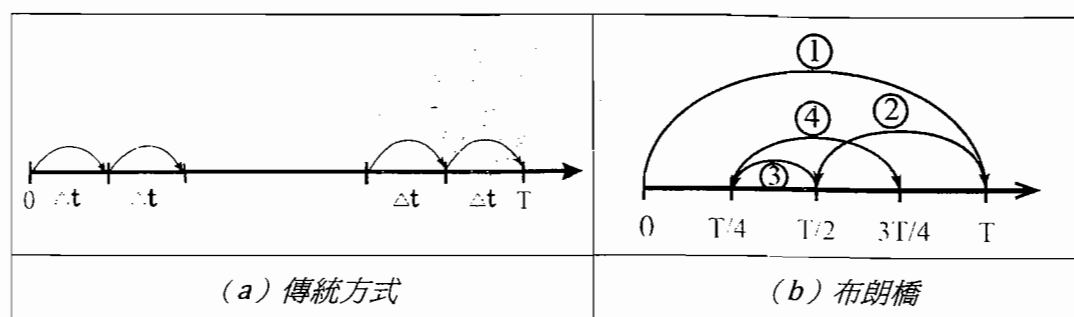


圖8-1 傳統方式與布朗橋對布朗運動抽樣圖示

另外與傳統建構，如式(8-2)所示，的一個不同點乃在於變異數。布朗橋軌跡的變異數依序為 $T, T/4, \dots, T/n$ 而(8-2)中的變異數始終固定為 Δt 。布朗橋的這個特殊性質搭配上擬蒙地卡羅法可能會有非常好的收斂性質。由於這部分的討論要牽涉有效維度(effective dimension)與一些敏感分析，讀者可進一步參考 Sobol'(2001)的相關工作；但擬蒙地卡羅法(quasi Monte Carlo)會在下一章詳述。

Chapter 4

變異數縮減法

本章學習重點

- 第一節 重要抽樣法：違約機率估計與風險管理
- 第二節 控制變異法
- 第三節 快速收斂方法－（亂化）擬蒙地卡羅法
- 第四節 評價美式選擇權：最小平方法與對偶法
- 第五節 敏感度估計
- 第六節 個人化的超級運算：GPU 平行計算

Anyone who considers arithmetical methods of producing random numbers is, of course, in a state of sin..

~ J. von Neumann

蒙地卡羅方法採取了一種機率的做法，它的收斂速度為 $O(N^{-1/2})$ 。這個收斂速度若跟其它的計算方法比起來，例如從二元樹的方法（binomial tree method）或是數值偏微分（numerical PDE）的方法，在低維度時（標的資產個數少時）是相對比較慢的。然而蒙地卡羅方法最大的好處乃是收斂速度並不會跟原來問題當中的維度有關，因此要增進蒙地卡羅的效能，吾人可以專注在如何降低標準誤差 σ/\sqrt{N} 。在給定計算資源的限制條件下，也就是說 N 是固定的，或者是有界的，很重要的任務就是將原來的估計問題做某種轉換，使得新的標準誤差 σ ，在轉換後的問題之下能夠大幅的降低。變異縮減法就是被發展來達到此一目標。

控制變異法（control variate method, MCV）〔包括了反變異（antithetic variate）〕，以及重要抽樣法（importance sampling）〔包括了條件重要抽樣法（conditional importance sampling）〕，都是變異縮減法裡面主要使用的技巧，請見文獻 Glasserman（2003），Jackel（2002），Lemieux（2009）等關於這些方法以及其他縮減方法，例如第三章末提到的方法以及本文未提及的分層抽樣（stratified sampling）、Latin Hypercube Sampling、Moment Matching、Weighted Monte Carlo、Interactive Particle System、Cross-Entropy Method，甚至是以上方法的組合等等。這些技巧都是用來有效的降低變異數。一般來說，變異數縮減法的使用與計算問題的形式有大關係，本章集中在控制變異法、重要抽樣法、以及亂化擬蒙地卡羅法等重要且比較一般的方法，並列舉好些例子供讀者參考，另位也可參考 Korn et al.（2010）在保險精算上的應用。

利用加法的性質，控制變異法倚賴於尋找一個跟原來的隨機變數具有高度相關的另一個隨機變數來當做控制，以降低變異數。越多的相關性，不管是正相關或負相關，都能夠更多的降低變異數。有趣的是，與許多其它變異數縮減法的不同之處在於控制變異法往往具有金融中「避險」的意義。此外相對的，重要抽樣法是利用

乘法的性質，例如說我們可以對一些落在我們有興趣的區域當中的樣本增加權重，而降低其它不重要的樣本的權重，並且保持總權重為 1，也就是機率為 1。這樣的方法就是所謂的重要抽樣法，它能夠對稀有事件的模擬 (rare event simulation) 產生很好的效果。對於稀有事件的樣本，增加更多的權重就能夠有效增加這些樣本出現的次數。因此，在新的機率測度下，稀有事件不再是稀有，它發生的次數大幅增加，而我們也可以期待新估計式的變異數能夠縮小，使得我估計值會更準確。

我們會進一步看看這些變異數縮減方法背後的數學分析，這些分析的技巧通常與擾動理論、擬隨機序列 (quasi random sequences)、大離差理論 (large deviation theory)，等等有關，以有效的了解變異數降低的機制。

第一節 重要抽樣法：違約機率估計與風險管理 (Importance Sampling: Default Probability Estimation and Risk Management)

我們從一個簡單的靜態模型為例，主要的目的是介紹如何使用重要抽樣法來估計定義為 $P_1^c = E\{I(X > c)\}$ 的違約機率，其中 X 是一維度標準常態隨機變數。在財務模型中，這個變數代表一個投資組合或金融機構可能面臨的損失，而常數 $c > 0$ 意味著一個損失的門檻 (loss threshold)，顯而易見地 P_1^c 其實就是一個 (右) 尾端機率；而這個量也具有封閉解 $N(-c)$ ，其中 $N(x)$ 函數是指累積常態積分函數，或是 CDF。使用基本蒙地卡羅方法來估計 P_1^c 其實並不很理想，特別是當損失門檻 c 很大的時候。原因是即使模擬次數非常地多，隨機樣本落在違約區域，也就是 $\{X > c\}$ 中的數目通常會很小 (甚至會是 0)。這種極端情況在模擬上稱之為『稀有事件模擬』 (rare event simulation)，通常發生在違約或損失門檻 c (default threshold, loss threshold) 極大的時候，也就是此尾端機率 (或是違約機率) 極小的時候。在稀有事件下，基本蒙地卡羅方法對小機率的估計通常會產生很大的偏誤。以上所述之尾端機率在財務上的

意義是為了要計算金融資產或機構發生龐大損失的機率，此量對風險管理或金融監理有著重要的意義。

利用重要抽樣法 (importance sampling, IS) 來做為一個變異數縮減的方法，是處理這類稀有事件模擬最重要的方法之一。該方法的基本原理乃是透過「適當的」機率測度轉換 (change of probability measure)，使得原來稀有事件的樣本有更多的機率權重，以有效增加這些樣本出現的次數；因此在新的機率測度下，原本稀有事件不再是稀有，它發生的次數已大幅增加，而且新估計式的變異數能夠顯著的下降。

在重要抽樣法中有兩種方式可以用來估計小機率的數值，包括最佳重要抽樣法 (optimal importance sampling) 和漸近最佳重要抽樣法 (asymptotic optimal importance sampling)，或稱為高效能重要抽樣法 (efficient importance sampling, EIS)。最佳重要抽樣的方式乃是指著利用某一個「完美的」測度轉換，使得估計式的變異數為 0。由於在理論上這個完美的方法需使用到我們想要估計的違約機率，實務上通常會藉由一些近似的方法 (approximation method) 來做為輔助，例如利用第三章第三節的辦法。也就是說在使用這種方法之前，我們必須先對所欲估計的違約機率有一些初步的認識以代入估計式中。相對於這種完全沒有誤差的零變異數方法來說，漸近最佳重要抽樣或高效能重要抽樣的方式並不追逐於絕對的零變異數，而是站在一種漸近的角度使得新的估計式之變異數能夠在某種尺度下收斂到 0。這種高效能重要抽樣法往往是許多應用中非常重要的技術，特別是當我們對於想要估計的問題沒有太多先前知識的狀況下。

1.1 最佳重要抽樣法

這一節介紹最佳重要抽樣的基本概念，目的是能夠建構一個完美的重要抽樣法，使得新估計式的變異數完全為 0。這意味著，由於新的估計式並不存在任何的變異，在這種完美的情況下，蒙地卡羅的模擬次數只需要 1 次，而所得到的抽樣值即為估計問題的真正答案，當然這在實務上是完全不可能的。

最佳抽樣法的推導如下。給定一個隨機變數 X ，它的機率密度函數是 $f(x)$ ，累積分配函數是 $F(x)$ 。假設我們要估計的量為 $p = E\{\psi(X)\}$ ，其中 $\psi(\cdot)$ 是一個可積分函數，則一個完美的機率密度函數 $g^*(\cdot)$ 可以被給定為 $g^*(x) = (\psi(x)f(x))/p$ 。先不論此機率密度函數已包含所欲估計的數值 p ，其完美性不難由以下的三個計算觀察出。

第一， $g^*(x)$ 確實是一個機率密度函數，我們可從一個直接的積分和 p 的定義來檢查得到。

第二，可以計算出新的估計式 $\psi(X)f(X)/g^*(X)$ 在新的機率測度下確實是不偏的。隨機變數 X 在新的測度之下具有一個新的機率密度函數 $g^*(x)$ ，而 $f(X)/g^*(X)$ 這個比例通常被稱為概似比率 (Likelihood Ratio)。透過 $g^*(\cdot)$ 的定義，可以很容易地確定數值 $p = E^*\{\psi(X)f(X)/g^*(X)\}$ 。

第三，我們可以確認此新的估計式之變異數確實為 0。利用變異數的定義

$$\text{Var}^*\{\psi(X)f(X)/g^*(X)\} = E^*\{(\psi(X)f(X)/g^*(X))^2\} - (E^*\{\psi(X)f(X)/g^*(X)\})^2$$

和 $g^*(x)$ 的定義，我們可以看出右邊的第一式等於 $E\{\psi^2(X)f(X)/g^*(X)\}$ ，所以其為 p^2 ，而在右邊的第二式恰好也等於 p^2 。因此，對新的不偏估計式來說，一個完美的零變異數就可以達到。

我們重述這樣的一個估計式，在計算上是完全無法被使用的；因為此方法要求一個關於我們想要估計的量，也就是對 p 的完美事前知識。在實務上我們必須修正此估計式，通常利用一個近似的方法。只要該近似是有效的，則一個很有效的變異數縮減是可以期待的；或者也可利用新估計式變異數縮減的程度來確認某些逼近方法的有效性。

作業 1.1 若 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 且 $\psi(x) = (e^x - K)^+$ ，找出最佳機率密度函數 $g^*(x)$ 。

本小節的結果可以完全的推廣到擴散（或伊藤）過程的情形下，見 Newton

(1994)的一般性結果，或是 Fournie et al. (1997) 與 Fouque et al. (2009) 對隨機波動率模型下的重點抽樣方法。

1.2 高效能重要抽樣法

回顧本節起初，在靜態模型當中所考慮違約機率估計的問題，其中隨機變數只是個一維的標準常態隨機變數。一個很直覺的想法是將此隨機變數的均值從 0 移動到另外一個值稱為 μ ，(一般來說這個 μ 的選擇會非常接近於違約門檻 c)，當機率空間定義在新的機率測度下時，原來的違約事件變得不再是稀有。例如說機率密度函數 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2}$ 通常被選來用來改變機率測度如下

$$P_1^c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(x > c) \frac{e^{-x^2/2}}{e^{-(x-\mu)^2/2}} e^{-(x-\mu)^2/2} = E_{\mu}\{I(x > c)e^{-\mu^2/2}e^{-\mu x}\} \quad (1-1)$$

其中隨機變數 X 仍然服從一個常態分佈，不過在新的機率測度 P_{μ} 下，其均值已經從 0 移動到 μ ，而所伴隨的概似比例為 $e^{-\mu^2/2}e^{-\mu x}$ 。注意到 μ 可以任意給定，由方程式 (1-1) 所定義出來的估計式都會是一個對違約機率不偏的估計式。從變異數縮減的角度來看，我們仍然希望選擇最適的 μ 使得估計式的誤差最小，即二階動差函數能夠最小化。二階動差函數定義為

$$P_2^c(\mu) := E_{\mu}\{I(x > c)e^{\mu^2}e^{-2\mu x}\}. \quad (1-2)$$

當 X 是一個均值为 μ 的常態變量時，此二階動差 $P_2^c(\mu)$ 事實上擁有封閉解為 $e^{\mu^2}(1 - N(c + \mu))$ 。

作業 1.2 計算 $P_2^c(\mu) = e^{\mu^2}(1 - N(c + \mu))$ 。

使 $P_2^c(\mu)$ 極小的最佳 μ^* 是可藉由數值方法解出，但是我們這裡的興趣乃是要找到一個漸近的 μ^* 使得 $P_2^c(\mu)$ 能夠有一個極限值。這樣做的一個優點乃是不再需要解如 $P_2^c(\mu)$ 的非線性函數，往往一個簡單的線性函數就可以有很好變異數縮減的效果，做法如下。首先我們要來回顧一個古典的尾端漸近結果，當 x 很大時，

$$1 - \mathcal{N}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} . \quad (1-3)$$

另外當損失門檻 c 也很大時，透過選擇 $\mu = c$ 和運用方程式(1-3)所述，可直接計算出下列的結果：

$$P_1^c = N(-c) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} e^{-c^2/2}$$

$$P_2^c(c) = e^{c^2}(1 - N(2c)) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}2c} e^{-c^2}$$

注意到當 c 很大的時候 $P_2^c(c) \approx (P_1^c)^2$ ，或者更精確地來說

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c^2} \log P_2^c(c) = 2 \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c^2} \log P_1^c .$$

這個結果意味著當我們適當地將均值從 0 移動到 $\mu = c$ ，而 c 趨近到無限大時，新估計式(1-1)之變異數 $P_2^c(c) - (P_1^c)^2$ 的極限為 0。也就是說我們證明了下列的漸近結果。

引理 1.1：

估計式(1-1)中若取 $\mu = c$ ，變異數會趨近於 0 當門檻 c 趨近於無限大。

這個引理的精神量化了何謂「高效能」重要抽樣法。根據 Bucklew (1990)，高效能重要抽樣法被定義為當重要抽樣法的估計式的變異數會漸近為 0。引理 1.1 就是一個典型的例子，其重要抽樣法可以寫為

$$P_1^c = E_c \left\{ I(X > c) e^{\frac{c^2}{2} - cX} \right\} ,$$

且其估計式是高效能的。因為當損失門檻 c 很大時我們可以得到 $P_2^c(c) \approx (P_1^c)^2$ 的漸近性質，也就是說這個估計式的變異數是漸近為 0。這個理論也可由以下 Matlab 程式 1-1 中得到數值的驗證。

Matlab 程式 1-1

估計違約機率 $P(Y > c), Y \sim N(0,1)$

(1) Basic Monte Carlo Method

```
N=10000; % Sample Size
X=randn(1,N); % Draw N Loss Variates
c=2; % default level
X1=X>c; %Default or No Default
Default Prob=mean(X1) % Sample Mean
var MC=var(X1) % Variance
se MC=sqrt(var MC/N) % Standard Error
```

(2) Efficient Importance Sampling ($\mu = c$)

```
Z=X+c;
mu=c;
Z1=(Z>c).*exp(mu2.*0.5-mu.*Z); % IS Estimator of Def. Prob IS=mean(Z1)
var IS=var(Z1)
se IS=sqrt(var IS/N)
```

表 1.1 展示了以上所提的兩種重要抽樣法用來估計違約機率 $P(X > c)$ ，其中 X 為一維標準常態變量。我們會選擇幾個不同大小強度損失門檻 c ，而兩個重要抽樣法分別為最佳重要抽樣法以及漸近最佳抽樣法。封閉解 $N(-c)$ 被展示在第二欄 (DP) 中，第三、四、五欄則是列出在不同方法下得到的違約機率均值和所對應的標準誤差。Basic MC 是使用基本蒙地卡羅方法， $IS(\mu = c)$ 代表如方程式 (1-1) 所示，是使用 $\mu = c$ 漸近最佳抽樣法，而最後一個欄位 $IS(\mu = \mu^*)$ 所示則是使用最佳抽樣法。同時也將其計算時間列在最後一列中。

表 1.1 比較違約機率值以及計算時間：利用基本蒙地卡羅、公式解、以及兩種重要抽樣法。模擬次數為 10^6 ，標準誤差記錄 SE 欄位中。

c	DP_{true}	$Basic MC$		$IS(\mu = c)$		$IS(\mu = \mu^*)$	
		Mean	SE	Mean	SE	Mean	SE
1	0.1587	0.1566	0.0036	0.1592	0.0019	0.1594	0.0018
2	0.0228	0.0212	0.0014	0.0227	3.49E-04	0.0225	3.37E-04
3	0.0013	1.00E-03	3.16E-04	0.0014	2.53E-05	0.0014	2.51E-05
4	3.17E-05	--	--	3.13E-05	6.62E-07	3.11E-05	6.66E-07
time		0.004659		0.020904		1.060617	

我們觀察到，兩個重要抽樣法在計算中所顯示的標準誤差 (Standard Errors)，它們在精準度上都是同一個尺度，但在時間上則不然。從最後一列當中，可以發現在計算的時間上，最佳重要抽樣法 $IS(\mu = \mu^*)$ 會比漸近最佳抽樣法 $IS(\mu = c)$ 多花了 50 倍的時間。這些數值實驗結果皆是在 Matlab 計算環境下，程式可見於 Matlab 程式 1.1 中。表 1.1 的數值結果經由所使用的硬體設備為 2.40GHz Intel Duo CPU T8300。

作業 1.3 (結構式模型下的違約機率估計) 在第二章範例 2.1 中，我們求得了違約機率。請根據以上重要抽樣法的討論，發展對違約機率估計的漸近最佳重要抽樣法，並請證明以及數值驗證。

1.3 指數扭曲機率的重要抽樣法：拉普拉斯方法

對於估計 $P_1^c = E\{I(X > c)\}$ 存在著建構重要抽樣法的一般程序。假設隨機變數 X 的密度函數 $f(x) > 0$ 是已知的，那麼我們就可以改變測度如下：

$$E\{I(X > c)\} = E_{\mu} \left\{ I(X > c) \frac{f(X)}{f_{\mu}(X)} \right\}$$

使得 X 的新機率測度 $f_\mu(x) > 0$ 存在一個新的機率測度 P_μ 之中。指數族分佈 (exponential family of distributions) 選擇了一類的指數測度轉換 (exponential change of measure)

$$f_\mu(x) = \frac{\exp(\mu x) f(x)}{M(\mu)},$$

$M(\mu) = E[\exp(\mu X)]$ 是 X 的動差函數。此轉換也稱作指數調整 (exponential tilting) 或是指數扭曲 (exponential twisting)，轉換中的 μ 稱作扭曲參數 (twisting parameter)。將這樣 $f_\mu(x)$ 的選擇替換到二次動差當中，我們就可以得到如下的結果：

$$\begin{aligned} P_2^c(\mu) &:= E_\mu \left\{ I(X > c) \frac{f^2(X)}{f_\mu^2(X)} \right\} \\ &= E \left\{ I(X > c) \frac{f(X)}{f_\mu(X)} \right\} \\ &= M(\mu) E \{ I(X > c) \exp(-\mu X) \} \\ &\leq M(\mu) E \{ I(X > c) \exp(-\mu c) \} \\ &\leq M(\mu) \exp(-\mu c) \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中，參數 μ, c 都是正數使得上式中的不等式成立。要如何解出 $P_2^c(\mu)$ 的極小值並不容易，一般的解決方式是考慮它的上界，如上式中的最後乘積項 $M(\mu) \exp(-\mu c)$ 。為了使其對數值的最小值存在，它的一次條件 (first order condition) 如下：

$$\frac{d \ln (M(\mu) \exp(-\mu c))}{d\mu} = \frac{M'(\mu)}{M(\mu)} - c = 0$$

假若 μ^* 是 $\frac{M'(\mu)}{M(\mu)} = c$ 的解，那我們就可以得出隨機變數 X 在新的測度 P_{μ^*} 之下的期望值會恰好會等於損失門檻 c 。這個事實可以由下式看出：

$$E_{\mu^*}(X) = \int x f_{\mu^*}(x) dx = \int \frac{x \exp(\mu^* x) f(x)}{M(\mu^*)} dx = \frac{M'(\mu^*)}{M(\mu^*)} = c。$$

從模擬的結果可以得知，在這樣的測度轉換之下確實會產生很好的數值結果，這是由於在原來測度下稀有的違約事件會變得不再稀有。不過當然在計算違約機率的時候，新的測度會賦予稀有事件一些權重。

以一個明確的例子來說，如果 X 是一個標準常態隨機變量，可以導出

$$c = \frac{M'(\mu^*)}{M(\mu^*)} = \frac{\mu^* \exp\left(\frac{\mu^{*2}}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\mu^{*2}}{2}\right)} = \mu^*。$$

這也就是，扭曲參數 μ^* 會恰等於 c ，而隨機變數 X 在此測度轉換下的扭曲的密度函數是 $f_{\mu^*}(x) = \frac{\exp(\mu^* x) f(x)}{M(\mu^*)} = \frac{\exp(-(x-c)^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$ 。這個結果事實上與之前引理 1.1 當中，我們所證明出 $\mu = c$ 的漸進分析是一致的。

已經有非常廣泛的研究以及應用在使用這種扭曲機率的方法，它已形成一種重要抽樣的估計方式。不過要確定這樣的估計式是否為高效能，則需要更進一步的變異數分析 (variance analysis)。在高維度的情形下，見 Glasserman et al. (2000, 2002)，Han and Wu (2012) 分別在大型投資組合 (large portfolio) 的風險值估計，與高維度多變量常態以及學生 t 分佈在信用風險中的應用。注意到扭曲機率的方法需要用到動差函數，在一些情形下是難以滿足的，例如在學生 t 分佈下，這時要使用一些轉換的技巧。以下我們提出重要抽樣法中經常使用的分析工具—大離差理論，並用它證明引理 1.1 的結果。

1.4 大離差理論的漸進分析

在前一個引理當中，由重要抽樣法所導致的變異數已經被證明是漸進最佳的，該證明是透過尾端逼近的結果。事實上，這個理論的結果也可以由下面在機率論中著名的 Cramer's 定理得到。Cramer's 定理是大離差理論當中的第一個重要的結果，節錄如下：

定理 1.1 : (Cramer's Theorem) 令 $\{X_i\}$ 為實值 i.i.d. 的隨機變量在機率測度 P 之下且 $EX_1 < \infty$, 對於任何一個 $x \geq EX_1$, 可以得到 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P \left(\frac{S_n}{n} \geq x \right) = - \inf_{y \geq x} \Gamma^*(y) \quad (1-5)$$

其中 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 意指樣本的和 , 大小為 n , $\Gamma(\theta) = \ln E\{e^{\theta X_1}\}$ 意指累積量生成函數 (cumulant generating function) , $\Gamma^*(\theta) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [\theta x - \Gamma(\theta)]$, 稱為 Fenchel-Legendre 轉換 (Fenchel-Legendre transform) 。

由這個定理 , 我們要推導出一些漸進分析的結果 , 是與前面的引理中所得到的結果一致 , 這個結果成為我們使用大離差定理在分析重要抽樣法的第一個例子。

引理 1.2 :

假設 $X \sim N(0,1)$ 當 $1 \ll c$, 則 $P_1^c = E\{I(X \geq c)\} \approx \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right)$ 且 $P_2^c \approx \exp(-c^2)$ 。

證明 :

從 Cramer's 定理及動差函數 $E\{\exp(\theta X)\} = \exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$, 我們可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq x \right) = -\frac{x^2}{2} , \text{ 或者等義的來說 ,}$$

$$P \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \geq x \right) \approx \exp \left(-n \frac{x^2}{2} \right) ,$$

注意到 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 違約機率 $P(X \geq c := \sqrt{nx})$ 等於 $P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{nx}\right)$, 其中每一個隨機變量 X_i 服從了跟 X 一樣的隨機分布。由此 Cramer 定理可得 $P(X \geq c) \approx \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right)$, $1 \ll c$ 。透過 $\mu = c$ 這個選擇 , 漸進的結果 $P_2^c \approx \exp(-c^2)$ 也可以由類似的方式做測度轉換推導出來。 ■

1.5 應用一：風險管理—險值與條件風險值的計算

風險值 (Value at Risk, VaR) 在實務上常常被用來衡量金融商品或金融機構的市場曝險值 (market risk exposure)。VaR 使得風險控管人員 (risk controller) 可以做以下的敘述：有 $(100 \times \alpha)\%$ 的信心水準，資產市值不會低於 VaR_α 。這個訊息對公司最高階的管理人員以及政府的監理單位具有重要的意義。譬如說，巴塞爾協議 (BASEL II) 要求銀行計算 10 天 99% VaR ($VaR_{0.99}$) 並以此的倍數來要求銀行的現金資本水位，這個倍數通常介於是 3 到 6，與銀行優劣與風控能力有關，見 Jorion (2007) 與 Hull (2010)。

具有信心水準 $(100 \times \alpha)\%$ 的風險值 $VaR_\alpha > 0$ 乃定義為滿足下列方程式

$$P(X \geq VaR_\alpha) = 1 - \alpha, 0 < \alpha < 1.$$

換句話說，風險管理者具有 $(100 \times \alpha)\%$ 的信心，資產的損失 X 不會超過所計算出的 VaR_α 。若以 S 表示為資產價格，在 T 期間當中資產的損失為 $X = S_0 - S_T$ ，而報酬率 $r_T = (S_T - S_0)/S_0$ 會滿足

$$P(r_T \geq -VaR_\alpha/S_0) = 1 - \alpha.$$

範例 1.1

在常態的假設之下，若 $r_T \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 T)$ ，則 $VaR_\alpha = -S_0 \sigma \sqrt{T} Z_\alpha$ 。

備註：這個範例解釋了為何在實務上常常先計算一天的 VaR_α 然後乘上 \sqrt{N} 當成 N 天 VaR_α 的逼近。

作業 1.3 利用第三章圖 4-2 的結果估計臺指風險值 10 天 99% VaR。

從統計的角度來說，VaR 只不過是損失分配的一個百分位數(percentile)。嚴謹的說，給定任何一個信賴水準 α ($0 < \alpha < 1$)，估計 VaR 其實就是把損失門檻 c_α 從違約機率 $P(X \geq c_\alpha) = 1 - \alpha$ 這個方程式中解出，其中 X 是一個隨機變數用來描述資產

可能發生的損失。因此 VaR 的估計常常可視為違約機率估計的反問題。Press et al. (1992) 書中所展示的很多數值結果，例如非線性代數方程式的解法，皆可用來解決剛剛所提到的反函數之計算。

在金融上， VaR_α 描述了資產可能惡化的程度。然而，有理論上的反例指出使用 VaR 來作為風險的度量會違背金融上「分散風險原則 (diversification principle)」，下面列舉幾個範例。另外，本節中所介紹的風險測度都屬靜態，而非動態的，最近有一些文獻致力於改善這些缺陷，本文就不加詳述，請見 Follmer and Schied (2004)。

範例 1.2

若隨機變數 X 與 Y 服從雙變量常態分布，則可證明 VaR 會服從分散風險原則；也就是 $VaR_\alpha(X + Y) \leq VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$ 。

證明：

利用 $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$ 。

範例 1.3

考慮一投資組合中的線性模型，使得總價值 P 的改變是由個別資產價值 X_i 改變的線性組合如下：

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta X_i$$

若 $\Delta X_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ 且 ΔX_i 與 ΔX_j 的相關係數是 ρ_{ij} ，則

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j$$

由此公式可以算出一天 99%VaR 為 $2.33\sigma_p$ ，而 N 天 99%VaR 為 $2.33\sigma_p\sqrt{N}$ 。

備註：當投資組合總價值的變動並非是由個別資產價值變動的線性組合時，例如資產池中具有選擇權等，則須考慮高次的非線性效應，或者使用歷史模擬法去產生個別資產變動的情境。

然而從下例中可看出，風險值並不總是服從風險分散的準則。

範例 1.4

若隨機變數 X 與 Y 獨立且一致的服從下面離散分布：
 $X = 0.07, \omega \in [-2, -1), X = 0.03, \omega \in [-1, 0), X = 0.9, \omega \in [0, 1]$ 。則 $\text{VaR}_{0.9}(X + Y) \neq \text{VaR}_{0.9}(X) + \text{VaR}_{0.9}(Y)$

證明：

$\text{VaR}_{0.9}(X) = 0$ 但 $\text{VaR}_{0.9}(X + Y) = 0.163$ 。

Artzner et al. (1999) 提供了一些準則使得一個好的風險測度能夠滿足，通稱為風險測度公理。風險度量 (risk measure) ρ 可將隨機變數集合 L 映射至 $R \cup \infty$ 上，它滿足：

- (1) (normalization) $\rho(0) = 0$ [無資產則無風險]
- (2) (translation invariance) 對 $c \in R, X \in L, \rho(X + c) = \rho(X) - c$ [若資產 X 的價值增加，則承擔較小的風險]
- (3) (monotonicity) 若 $X_1, X_2 \in L$ 且 $X_1 \leq X_2$ ，則 $\rho(X_1) \geq \rho(X_2)$ [資產 X_2 若比資產 X_1 的價值高，則承擔較小的風險]

VaR 是一個風險度量，但它不是下面所定義的一致性風險度量，除非資產服從常態分佈。

一致性風險度量 (coherent risk measure) 比起風險度量要增加以下兩個條件：

- (1) (sub-additivity) 若 $X_1, X_2 \in L$, $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ [分散投資可降低風險]
- (2) (positive homogeneity) 若 $c \geq 0$, $\rho(cX) = c\rho(X)$ [資產與風險的增加比例相同]

關於風險度量的一般討論可見 Follmer and Schied (2004)。Artzner et al. (1999) 提出一個一致性風險測度，稱為條件風險值 (Conditional Value at Risk, C-VaR)，或稱為預期短缺 (Expected Shortfall)。C-VaR 被定義成為一個條件期望 $E\{X|X > c\}$ ，其中 $c = VaR_\alpha$ 滿足了 $P(X \geq VaR_\alpha) = \alpha$ 。從金融上的意義來說，C-VaR 描述了當資產惡化時，它的平均惡化程度。當 X 是常態分配時， $E\{X|X > c\}$ 具有一個封閉解 $\frac{e^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi N}(-c)}$ 。用來估計 C-VaR 的基本蒙地卡羅算法如下：

$$n_c = \sum_{i=1}^N I(X^{(i)} > c), \quad (N \text{ 是模擬的次數})$$

$$E\{X|X > c\} \approx \frac{1}{n_c} \sum_{i=1}^{n_c} X^{(i)}, \quad \text{對於 } X^{(i)} > c \quad (1-6)$$

我們現在引入一個比較一般的重要抽樣法，藉著考慮某一個概似函數 $Q = \frac{dP}{d\tilde{P}}$ ，一個新的機率測度 \tilde{P} 就能夠被定義，接著我們就能夠得到

$$\begin{aligned} E\{X|X > c\} &= \frac{E\{XI(X > c)\}}{P(X > c)} \\ &= \frac{\tilde{E}\{XI(X > c)Q\}}{\tilde{E}\{I(X > c)Q\}} \\ &\approx \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)} I(X^{(i)} > c) Q(X^{(i)})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X^{(i)} > c) Q(X^{(i)})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n_c} X^{(i)} Q(X^{(i)})}{\sum_{i=1}^{n_c} Q(X^{(i)})} \\ &= \sum_{i=1}^{n_c} X^{(i)} q^{(i)}, \quad \text{對於 } X^{(i)} > c \end{aligned}$$

其中 $q_i = Q(X^{(i)}) / \sum_{i=1}^{n_c} Q(X^{(i)})$ 。注意到在此重要抽樣法之下，C-VaR 的值就能夠由一些隨機變數 $X^{(i)}, i = 1, \dots, n_c$ 的樣本平均去逼近，但是對不同的樣本 $X^{(i)}$ 會有不同的權重 q_i 。這個性質與之前所提到的基本蒙地卡羅法，如方程式 (1-6) 中所使用的等量權重 $\frac{1}{n_c}$ ，是非常不同的。同時我們也提供在非等同權重估計式的標準誤差之計算如下：

$$s.e. \approx \frac{\sum_{i=1}^{n_c} (X^{(i)} - \hat{m})^2 q_i}{\sqrt{n_c}}$$

對於每一個 $X^{(i)} > c$ ，其中 \hat{m} 意味著樣本平均。在以下的表 1.2 中，我們比較從基本蒙地卡羅、公式解、和使用 $\mu = c$ 重要抽樣法的數值結果。

表 1.2 比較 C-VaR 值：利用基本蒙地卡羅、公式解、重要抽樣法 ($\mu = c$)。模擬次數為 10^6 ，標準誤差記錄在括號中。

c	基本蒙地卡羅	公式解	重要抽樣法 ($\mu = c$)
3	3.285 (0.0071)	3.283	3.286 (0.0047)
4	4.222 (0.0328)	4.226	4.229 (0.0076)
5	- (-)	5.187	5.178 (0.0109)

我們可以看到重要抽樣法的有效性，特別是當稀有事件發生的時後，例如 $c \geq 4$ ，基本蒙地卡羅甚至無法計算出答案。

第二節 控制變異法(Control Variate Method)

控制變異法在蒙地卡羅模擬法當中是一種被廣泛使用並且有效的方法。基本原理是引入一個控制變數來解釋原來的隨機變數，使得新的估計式的變異數可以有效的減少，如此蒙地卡羅方法的精準度就可以大幅提高。另這個計算方法也具有金融上避險的意義；也就是說，控制變數是對應於避險策略的使用。這個獨特的性質使得控制變異法在使用上可以連結到避險投資組合中非常豐富的內涵，特別是在不完

備市場下的避險策略之建構與測試。

這個方法在應用上最有名的例子，乃是評價算術平均（arithmetic average）的亞式選擇權。Kemna and Vorst（1990）利用一個對應的幾何平均（geometric average）的亞式選擇權來當成控制變數，以建構控制變異法。由於算數平均與幾何平均的關係數一般來說很高，而幾何平均的亞式選擇權又有如同歐式選擇權具有封閉解，因此控制變異法在評價亞式選擇權上顯示出很好的數值結果。在這個成功的例子之後，控制變異法在金融計算上的應用就普遍起來了。

控制變異法建構的準則在於兩個方面：

- 第一、選擇權的報酬與控制變數必須是高度相關，無論是正相關或負相關。
- 第二、該相關的控制變數的期望值必須具有封閉解。

備註：當然還可以搭配其他複雜的變異數縮減的技術，例如分層抽樣（Stratified Sampling）或者利用布朗橋（Brownian Bridge）等技術來結合控制變異法以取得更進一步的變異數縮減。見文獻Glasserman（2003）以及參考文獻，會有更多的討論。

然而當比較複雜的評價問題，例如美式選擇權或者是在隨機波動模型下，這些控制變異的準則往往不容易達到。稍後我們會談到一個比較一般的做法，稱作平賭控制變異法，來選擇控制變異。

控制變異法的一般推論如下：若我們考慮計算一個期望值 $E\{X\}$ ，而變數 X 是一維度的可積分隨機變數，控制變異的基本想法是去尋找這個隨機變數 X 所對應的（counterpart）隨機向量，稱做 Y 。這個隨機變數有一個假設是它的期望值必須是 0，而且通常我們也會選擇一個控制參數向量 λ ，使得『控制變異』 $X + \lambda^T Y$ 為不偏的（unbiased），也就是說 $E\{X\} = E\{X + \lambda^T Y\}$ 。另外別忘了變異縮減的目的要使得 $Var\{X\} \geq Var\{X + \lambda^T Y\}$ 。關於最佳控制參數向量 λ 的選擇，可透過最小化控制變異的變異數 $Var(X + \lambda^T Y)$ 。從解關於 λ 的二次式代數方程式，可得到最佳的控制參數向量

$$\lambda^* = -\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{XY} \quad (2-1)$$

其中 Σ_{XY} 是隨機變數 X 與 Y 的共變異 (covariance)。經過一個直接的計算，我們不難發現，使用最佳控制 λ^* 在給定控制 Y 的情況下，

$$\text{Var}\{X + \lambda^{*T}Y\} = (1 - R^2)\text{Var}\{X\} \leq \text{Var}\{X\}, \quad (2-2)$$

其中 $R^2 = \frac{\Sigma_{XY}^T \Sigma_{YY}^{-1} \Sigma_{XY}}{\Sigma_{XX}}$ 在迴歸分析中稱作決定係數 (coefficient of determination)。

在統計的線性迴歸裏， $R^2 (\leq 1)$ 被用來衡量以解釋變數 Y 來說明 X 的解釋力，愈大愈好。在單一個控制之下，也就是 $Y \in \Re$ 是一維的例子中，我們可以得到 $R = \rho$ ，也就是 X 跟 Y 的相關係數。當隨機變數 X 與 Y 是高度相關的時候，不管是正或是負， R^2 就會非常接近 1，而從方程式 (2-2) 中不難看出一個可觀的變異數縮減是可以期待的。

由於計算最佳控制參數 λ^* ，會需要用到期望值 $E\{X\}$ ，因此實務上我們通常會把這個 λ^* 的計算用一些逼近的方法來做處理。引理 2.1 是一個關於 λ^* 的敏感度分析 (sensitivity analysis)，也就是說在實務上當我們沒辦法精確的估計出 λ^* 時，我們會使用一個逼近，叫做 λ^ε ，當 λ^ε 與 λ^* 之間發生某種誤差時，我們想知道這樣的誤差會如何影響變異數縮減的效果。

引理 2.1：

給定常數 ε 以及一等義向量 (identity vector) $I = (1, \dots, 1)^T \in \Re^d$ 使得最佳的控制參數向量 (optimal control parameter) λ^* 受到了 ε 大小擾動而成為次佳的 (suboptimal) 控制參數向量 $\lambda^\varepsilon = \lambda^* + \varepsilon I$ ，則次佳的控制變異所額外增加變異數的尺度是 ε^2 ：

$$\text{Var}\{X + \lambda^{\varepsilon T}Y\} - (1 - R^2)\text{Var}\{X\} = \varepsilon^2 \text{Var}\{I^T Y\}。$$

證明：

直接計算

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}\{X + (\lambda^* + \varepsilon I)^T Y\} \\
 &= \text{Var}\{X + \lambda^{*T} Y\} + \varepsilon^2 \text{Var}\{I^T Y\} \\
 &= (1 - R^2) \text{Var}\{X\} + \varepsilon^2 \text{Var}\{I^T Y\}
 \end{aligned}$$

其中用到了定義 (2-1), $\text{Cov}(X + \lambda^{*T} Y, I^T Y)$, 以及式 (2-2) 中的結果。 ■

從上面的理論分析中，我們可以觀察的出來，若控制參數在使用上有一些小誤差，那麼我們所能夠得到的縮減變異數與最佳的縮減變異數之間的誤差也會是很小的。意思就是說一個逼近的控制參數，在實務的計算上是可能被接受的。

2.1 應用二：亞式選擇權評價

回顧從選擇權報酬的形式來說，歐式選擇權的 $h(S_T)$ 僅與資產 S 在到期日 T 的價格有關，與 S 所經過的路徑無關，因此具有「路徑獨立」(Path Independent) 的性質。相對來說，「路徑相依」(Path Dependent) 的報酬形式如 $h(S_{0 \leq t \leq T})$ ；也就是報酬與資產 S 從選擇權契約的起始日至到期日中間的價格有關。顯然對這類路徑相依選擇權的評價有較高的困難度。在金融實務上，對這類選擇權進行避險也比較複雜。

亞式選擇權是一種路徑相依的選擇權，但是它的報酬形式看來比較單純，基本上是將路徑中的價格做某種算術平均 (arithmetic average)。例如一固定履約價的亞式買權報酬為 $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right)^+$ ，若可浮動的履約價為 S_T 則該亞式買權報酬為 $\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - S_T\right)^+$ 。其它可能的報酬如亞式賣權 (固定或浮動的履約價) 或美式亞式選擇權等，則不在此討論的範圍。

令人訝異的是，亞式選擇權價格的封閉解至今尚未完全被發現，見 Matsumoto and Yor (2005)，它背後牽涉到一個複雜的數學問題，即是關於對指數布朗運動

(geometric Brownian motion) 積分之機率密度函數的解。雖然這個數學問題相當困難，不過以蒙地卡羅模擬法去計算亞式選擇權的價格卻十分容易，特別是以控制變異法來估計該價格非常的有效，見 Kemna and Vorst (1990)，這個事實使得蒙地卡羅法在計算金融 (computational finance) 佔有一席之地。此外進一步推升蒙地卡羅法至重要的地位則首推對美式選擇權 (一種最佳停止問題) 的最小平方法 (least squares method)，我們會在本章第四節中介紹 Longstaff and Schwartz (2001) 的計算方法。

對評價亞式買權 (固定履約價)，古典控制變異法很巧妙的引入其相對應的「幾何平均」(geometric average) 的報酬來建構控制變數。令 $PA = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right)^+$ 為算術平均的亞式買權報酬， $PG = \left(\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right) - K\right)^+$ 為相對應幾何平均的亞式買權報酬。由於控制的均值須為 0，因此控制被定義為 $e^{-rT}PG - \mu_{PG}$ ，其中 $\mu_{PG} = E[e^{-rT}PG]$ 。在 Black-Scholes 模型下， μ_{PG} 具有以下的封閉解：

$$S_0 e^{-(r-\sigma^2/6)T/2} \mathcal{N}\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/6)T/2}{\sigma\sqrt{T/3}}\right) - e^{-rT} K \mathcal{N}\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T/2}{\sigma\sqrt{T/3}}\right),$$

證明則留為以下作業。

作業 2.1 (1) 在 Black-Scholes 模型下，證明 $\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt$ 的機率分佈為

$$\mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2}, \frac{\sigma^2 T}{3}\right).$$

(2) 證明上述 μ_{PG} 的封閉解。

對亞式選擇權的控制變異數定義如下：

$$CV := e^{-rT}PA - \lambda(e^{-rT}PG - \mu_{PG})$$

其中控制參數 λ 的選擇一般來說接近於一。那麼我們所關心變異縮減（variance reduction）的情形為何呢？是否真的 $Var(CV) \ll Var(e^{-rT}PA)$ ？（符號 \ll 表示遠小於）由下面的數值結果可看出此方法相當有效的結果。

範例 2.1

給定不同的波動率 σ ， $r=6\%$ ， $t=0$ ， $T=1$ ， $K=55$ ， $S_0 = 65$ ，離散時間長度 $\Delta_t = 0.05$ ，而總樣本數為 10,000，觀察以控制變異法評價亞式選擇權所獲得變異數降低的效果。再最後一欄中，VRR 代表 variance reduction ratio 變異數縮減比例，是將標準誤差（SE）相除後取平方，通常用來表示變異數縮減法的效能。

σ	<i>Basic Monte Carlo Method</i>		<i>Control Variate Method</i>		<i>VRR</i>
	<i>Sample Mean</i>	<i>SE</i>	<i>Sample Mean</i>	<i>SE</i>	
0.1	11.3352	0.0369	11.2921	0.0005	5,025
0.2	11.4533	0.0711	11.4012	0.0018	1,533
0.3	11.9441	0.1045	11.8954	0.0038	731
0.4	12.6214	0.1328	12.6825	0.0066	410
0.5	13.5663	0.1688	13.6236	0.0117	207
0.6	14.6443	0.1981	14.6677	0.016557	143
0.7	15.4737	0.2329	15.7918	0.02379	96

範例 2.2

給定不同的到期日 T ， $\sigma = 0.1$ ， $r=6\%$ ， $t=0$ ， $T=1$ ， $K=55$ ， $S_0 = 65$ ，離散時間長度 $\Delta_t = 0.05$ ，而總樣本數為 10,000，觀察以控制變異法評價亞式選擇權所獲得變異數降低的效果。

T	Basic Monte Carlo Method		Control Variate Method		VRR
	Sample Mean	SE	Sample Mean	SE	
0.1	10.1214	0.0117	10.13407	0.00005	59,160
0.5	10.6843	0.0263	10.6612	0.0002	11,482
1	11.2816	0.0369	11.2923	0.0005	4,872
1.5	11.9094	0.0443	11.8964	0.0008	2,940
2	12.4473	0.051	12.4735	0.0011	2,011
2.5	13.0687	0.0556	13.0246	0.0014	1,513

以上的數值結果由下面的 Matlab 程式 2-1 執行而得。

Matlab 程式 2-1 控制變異法估計亞式選擇權

```

Clear all; clc;
NSteps=250;Nrep1=10000;
T=1;r=0.06;sigma=0.1;S0=65;K=65;

dt=T/NSteps;
nudt=(r-0.5*sigma^2)*dt;
sqdt=sqrt(dt);
sidt=sigma*sqdt;
TM=(NSteps:-1:1)*dt;
t=(0:1:NSteps-1)*dt;
R=(r-sigma^2/2).*TM.^2./(2*T)+sigma^2.*TM.^3./(6*T^2)-r*TM;

d1=(T*log(S0/K)+(r-sigma^2/2)*T^2/2+sigma^2*T^3/3*T)/(sigma*sqrt(T^3/3));
d2=d1-sigma*sqrt(T^3/(3*T^2));
GAO_Price=exp(log(S0)+R(1))*normcdf(d1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2) %BS

```

analytic solution for a geometric average Asian option

```

RandMat=randn(Nrep1,NSteps);
Increments=nudt+sidt*RandMat;
LogPaths=cumsum([log(S0)*ones(Nrep1,1),Increments],2);
SPaths=exp(LogPaths);

LL=zeros(Nrep1,NSteps);
for i=1:NSteps
    LL(:,i)=mean(LogPaths(:,i:i+1),2);
end
L=cumsum([zeros(Nrep1,1),LL],2)*dt;
II=zeros(Nrep1,NSteps);
for i=1:NSteps
    II(:,i)=mean(SPaths(:,i:i+1),2);
end
I=cumsum([zeros(Nrep1,1),II],2)*dt;

A=I(:,NSteps+1)./T; %arithmetic average
G=exp(L(:,NSteps+1)./T); %geometric average
CashFlows1=exp(-r*T).*max(0,A-K);
AAO=normfit(CashFlows1); %sample mean of AAO
SE=std(CashFlows1)/sqrt(Nrep1); %sample SE of AAO

CashFlows2=exp(-r*T).*max(0,G-K);
Cov=cov(CashFlows1,CashFlows2);
lamda=Cov(1,2)/VAR(CashFlows2);

```

```

CashFlows=CashFlows1-lamda*(CashFlows2-GAO_Price);
AAO_CV=normfit(CashFlows); %sample mean of AAO with CV
SE_CV=std(CashFlows)/sqrt(Nrep1); %sample SE of AAO with CV

```

從 CV 方法廣為應用以來就不斷有新的改良工作。例如 Curran (1994) 考慮在離散時間下，結合了控制變異法與條件抽樣法以建構新的不偏估計式。Han and Lai (2010) 推廣了傳統的控制變異法至平賭控制變異法等。後續相關的工作留待有興趣的讀者進一步自行參考。

以後我們會推廣這個傳統的控制變異法在複雜的模型或評價問題上，使其具有相當的一般性，同時也兼具了金融上動態避險的意涵。

2.2 平賭控制變異法

為了改善基本 Monte Carlo 法的精準度，我們引進了 Fouque and Han (2007) 提出的平賭控制變異數法，此類方法之最大優點是幾乎適用於各類選擇權商品契約，並以建構方式選擇控制變數，使選擇權價格之不偏估計量的變異數得以減少。下面以一個歐式選擇權來說明 Martingale 控制變數法。

在 Black-Scholes 模型下且風險中立的機率空間是 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P^*)$ ，歐式選擇權的價格可以表示為

$$P(t, S_t) = E^*[e^{-r(T-t)} H(S_T) | \mathcal{F}_t]。$$

因著標的物資產價格 S_t 服從幾何布朗運動

$$S_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*，$$

存在一個避險的投資組合可以完美的複製其折現後選擇權報酬，使得，以 $t = 0$ 為例，

$$P(0, S_0) + M(P; T) = e^{-rT} H(S_T)， \quad (2-3)$$

其中

$$M(P; T) = \int_0^T e^{-rs} \frac{\partial P}{\partial x}(s, x = S_s) \sigma S_s dW_s^* . \quad (2-4)$$

更甚者，若波動率服從一個隨機過程（即在不完全市場（incomplete market）的假設下），第（2-4）式則可改寫為

$$M(P; T) = \int_0^T e^{-rs} \frac{\partial P_s}{\partial x} \sigma_s S_s dW_s^* , \quad (2-5)$$

其中 P_s 表示在 s 時的選擇權價格， $\partial P_s / \partial x$ 表示 Delta。注意到式（2-4）中的常數波動率 σ 在式（2-5）中已改為隨機波動率 σ_s ，這意味著當波動率會隨著時間而變動時，避險投資組合（hedging portfolio）在建構時亦要隨著波動率而變動。並且第（2-3）式不再成立，但由於 martingale 的性質，仍可得到

$$P_0 = E[e^{-rT} H(S_T) - M(P; T)] .$$

因此，Monte Carlo 估計歐式選擇權價格 P_0 可被建構為

$$P_0 \approx S_{N-3} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[e^{-rT} H(S_T^{(i)}) - M^{(i)}(P_{BS}; T) \right] ,$$

該 P_{BS} 乃是一 Black-Scholes 歐式選擇權價格。藉著引入 martingale 控制變數法，可以有效地增進基本 Monte Carlo 法估計的精準度，不過它的使用可能會增加一些計算時間。見 Fouque and Han（2007, 2008）對此控制變異 $e^{-rT} H(S_T^{(i)}) - M^{(i)}(P_{BS}; T)$ 之變異數的漸近分析，與對其它選擇權（如障礙、美式）的變異數分析與數值模擬結果。

範例 2.3

根據第三章中的範例 5.2 的模型設定並以範例 6.2 的離散方式產生模擬股價路徑 $S_{0 \leq t \leq T}$ 。以平賭控制變異法來估計歐式選擇權價格，以及其標準誤差。

解答：使用以下 Matlab 程式 2-2 所計算出的樣本均值是 1505.8，標準誤差是

1.1579。相較於第三章範例 5.2 的解答，平賭控制變異法甚為準確。

Matlab 程式 2-2MCV 估計歐式選擇權

```
Clear all; clc;

% Input variables and parameters for Basic Monte Carlo
Nrepl=10000; % total number of simulations
Nstep = 250; % total number of time discretization
% input contract variables and model parameters S0, r, sig, T, K,
s0=9000; r=0.02; sig=0.4; %sigma: (annualized) volatility
T=1; K=9000;

dt = T/Nstep; % time step size
w = sqrt(dt) * randn(Nrepl, 2*Nstep); %samples of Brownian motion increments

%% Basic Monte Carlo
s=s0*ones(Nrepl, Nstep+1);
for l = 2:Nstep+1
    s(:, l) = s(:, l-1).*exp((r-(1/2)*(sig^2))*dt+sig*w(:, l-1));
end
DP_MC = exp(-r * T) * max(s(:, end)-K, 0); %discounted payoff samples

Price_MC = mean(DP_MC); %sample mean
SE_MC = sqrt(var(DP_MC) / Nrepl); %sampl SE

%% Martingale Control Variate Method
t_control=(Nstep:-1:1)*dt;
t_control=repmat(t_control,[Nrepl,1]);
delta = bs_delta(sig,s(:,1:Nstep),K,r,0,t_control,0); %bs_delta is a function to
```

```

compute deltas under the BS model
discount = exp(-r*dt*(0:Nstep-1));
discount = repmat(discount,[Nrepl,1]);
control=sum(discount.*delta.*s(:,1:Nstep).*sig.*w(:,1:Nstep),2);
Cov = cov(DP_MC,control);
lambda = Cov(1,2)/var(control); %optimal control parameter
DP_MCV = DP_MC-lambda.*control;
Price_MCV = mean(DP_MCV);      % option price estimator S_N-3
SE_MCV = sqrt(var(DP_MCV)/Nrepl);
plot([1:1000],DP_MC(1:1000),'blue',[1:1000],DP_MCV(1:1000),'red')
xlabel('Number of simulations');ylabel('Discounted payoff');

```

回顧控制變異法 (Control Variate Method) 的原理如下。對估計隨機變數 X 的期望值 $p=E[X]$ 來說，適當的引入一相關性高的隨機變數 Y 作為控制，與一控制參數 λ ，就形成了一控制變數 $X+\lambda Y$ 。這裡會要求 Y 的均值為 0，使得控制變數是不偏的；也就是說 $p=E[X]=E[X+\lambda Y]$ 。

控制變異法的目的是為了降低變異數使得 $\text{Var}(X+\lambda Y) \ll \text{Var}(X)$ ，對參數 λ 而言，上式左項的變異數是一元二次式，不難看出最小值存在且最佳 λ^* 的解為 $\lambda^* = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{Var}(Y)}$ 。

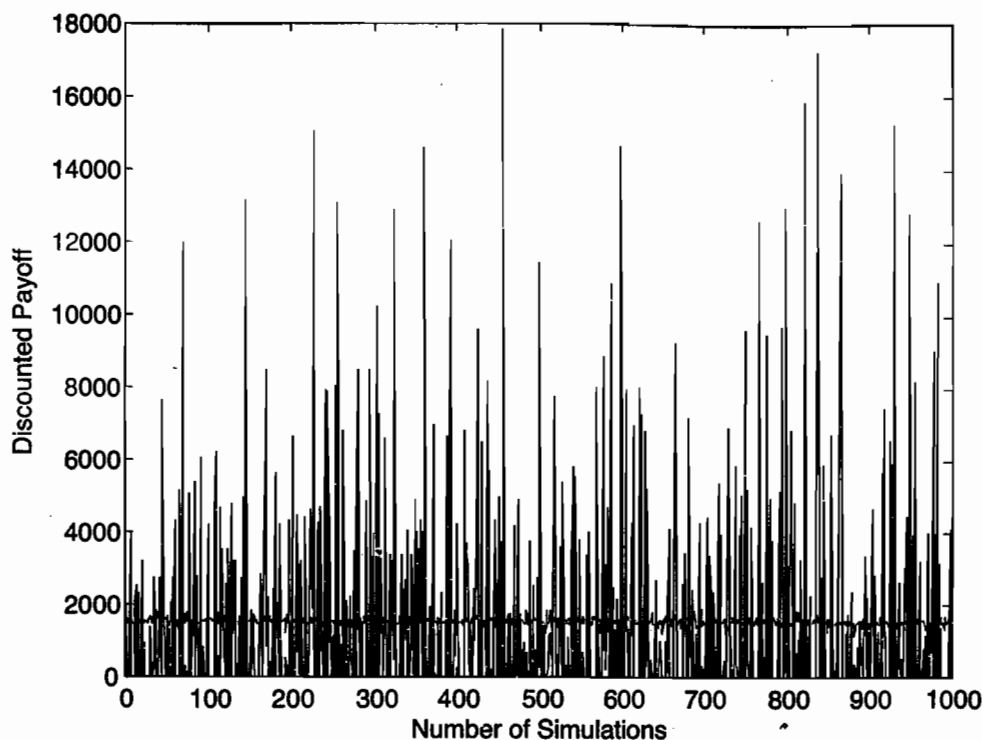


圖 2.1 隨機產生 1000 個歐式選擇權報酬的樣本，以藍（深）色代表；加入了 martingale 控制後的每個樣本則以紅（淺）色代表。

備註：可從圖 2.1 看出，加入了 martingale 控制後的每個樣本的變異程度（見紅（淺）色）比起原來的變異程度（見藍（深）色）要小的多。

作業 2.2 驗證式 (2-5) 所定義之平賭過程滿足隨機游走的定義要求。

第三節 快速收斂方法－（亂化）擬蒙地卡羅法 (Fast Convergence – (Randomized) Quasi Monte Carlo Method)

到目前為止本文使用的模擬方法中，除了歷史模擬法，「隨機」樣本的產生乃

是基於一種偽隨機序列 (pseudo random sequence) 的方法所產生出來的，這些序列所產生的樣本具有某種隨機性。在定積分的理論中，則常常使用另外一類所謂的擬隨機序列，或稱之為低分散序列 (low-discrepancy sequence, LDS)，這些序列所產生的樣本完全不具任何隨機性，並且相當規律的以非常「均勻」的方式分散在樣本空間中，雖然這些樣本最後看起來是亂的。使用 LDS 來取代蒙地卡羅法中的隨機樣本，以估計一個定積分的解就稱為「擬蒙地卡羅法 (Quasi Monte Carlo Method)」，簡稱為 QMC 法。此方法近二十年來在金融計算的應用上得到很多重視，因為 QMC 法能夠有效提高蒙地卡羅法的收斂速度，請參閱文獻 Glasserman (2003)、Jackel (2004) 和 Lemieux (2009)。

3.1 擬蒙地卡羅法簡介

有兩類主要的低分散序列族群，見 Niederreiter (1992)；第一類族群稱之為數位網序列 (digital net sequence)，例如：Halton 序列、Sobol 序列、Faure 序列和 Niederreiter(t, s) 序列等等，這些序列用來估計在超正立方體的空間 (hypercube space) 上對平滑⁸函數的積分值。這一類 LDS 族群其收斂速率為 $O((\log N)^s/N)$ ，其中 s 是積分問題的維度，或記為 $O(1/N^{1-\varepsilon})$ 對任意 $\varepsilon > 0$ ，其中 N 是指擬隨機序列使用的樣本數目。

另外一類族群是由網格法 (lattice rule) 所產生的，當積分函數具有週期性且非常平滑時，這類 LDS 序列對積分問題的估計特別有用。他們的收斂速率為 $O((\log N)^{\alpha s}/N^{\alpha})$ ，其中 $\alpha > 1$ 是指跟積分函數平滑度有關的一個參數。L'Ecuyer and Lemieux (2000) 詳細討論了這類方法，其原理是基於線性同倫產生器 (linear congruential generator)，並且具有下面重要的性質：(1) 它們對高維度的序列點都能夠很有效地產生，(2) 它們的收斂速度通常也比較好。

我們會在以後的蒙地卡羅法的實作裡面使用到這些序列，不過注意到對選擇權定價的積分問題來說，由於報酬函數通常不是平滑的，因此實際上 QMC 的收斂理

⁸ Smooth 意指被積分函數是無限制的可微分。

論並不能套用，我們甚至在一個對美式選擇權的範例上舉出使用 QMC 可能產生嚴重的偏誤。

QMC 估計式為

$$E\{f(U)\} = \int_{[0,1]^d} f(u) du \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i),$$

其中 $\{u_i \in [0,1]^d\}$ 由 LDS 所產生。QMC 方法是一種決定性的積分方法，它與一般使用黎曼和的定積分方法等之不同處在於，定義域上的網格點並非是循序增加的；並且與一般蒙地卡羅法不同之處在於 LDS 的網格點十分均勻。

圖 3.1 與 3.2 在二維平面（邊長 1）上分別產生了 256 與 1024 個樣本：左圖均由偽隨機序列產生，右圖由擬隨機序列（Sobol'）產生。注意到擬隨機序列的低分散性質。

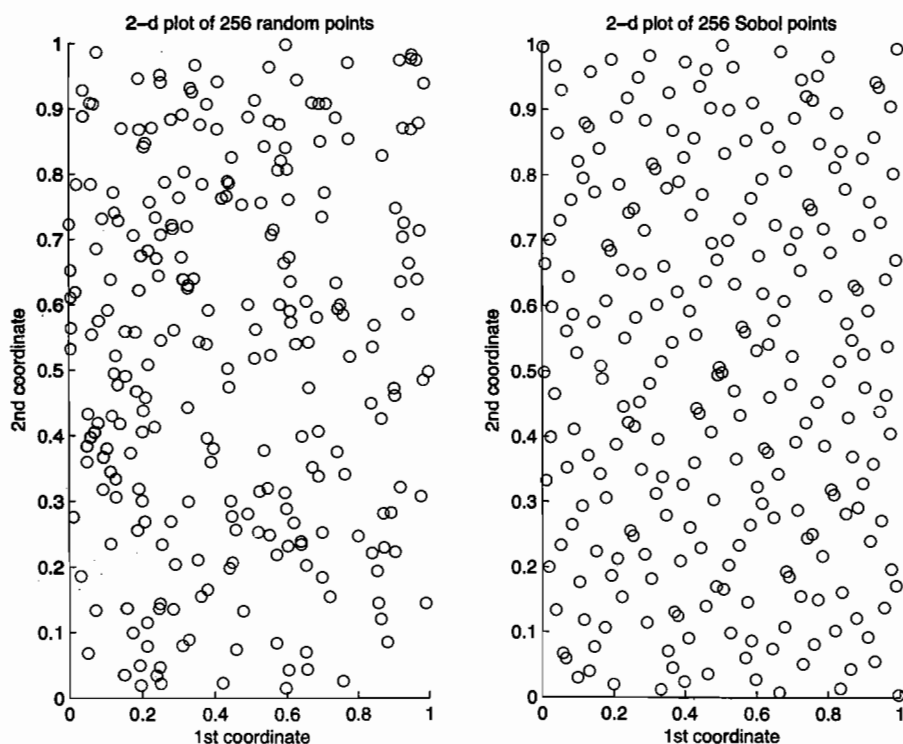


圖 3.1 二維平面（邊長 1）上 256 個樣本：左圖由偽隨機序列產生，右圖由擬隨機序列產生。

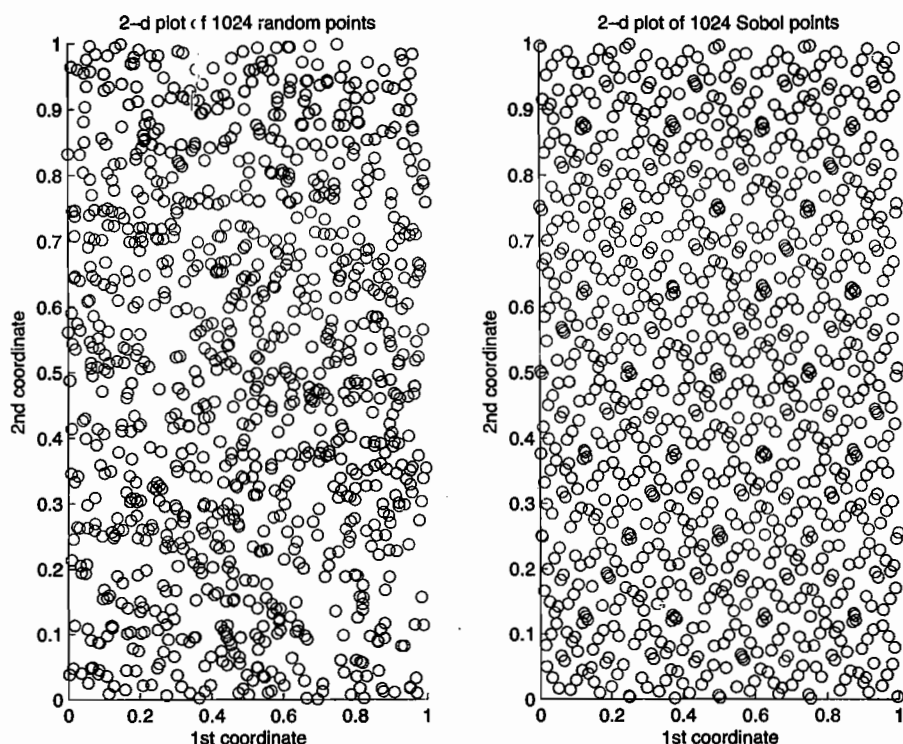


圖3.2 二維平面（邊長1）上1024個樣本：左圖由偽隨機序列產生，右圖由擬隨機序列產生。

事實上，我們可以探討 QMC 法的誤差，但是我們能不能探討其信賴區間呢？答案是肯定的。透過所謂的亂化 QMC 法（Randomized QMC Method），我們就可以探討 QMC 方法所估計出來積分值的信賴區間。Owen（1997）首先證明了如果將 QMC 序列加以適當亂數化（Randomization），則對積分值估計的均方差為 $O(1/N^{1.5-\epsilon})$ 對於 $\epsilon > 0$ 。這個結果大大提高人們對於亂化 QMC 方法在使用上的興趣，因為傳統蒙地卡羅方法收斂速度是 $O(1/\sqrt{N})$ ；也就是說，與上述亂化 QMC (RQMC) 方法收斂速度幾乎為 1.5 相較，蒙地卡羅的收斂指數僅只有 0.5；雖然說 RQMC 方法對積分函數要求較多的正則性（regularity）。

以隨機位移（random shift）的 RQMC 估計式為

$$E\{f(U)\} = \int_{[0,1]^d} f(u) du \approx \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i + r_j \bmod 1)$$

其中 $\{u_i \in [0,1]^d\}$ 由 LDS 所產生， $\{\tau_j \in [0,1]\}$ 仍由偽隨機序列產生。

理論上，QMC 法或是亂化 QMC 法的收斂分析，都與積分函數的平滑性有很大的關係。相對在財務應用上，特別是選擇權定價問題裡面，由於我們的報酬函數通常都不是平滑的，這部份理論分析的結果仍未得知。但是在實用上此方法後來變得非常熱門，因為人們發現在經驗上（亂化）QMC 還是一個很有效的計算方法。但在 Han and Lai (2010 a) 中，他們給了一個關於使用 QMC 來做為選擇權定價問題的一個反例，並指出當評價美式選擇權時，單單使用 QMC 的方法可能會導致價格估計上的偏誤。不過若引入（平賭）控制變異法將新的報酬函數平滑化之後，則 QMC 法又回復成為有效。

Matlab 程式 3-1(a) randomized Sobol's random sequence

```
qmc=sobolset(Nstep,"Skip",1e3,'Leap',1e2); %Sobol' random sequence
u=ones(Nrepl,1)*rand(1,Nstep);
randmat=sqrt(dt)*norminv(mod(u+qmc(1:Nrepl,1:Nstep),1)); % a random shift
```

Matlab 程式 3-1(b) Sobol's random sequence

```
load sobol.mat %this mat file contains Sobol's sequences called sobseq
randmat=norminv(sobseq(1:round(Nrepl),1:Nstep)); % a QMC sequence of normal
samples
```

3.2 應用三：隨機波動模型下的評價

根據第 2.2 節的討論，已經得到

$$P_0 = E[e^{-rT}H(S_T) - M(P;T)],$$

並且 Monte Carlo 的估計式為

$$P_0 \approx S_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[e^{-rT} H \left(S_T^{(i)} \right) - M^{(i)}(P_{BS}; T) \right],$$

該 P_{BS} 乃是某一有效波動率 (effective volatility) 的 Black-Scholes 歐式選擇權價格。

如何選取有效的波動率？對一因子的隨機波動模型來說，

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \exp(Y_t/2) S_t dW_{1t}, \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta dW_{2t}, \end{cases} \quad (3-4)$$

Fouque et al. (2000) 提出了 Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Model 使得其中係數 $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}, \beta = \frac{\sqrt{2}\nu}{\sqrt{\varepsilon}}$ 具有非常小的時間尺度。金融的意義是波動率的改變相較於價格的改變較易受到小時間尺度的影響，譬如說日內的消息等因素。在此假設下，整合波動率具有如下的「平均性質 (averaging property)」

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t^\varepsilon)^2 dt \xrightarrow{a.s.} \bar{\sigma}^2, \text{ for } \varepsilon \rightarrow 0$$

其中的尺度關係是 $\varepsilon \ll T$ 。這個性質與駕馭波動率的過程 (driving volatility process) Y_t 所具有的遍歷性 (ergodic property) 有著密切的關係，對此細節感到興趣的讀者請見 Fouque et al. (2011)。有效波動率記為 $\bar{\sigma}$ 在此模型下是一個常數，定義如下

$$\bar{\sigma}^2 = \int f^2(y) d\Phi(y),$$

或記做 $\bar{\sigma}^2 = \langle f^2(\cdot) \rangle$ ，其中函數 $\Phi(y)$ 代表了快速變動過程 Y_t^ε 的不變分佈 (invariant distribution)。式 (3-4) 中的 Ornstein-Uhlenbeck 過程是一個典型的隨機波動模型，它的不變分佈 Φ 是常態分佈其中均值是 m 且變異數是 ν 。這個極限結果允許我們以具有封閉解的 Black-Scholes 價格 $P_{BS}(t, x; T, K; \bar{\sigma})$ 來逼近真實的選擇權價格 $P(t, x; T, K)$ 。

Matlab 程式 3-2 呈現了如何利用 martingale 控制變異法評價隨機波動模型下的歐式選擇權價格，這個程式也可以很容易用 C/C++寫出來，或者將它推廣到其它路徑相關的選擇權。

Matlab 程式 3-2 以 Martingale 控制變異法評價隨機波動模型下的歐式選擇權價格

```
clear all; clc

% Input BMC parameters
Nrepl = 10000;
Nstep = 100;
% input contract variables and a SV model parameters s0, r, alpha, beta, T, K, m, rho, Y0;

sig0=exp(Y0/2);
dt = T/Nstep;
w = sqrt(dt) * randn(Nrepl, 2*Nstep); %generate Brownian motion increments

%% Basic Monte Carlo
Y(:,1)=Y0*ones(Nrepl,1);
sig(:,1)=sig0*ones(Nrepl,1);
s(:,1)=s0*ones(Nrepl,1);
for l = 2:Nstep+1
    Y(:, l) = Y(:,l-1) + alpha*(m-Y(:, l-1)) * dt + beta*(rho * w(:, l-1)
+ sqrt(1-rho^2) * w(:, Nstep+l-1));
    sig(:, l) = exp(Y(:, l)/2);
    s(:, l) = s(:, l-1).*exp((r-(1/2)*(sig(:,l-1).^2))*dt+sig(:, l-1).*w(:, l-1));
end
DP_MC = exp(-r * T) * max(s(:, end)-K, 0); %discounted payoff samples
Price_MC = mean(DP_MC); %sample mean
SE_MC = sqrt(var(DP_MC) / Nrepl); %sample SE
```

```
%% Martingale Control Variate Method under SV models
sigmaMat=sig;
sigbar=mean(sqrt(sum(sigmaMat.^2,2)./Nstep)); %empirical effective vol
t_control=(Nstep:-1:1)*dt;
t_control=repmat(t_control,[Nrepl,1]);
delta = bs_delta(sigbar,s(:,1:Nstep),K,r,0,t_control,0); %bs_delta is a function
    computing deltas under the BS model
discount = exp(-r*dt*(0:Nstep-1));
discount = repmat(discount,[Nrepl,1]);
control=sum(discount.*delta.*s(:,1:Nstep).*sigmaMat(:,1:Nstep).*w(:,1:Nstep),2);
Cov = cov(DP_MC,control);
lambda = Cov(1,2)/var(control);
DP_CV = DP_MC-lambda.*control;
Price_CV = mean(DP_CV);
SE_CV = sqrt(var(DP_CV)/Nrepl);
```

範例 3.1 隨機波動模型下的歐式選擇權價格

請逕行參閱本章第六節 6.1 中數值結果的 CPU 部份，並且參考下表。

- (1) 在不同的 $\alpha = 1/\varepsilon$ 下，比較 basic Monte Carlo (欄 MC_price 中) 與使用了 MCV 方法(欄 MC+CV_price 中)的價格與標準差。下表中最後一欄是 variance reduction ratio，該值愈大表示該方法愈能減少變異數。這裡僅用了偽隨機序列 (pseudo random sequence) 並沒有擬隨機序列 (quasi random sequence)。

ε	MC price (std err)	MC+CV price (std err)	$V^{MC}/V^{MC+CV}(P_{BS}(\bar{\sigma}))$
1/50	7.0771 (0.1080)	7.0883 (0.0064)	287
1/25	6.9862 (0.1072)	7.0646 (0.0069)	244
1/10	7.1530 (0.1085)	7.0466 (0.0079)	187
1	7.1588 (0.1065)	7.0244 (0.0096)	122
5	7.0064 (0.1059)	7.0236 (0.0092)	132
10	7.0785 (0.1090)	7.0577 (0.0080)	185
25	7.1145 (0.1101)	7.0729 (0.0068)	266
50	6.9737 (0.1095)	7.0737 (0.0063)	298

- (2) 在不同的模擬次數下，比較 basic Monte Carlo (欄 MC 中) 與使用了 MCV 方法 (欄 MC+CV 中) 的價格與標準差。下表第三欄(含)以後僅紀錄 variance reduction ratio，該值愈大表示該方法愈能減少變異數。這裡第一、二欄僅用了偽隨機序列 (pseudo random sequence)，之後都用了亂化的擬隨機序列 (randomized quasi random sequence)，如 Sobol' 代表 Sobol's 序列，LTLRP 代表 L'Ecuyer 序列。BB 表示與布朗橋 (Brownian bridge) 合併使用。

N	MC	MC+CV	Sobol'	Sobol+CV	Sobol+BB	Sobol+CV+BB
1024	11.839(0.126)	45.8	5.0	339.3	2.6	129.3
2048	11.837(0.090)	48.0	2.3	304.8	4.0	138.4
4096	11.862(0.064)	48.4	1.8	124.8	2.5	158.4
8192	11.804(0.045)	47.4	2.3	124.0	2.9	148.4
16384	11.816(0.032)	47.1	1.4	176.1	7.7	115.5
32768	11.857(0.022)	48.1	1.7	235.9	4.5	479.9

N	LTLRP	LTLRP+CV	LTLRP+BB	LTLRP+CV+BB
1021	2.0	75.5	7.3	687.9
2039	3.1	135.1	7.0	298.5
4093	3.1	143.9	2.2	140.1
8191	4.2	347.8	4.9	286.0
16381	3.1	227.9	7.8	94.8
32749	6.4	728.7	15.1	741.6

備註：注意到，使用布朗橋不見得能降低變異數。

範例 3.2 隨機波動模型下的障礙式選擇權價格

由圖 3.3 可看出 MCV 法較 BMC 法精確，收斂速度較快。

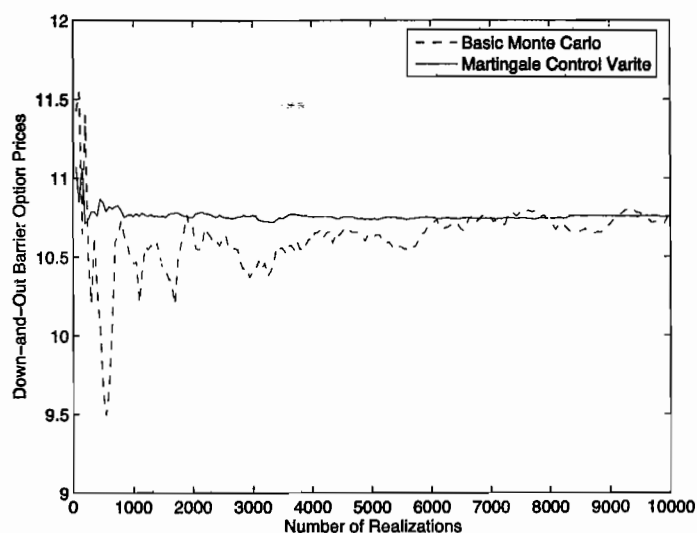


圖3.3 BMC與MCV估計隨機波動模型下障礙選擇權價格的表現。橫軸是模擬軌跡數，縱軸是樣本平均價格。

第四節 評價美式選擇權：最小平方法與對偶法 (Pricing American Options: Least Squares Method and Dual Method)

回顧在第一章中定義了美式選擇權。它與歐式選擇權唯一不同之處在於選擇權持有人 (holder) 擁有提早履約 (early exercise) 的權利。由於賦予更多的權利，很自然的，美式選擇權的價格自然就要比同樣規格的歐式選擇權契約更加昂貴。如第一章定理 8.3 所述的一個特例，美式賣權在不支付股利的條件下可被證明出不值得提早履約，因此美式賣權的價值與歐式賣權的價值會相等。

回顧第一章第八節，在一風險中立的機率測度之下，一個美式選擇價格被定義為：

$$P_t = \sup_{t \leq \tau \leq T} E^* [e^{-r(\tau-t)} h(S_\tau) | F_t],$$

τ 為一有界的停止時間以指示該契約可以被履約的時間。吾人可以理解此定義如下：美式選擇權的持有人會根據現有的市場資訊（無內線消息），來形成交易策略以決定停止時間，取每種可能的履約時間所對應的選擇權價值的最大值，交易員依此來定義美式選擇權的權利金，以應付精明的投資人所使用的最佳交易策略。

例如在 Black-Scholes 模型下的買權價格， P_t 可進一步化簡為

$$\begin{aligned} P(t, x) &= \sup_{t \leq \tau \leq T} E^* [e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau)^+ | S_t = x] \\ &= E^* [e^{-r(\tau^*-t)} (K - S_{\tau^*})^+ | S_t = x], \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中 τ^* 是最佳停止時間。該函數滿足下面具有自由邊界問題（free boundary problem）的聯立偏微分方程組

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - rP(t, x) = 0, & \text{if } x \geq S_t^* \\ P(t, x) = K - x, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 S_t^* 即是所謂的自由邊界，用來區別在時間為 t 時是否要提早履約。當股價 x 大於自由邊界時，繼續持有美式賣權；反之則立刻履約取得 $K - x$ 的報酬。然而，自由邊界 S_t^* 必須從整個的偏微分方程組求得，而目前尚未有此問題的封閉解。

由於提早履約的權利僅有一次，選擇權持有人必須要在契約期限內決定何為最佳履約時間（optimal exercise time），學理上這屬於一種最佳停止問題（optimal stopping problem）。這個履約或停止時間的決定在於比較(1)現在履約所獲得的報酬 $h(S_t)$ 以及(2)繼續價值（continuation value） C_t 的大小。顯然當 $h(S_t) \geq C_t$ ，履約時點浮現；否則繼續等待。然而要如何算出 C_t 呢？

在數值偏微分中的有限差分法與樹狀法（tree method）的解法上，將未來資產價格的變動取在不同的網格節點上，並視作固定；也就是說現在就可窺探未來，因此利用後向歸納法（backward induction）不難計算出在任一網格節點上的繼續價值。數學上這等同於定義了

$$C_t = E^*[e^{-r\delta} C_{t+\delta}],$$

δ 意指離散時間的長度。然而對蒙地卡羅算法來說，上述式子的估計意為著蒙地卡羅法在蒙地卡羅法（Monte Carlo on Monte Carlo），這是因為每個繼續價值 C_t 原本就要由一層的蒙地卡羅法估算出來，例如 $C_t \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-r\delta} C_{t+\delta}^{(i)}$ ，但現在第 i 個樣本 $C_{t+\delta}^{(i)}$ 又必須要由另外一層的蒙地卡羅法估算出來。對 C_t 的估計已用了 N 次模擬，若對 $C_{t+\delta}^{(i)}$ 的估計使用 M 次模擬，則要花費的 NM 的計算量。依此回溯類推，不難想像這種方法是完全行不通的。譬如說，整個模擬實驗的離散時間個數是 $N+1$ 且 $M=N$ ，則總計算量將高達 $O(N^N)$ 。這解釋了為何使用蒙地卡羅法來估算美式選擇權價格或者更一般的最佳停止問題的解時，往往都是十分困難。在許多關於期貨與選擇權書的早期版本中，例如 John Hull 的教科書，會直接點出無法以蒙地卡羅來估計美式選擇權的價格，人們必須倚賴於特別是數值 PDE 或樹狀方法。然而這一切在 2001 年有了革命性的改觀，Hull 的書當然也就從善如流了。

Longstaff and Schwartz (2001) 提出如何以蒙地卡羅模擬法來計算美式選擇權的價值，主要的突破點在於他們以最小平方方法（least squares method; LSM⁹）來估計連續價值。這個簡單、嶄新的想法打開了以蒙地卡羅模擬法解決最佳停止問題的大門，因而奠定了它在計算金融上的地位。學理上稱 LSM 為評價美式選擇權的一種主要方式（primal approach），它具有下界偏誤（low bias）的特性；相對的，另一種由 Rogers (2002) 發展出來稱之為對偶方式（dual approach）的算法，它基於 supermartingale 的 Doob-Meyer 分解並可解釋為（非線性）控制變異法，具有估計上界偏誤（high bias）的特性。兩者上下界估計方法的原理雖然完全不同，但可以成為互補，見 Fouque and Han (2008)。

4.1 下界偏誤：最小平方方法

接下來舉在 Longstaff and Schwartz (2001) 論文中的一個實例，以簡要的介紹 LSM 這個解法的步驟與觀念。

⁹ LSM 恰好也可意味著 Longstaff-Schwartz Method，似乎冥冥中已注定要由這兩位財金學者發現。

離散時間三期，模擬 8 條（未發股利）的股票價格軌跡如下：

<i>Stock price paths</i>				
<i>Path</i>	<i>t=0</i>	<i>t=1</i>	<i>t=2</i>	<i>t=3</i>
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

假設無風險利率為 $r=0.06$ ，且賣權的履約價 K 為 1.1。利用後項歸納，先考慮到期 $t=3$ 的報酬，並形成一現金流矩陣（cash flow matrix）如下

<i>Cash-flow matrix at time 3</i>			
<i>Path</i>	<i>t=1</i>	<i>t=2</i>	<i>t=3</i>
1	-	-	.00
2	-	-	.00
3	-	-	.07
4	-	-	.18
5	-	-	.00
6	-	-	.20
7	-	-	.09
8	-	-	.00

由於在期末，報酬即是連續價值，因為已經不能再「繼續」下去了。

LSM 估計連續價值的方式如下。首先，在前一期 $t=2$ 時，由於價外（out of the money, OTM）報酬是 0，故僅考慮價內（in the money, ITM）的股價；也就是 $S_2 < K$ 的

樣本，即如軌跡 1,3,4,6,7 所示。將這些股價視為說明變數 X ，而折現後的連續價值（ X 在第三期的報酬）視為解釋變數 Y ，先解出一迴歸式¹⁰

$$E[Y|X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$$

其次，將這些價內股價帶入上面右式，所得到的結果就代表了在這些股價上的連續價值。這個最小平方方法就是用來估計前述由條件期望所定義出的連續價值

$$C_t = E^*[e^{-r\delta}C_{t+\delta}|S_t = x] \approx a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

這個想法是整個 LSM 的精神所在。剩餘的步驟就不令人意外了。與立刻履約（immediately exercise）報酬的比較如下表所示：

<i>Optimal early exercise decision at time 2</i>		
<i>Path</i>	<i>Exercise</i>	<i>Continuation</i>
<i>1</i>	<i>.02</i>	<i>.0369</i>
<i>2</i>	-	-
<i>3</i>	<i>.03</i>	<i>.0461</i>
<i>4</i>	<i>.13</i>	<i>.1176</i>
<i>5</i>	-	-
<i>6</i>	<i>.33</i>	<i>.1520</i>
<i>7</i>	<i>.26</i>	<i>.1565</i>
<i>8</i>	-	<i>0</i>

¹⁰ 以指數多項式為基底是一種選擇，另外經驗上也常用 Laguerre 多項式。

我們得出了在時間 $t=2$ 關於是否要提早履約的決策，並且更新現金流矩陣 (cash flow matrix)

<i>Cash-flow matrix at time 2</i>			
<i>Path</i>	<i>t = 1</i>	<i>t = 2</i>	<i>t = 3</i>
1	-	.00	.00
2	-	.00	.00
3	-	.00	.07
4	-	.13	.00
5	-	.00	.00
6	-	.33	.00
7	-	.26	.00
8	-	.00	.00

依此法類推最後可得到整個現金流矩陣如下

<i>Option cash flow matrix</i>			
<i>Path</i>	<i>t = 1</i>	<i>t = 2</i>	<i>t = 3</i>
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

從這個矩陣很容易得到下面對每一條股價軌跡的的履約規則 (stopping rule) ;
1 代表履約而 0 代表繼續。

<i>Stopping rule</i>			
<i>Path</i>	<i>t = 1</i>	<i>t = 2</i>	<i>t = 3</i>
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	1
4	1	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	1	.00	.00
7	1	.00	.00
8	1	.00	.00

這意味著每條軌跡的履約時間 (exercise time) 已經求出，也就是停止時間 τ 被實現了。

這個停止時間並不是最佳的停止時間，除非模擬的路徑數與最小平方法的基底數都是無限大。因此只要根據這些履約時間，將對應的折現報酬取平均值後就得到了美式賣權的「下界」估計值，也就是計算

$$E^*[e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau)^+ | S_t = x] \quad (4-2)$$

為何有下方偏誤呢？不難從定義 (4-1) 中看出，美式選擇權的價格是對停止時間取了極大值，而 LSM 的方法，如式 (4-2) 所示，僅提供了一個特殊的停止時間 τ ，雖然它被視為十分接近於最佳停止時間 (optimal stopping time) τ^* 。

Matlab 程式 4-1 以最小平方法評價美式賣權

```

clear all;clc;

% Input BMC parameters
nsteps=250;
nrepl=10000;

% input contract variables and the BS model parameters s0, r, sigma, t, x;
s0=120; r=0.06; sigma=0.4;
t=0.5; %maturity
x=100; %strike price

dt=t/nsteps;
discount=exp(-r*dt);
%discount rates over different time intervals
discountvet=exp(-r*dt*(1:nsteps));

%generate sample paths
nudt=(r-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt);
randmat=randn(round(nrepl/2),nsteps);
increments=[nudt+sidt*randmat;nudt-sidt*randmat];

%use Antithetic Variate Method

logpaths=cumsum([log(s0)*ones(nrepl,1),increments],2);
spaths=exp(logpaths);
spaths(:,1)=[]; %get rid of starting prices
cashflows=max(0,x-spaths(:,nsteps));

```

```
%exercise time estimation

a=zeros(3,1);%regression parameters

exercisetime=nsteps*ones(nrepl,1);

for step=nsteps-1:-1:1
    inmoney=find(spaths(:,step)<x);
    xdata=spaths(inmoney, step); %in the money path
    regrmat=[ones(length(xdata),1),xdata,xdata.^2]; %poly. regressor
    ydata=cashflows(inmoney).*discountvet(exercisetime(inmoney)-step);
    a=regrmat\ydata;%regression
    intrinsicvalue=x-xdata; %exercise value
    continuationvalue=regrmat*a; %continuation value
    exercise=find(intrinsicvalue>continuationvalue);
    k=inmoney(exercise);
    cashflows(k)=intrinsicvalue(exercise); %update cashflows
    exercisetime(k)=step; %update exercisetime
end

%LS estimates for American put option
value=cashflows.*discountvet(exercisetime);
LSMprice=[mean(value),std(value)/sqrt(nrepl)]; %report sample mean/SE
```

簡要回顧 LSM 如下。能夠提早履約對選擇權來說是個重要的功能，美式選擇權就提供了選擇權的買方，而不是賣方一個提早履約的權利。根據無套利的理論，定義在時間 T 的美式選擇權價值 P_t 其到期日 $T < \infty$ 可以考慮成為一個最佳停止的問題如定義（4-1）所示。Longstaff and Schwartz（2001）提出主要的方式（primal

approach)，來估計美式選擇權的下界價值。他們利用了最小平方迴歸式來估計所謂的延續的價值 (continuation value)，然後藉著比較延續的價值與立刻履約報酬的價值，就可以估計出一個停止時間 τ 以決定每一條模擬出來的價格過程應該要停在哪裡。事實上 τ 對應到一個次佳的停止交易策略，它並不是最佳的。因此，Longstaff 與 Schwartz 的最小平方蒙地卡羅方法會導出一個美式選擇權價值的下界。以時間 0 為例：

$$E^*\{e^{-r\tau}H(S_\tau)|\mathcal{F}_0\} \leq P_0 \quad (4-3)$$

可以看出最小平方蒙地卡羅法所評價出來的價格是小於等於真實的美式選擇權價格 P_0 。

變異數縮減：LSM 的（局部）控制變異法

利用選擇抽樣定理 (Optional Sampling Theorem)，我們可以進一步使用一個局部 martingale (local martingale)，也就是 $M(\tilde{P}; \tau)$ 來增加下界估計的精準度。可以看出，

$$E^*\{e^{-r\tau}H(S_\tau) - M(\tilde{P}; \tau)|\mathcal{F}_0\} = E^*\{e^{-r\tau}H(S_\tau)|\mathcal{F}_0\}, \quad (4-4)$$

其中 \tilde{P} 是一個用來逼近真實美式選擇權價格的解，通常具有封閉解。例如說我們可以選擇一個歐式選擇權，記為 P_E 來做為美式選擇權的逼近，以形成一個避險的 martingale，

$$M(P_E; \tau) = \int_0^\tau e^{-rs} \frac{\partial P_E}{\partial x}(s, S_s) \sigma S_s dW_s^*. \quad (4-5)$$

由式 (4-1) 所定義出的美式賣權的價格 P_t 來說，當然是未知的，但是它所相對的歐式賣權 $P_E(t, x)$ 卻存在著封閉解，也就是熟知的 Black-Scholes 公式，而且它的 Delta 也是知道的

$$\frac{\partial P_E}{\partial x}(t, x; T, K, r, \sigma) = \mathcal{N}\left(\frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) - 1$$

其中 $\mathcal{N}(x)$ 是一個常態分配的 CDF。

由式 (4-4) 左項所形成的估計式就是使用了局部 martingale 的一控制變異法，我們也可稱它為局部控制變異法。此法的程式如下面 Matlab 程式 4.2 所示，另與 QMC 方法進一步結合的數值結果可參見 4.3 節。

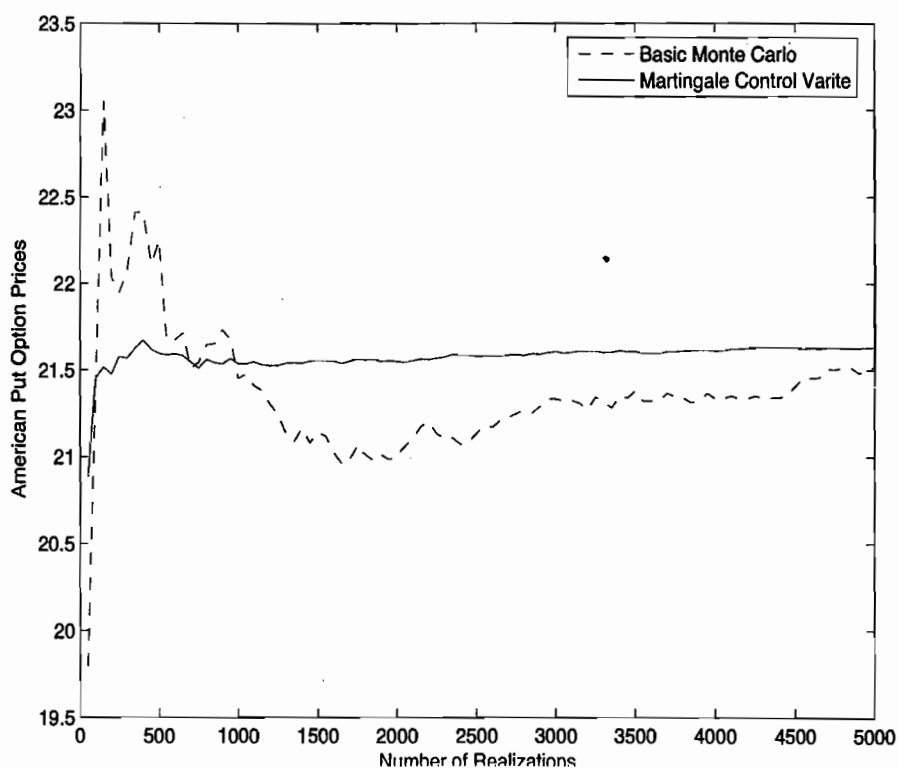


圖4.1 LSM與LSM+MCV估計美式買權價格的表現。橫軸是模擬軌跡數，縱軸是樣本平均價格。

由 LSM 法與 LSM+MCV 法估計美式買權價格的數值表現如圖 4.1 所示。受到控制後的 LSM 法的確能快速收斂，提供較精確的估計值。

Matlab 程式 4-2 最小平方法的 (局部) martingale control method

%接續 Matlab 程式 4.1

```
timematrix=cumsum([dt*(nsteps-1)*ones(nrepl,1),-dt*ones(nrepl,nsteps-2)],2);
delta0=normcdf((log(s0/x) + (r + 0.5*sigma^2) * dt*nsteps) / (sigma * sqrt
    (dt*nsteps)))-1;
delta = normcdf((log(spaths(:,1:nsteps-1)./x) + (r + 0.5*sigma^2) * timematrix)./
    (sigma * sqrt(timematrix)))-1;
discountmatrix=exp(-r*cumsum([dt*ones(nrepl,nsteps)],2));

%compute martingale hedging portfolio
M(1:nrepl,1)= delta0 * sigma * s0* sqrt(dt) * random(1:nrepl, 1);
for j=1: (nsteps-1)
    M(1:nrepl,j+1)= M(1:nrepl,j)+ exp(-r * j * dt) *sigma
        *sqrt(dt)*delta(1:nrepl,j).*spaths(1:nrepl, j).*random(1:nrepl, j+1);
end

for i=1:nrepl
    LSM(i)=value(i)-M(i,exercisetime(i)); %Control Variate for LS method
end

LSM_MCVprice=[mean(LSM),std(LSM)/sqrt(nrepl)]
```

4.2 上界偏誤：對偶法

相對的要估計美式選擇權的上界，Rogers (2002) 提出了一個對偶的方式 (dual approach) 來對下面 inf-sup 的問題來求解：

$$\begin{aligned} P_0 &= \inf_{\mathcal{M} \in H_0^1} E^* \{ \sup_{0 \leq t \leq T} (e^{-rt} H(S_t) - \mathcal{M}_t) | \mathcal{F}_0 \} \\ &= E^* \{ \sup_{0 \leq t \leq T} (e^{-rt} H(S_t) - \mathcal{M}_t^*) | \mathcal{F}_0 \}, \end{aligned} \quad (4-6)$$

其中 \mathcal{M}_t 是由一類 martingale 隨機過程所形成的集合

$$H_0^1 = \{ (\mathcal{M}_t)_{0 \leq t \leq T} : \text{martingale with } \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{M}_t| \in L^1 \text{ and } \mathcal{M}_0 = 0 \},$$

而 \mathcal{M}_t^* 是最佳的 martingale。因此，對於任何一個落在 H_0^1 這個集合的 martingale，譬如說 $\mathcal{M}_t = M(\tilde{P}; t)$ 定義在式 (4-5) 中，一個對美式選擇權的上界解就可以得到。

$$P_0 \leq E^* \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left(e^{-rt} H(S_t) - M(\tilde{P}; t) \right) | \mathcal{F}_0 \right\}. \quad (4-7)$$

注意到當一個漸進解 \tilde{P} 恰好等於真實美式選擇權價格 P ， $\mathcal{M}_t^* = M(P; t)$ 上述的等式就會成立，這個性質可以用 Doob-Meyer Decomposition，見 Karatzas and Shreve (2000)，來得到。式 (4-7) 右項的計算程式如下面 Matlab 程式 4.3 所示。

Matlab 程式 4-3 對偶法評價美式賣權

```
%接續 Matlab 程式 4.1，4.2

for i=1:nrepl
    cd_pf_max=max(x-s0,max((cashflowsmatrix(i,:).*discountmatrix(i,:))-M(i,:)));
    %maximum of controlled discounted pyoff
end

Upperprice=[mean(d_pf_max),std(d_pf_max)/sqrt(nrepl)]
```


4.3 變異數縮減的數值結果

簡言之，從方程式 (4-4) 與 (4-7) 當中，我們可以得到關於美式選擇權真實價格它的上界以及下界的估計

$$\begin{aligned} & E^* \{ e^{-r\tau} H(S_\tau) - M(\bar{P}; \tau) | \mathcal{F}_0 \} \\ & \leq P_0 \\ & \leq E^* \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left(e^{-rt} H(S_t) - M(\bar{P}; t) \right) | \mathcal{F}_0 \right\}. \end{aligned} \quad (4-9)$$

那麼注意到上述右邊跟左邊內都分別有一個 martingale，事實上它們可以被選為一樣以方便計算。在下面的數值範例中，我們會使用由方程式 (4-5) 中所定義出來的 martingale，也就是利用歐式選擇權來建構的 martingale，以進行上下界解的估計。舉例來說，我們可以考慮在起始時間為 0 的美式選擇賣權的一個估計問題，模型的參數訂為履約價格 $K = 100$ ， $r = 0.06$ ， $T = 0.5$ ，波動率 $\sigma = 0.4$ 。

關於下界估計的數值結果，我們會分別使用蒙地卡羅方法中 MC/QMC 的做法，搭配了使用避險 martingale 或者是不使用避險 martingale 來看看它們對數值結果的影響。上界的估計都會使用到避險 martingale，這些結果展示在表 4.1 中。在此表中第一欄展示了不同選擇的股票價格的起始值，真實的美式選擇權的價格是紀錄在第六欄中，這些結果是由參考文獻 Han and Lai (2010 a) 所截取出來的。蒙地卡羅的模擬所進行的方式如下，我們會取 5000 個樣本數 ($N=5000$)，隨機過程的時間離散的大小 $\Delta t = 0.01$ ，我們利用最小平方法，第二欄和第三欄當中分別展示了他們的下界估計的平均值及標準誤差（紀錄在括號中）。這些估計是根據方程式 (4-3)，而 MC+CV 的估計式則是根據方程式 (4-4)。我們有如下的觀察：

第一，這些估計值確實都比真實的價格小，也就是他們確實為下界解。

第二，標準誤差有很顯著的下降，若估計式中加入了避險 martingale 的控制 $M(P_E; \tau)$ 。

表 4.1 比較美式選擇權的下界估計（見第 2-4 行），真實解（見第 5 行），以及上界估計（見第 6-7 行）。MC 記為基本蒙地卡羅的估計值，MC+CV 記為使用 martingale 控制的控制變異的估計值，標準差皆記在括弧中。QMC 與 QMC+CV 則以 Sobol 點序列取代偽隨機序列。

S_0	LSM MC	LSM MC+CV	LSM QMC	LSM QMC+CV	P_0 (true)	Dual MC+CV	Dual QMC+CV
80	20.7368 (0.2353)	20.6876 (0.0124)	20.9435	20.6626	21.6059	21.947 (0.0107)	21.9764
85	17.3596 (0.2244)	17.3586 (0.0134)	17.8031	17.3321	18.0374	18.325 (0.0128)	18.3590
90	14.3871 (0.2125)	14.3930 (0.0139)	15.0429	14.4030	14.9187	15.132 (0.0143)	15.1988
95	11.8719 (0.1995)	11.8434 (0.0148)	12.6472	11.8795	12.2314	12.371 (0.0148)	12.4660
100	9.8529 (0.1881)	9.6898 (0.0157)	10.5380	9.6942	9.946	10.147 (0.0153)	10.1433
105	7.9586 (0.1684)	7.8029 (0.0154)	8.7117	7.8351	8.0281	8.181 (0.0151)	8.1914
110	6.2166 (0.1518)	6.2606 (0.0150)	7.1663	6.2949	6.4352	6.612 (0.0149)	6.5708
115	5.0815 (0.1367)	5.0081 (0.0144)	5.8568	5.0221	5.1265	5.269 (0.0141)	5.2282
120	4.0885 (0.1245)	3.9389 (0.0146)	4.7480	3.9699	4.0611	4.198 (0.0134)	4.1358

對於 QMC 方法來說，我們使用了 5000 筆序列，而維度為 100。值得注意的是，在第四欄當中我們可以觀察到在大部份的情況下，除了 $S_0 = 80$ 及 85，使用 QMC 來估計下界解會發生很大的偏誤，因為它們甚至大於真實解。這個反例告誡說使用 QMC 方法並非是全然安全的，然而很有趣的是這些偏誤都可以被 martingale 控制修正。修正結果展示在第五欄當中，可以看出加入了控制之後的 MCV 方法，確實得出下界解的估計。這些結果都很強烈的說明出避險 martingale 事實上對 MC/QMC 方

法中扮演著平滑者的角色，使得這些模擬方法能夠更有效的被使用。

再來看對偶的方法，第七個欄位紀錄了上界解估計以及它們的標準誤差，顯示在括號中。由方程式 (4-7) 我們可以得到這些 MC+CV 的估計式。注意到對偶估計式的建置，如方程式 (4-6) 所述，很自然的就要求 martingale 的控制當中，因此就不需要再討論沒有 martingale 的例子了。

從這些上界估計的結果中，可以觀察的到，第一，這些估計確實都在真正的解的上方；第二，標準誤差跟在第三欄位中所示，使用 martingale Control 估計出的下界解的標準誤差是同一個尺度。一般來說 QMC 方法並不太適合非常高維度的計算，但是從這個美式選擇權的例子來說，我們可以看的出 QMC+CV 這個方法它在上界的估計中所表現的精準度都跟 MC+CV 的方法一致，這也告訴我們 QMC 方法在高維度的估計裡面是可以被信賴的，如果我們的估計式是比較平滑的。由於美式選擇權評價問題的複雜性相當高，我們在此僅強調利用避險 Martingale 所產生的平滑性對評價的正確性來說，佔有很重要的地位，更多關於這樣的討論請見 Han and Lai (2010 b) 的論文。

第五節 敏感度估計(Sensitivity Estimation)

不管從風險管理的角度或是投資以建立組合部位的角度，衍生性金融商品，特別是非線性的選擇權，價格的敏感係數的估計佔了十分重要的地位。除非選擇權價格具封閉解，否則以上的敏感係數並不容易估計。若選擇權價格是由蒙地卡羅法估計出來，則敏感係數的估計意味著

- (1) 以相當精準的蒙地卡羅法，極可能結合變異數縮減法。
- (2) 以類似如下的中央差分法逼近敏感係數

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) \approx \frac{P(t, S_t + \Delta_x/2) - P(t, S_t - \Delta_x/2)}{\Delta_x}$$

由於步驟(2)會產生偏誤，因此愈高次的偏微分估計，誤差就不免愈大。Malliavin 微積分，見 Malliavin and Thalmaier (2005) 與 Nualart (2009)，提供了以蒙地卡羅法來計算偏導數的一種方式，但由於它的理論較為堅澀，並且實際上似乎並沒有被廣泛接受，因此我們在此忽略這個方法。反之，我們提供兩種一般微機分的應用：路徑 (Pathwise) 微分法與概似 (Likelihood) 微分法。

以對歐式選擇權的 Delta 計算為例，讀者便可一窺究竟。根據定義 $P(t, x; \theta) = E[e^{-r(T-t)}h(S_T)|S_t = x]$ ，有兩種簡易的做法：

(1) 利用 chain rule 可得 $\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} = E\left[e^{-r(T-t)}h'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial x}|S_t = x\right]$

(2) 若 S_T 的邊界分布已知，則 Delta 為

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial x} = \int e^{-r(T-t)}h(z)\frac{\partial p(t, T; x, z; \theta)}{\partial x}dz$$

其中 $p(t, T; x, z; \theta)$ 表示為從時間價格 (t, x) 遷移到 (T, z) 的轉移機率密度函數 (transition probability density function)。再整理這兩種方法如下：

(1) 路徑微分法： $\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} = E\left[e^{-r(T-t)}h'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial x}|S_t = x\right]$

(2) 概似微分法： $\frac{\partial p(t, x)}{\partial x} = \int e^{-r(T-t)}h(z)\frac{\partial p(t, T; x, z; \theta)}{\partial x}dz$ 然後再試圖將積分式寫回一期望值的計算

其餘敏感係數估計可大致類推，嚴格來說，由於蒙地卡羅法的收斂速度慢，而敏感係數估計又要求要有高精度的選擇權價格的估計，因此對敏感係數估計問題的解決，與本章的主題在提高蒙地卡羅法的收斂效果是不謀而合的。

範例 5.1

以路徑微分法證明 Black-Scholes 模型下歐式買權的 $\Delta_t = N(d_1)$ 。

證明：

$$\begin{aligned}
\Delta_t &:= \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial S_t} \\
&= E^* \left\{ e^{-r(T-t)} I(S_T \geq K) \frac{\partial S_T}{\partial S_t} \middle| S_t \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} E^* \left\{ I(S_T \geq K) \frac{S_T}{S_t} \middle| S_t \right\} \\
&= N(d_1)
\end{aligned}$$

最後等式的獲得可利用 Girsanov 定理或附錄一中第六節測度轉換的範例 6.1。

第六節 個人化的超級運算：GPU 平行計算 (Personal Super Computation: GPU Parallel Computing)

對於一些大型複雜的科學計算問題，常將多台電腦（計算結點）串聯在一起，透過傳遞界面而形成一多電腦的系統，以進行高性能的計算。要達到這樣的目的，通常需要支出龐大經費來維護硬體以及聘請專業的平行資料程式語言（data parallel programming language）的人才。因此，只有大型或是國家級的研究機構才能建置大規模的多電腦系統。一般普羅科研人員，是難享其計算資源的。

近年來，多核中央處理系統（multi-core CPU）的普及，也使得平行計算的開發愈來愈流行。不過，受限於一般電腦或伺服器中 CPU 的數目（例如四核心或八核心），因此當計算量大時，多核心處理器系統的效能相對於前述之多電腦系統而言仍然相當有限，雖然目前 CPU 在設計上有往愈來愈多核心的方向的趨勢。

不論是多電腦系統或是多核心處理系統都倚賴於 CPU 的運算功能，但是在最近透過電腦顯示卡上的圖形處理器（Graphics Processing Units, GPU）的運算功能，平行運算已經變得愈來愈普及。有別於 CPU 設計的目的旨在完成複雜的運算工作，而 GPU 則是利用大量並功能簡單的運算單元，來平行化運算以整體提升運算能力。因此不難想像，CPU 運算較 GPU 昂貴且 GPU 十分適合平行運算。事實上，目前許多超級電腦皆採用 GPU 運算來輔助中央處理器（CPU）以進行更龐大的計算。

GPU 的普及緣起於個人電腦對圖形化作業系統的廣泛使用。在 1990 年代，GPU 主要提供了對於 2 維（2D）及 3D 圖像處理的加速功能。特別是在遊戲（Game）的應用需求中，GPU 的設計已經比中央處理器（CPU）還要複雜，並且提供了更便宜更強大的平行計算能力。在 2000 年初期，由於應用程式開發界面（Application Programming Interface; API）的限制，使得程式開發人員尚無法有效率的使用 GPU。然而這個障礙在 2006 年底由 NVIDIA 公司所推出的統一設備架構（Compute Unified Device Architecture, CUDA）得以解決。CUDA 架構允許 C/C++ 或 Fortran 等程式語言與 CUDA 的函式庫及函式結合。使得 GPU 更容易使用並且其在計算科學上的應用更為普及。CUDA Zone 這個網站（http://www.nvidia.com/object/cuda_home_new.html）包括了許多領域上成功使用 GPU 的案例，例如金融模擬、大氣模擬、影像處理、生物資訊、計算流體力學等等。事實上，根據 500 大超級電腦（<http://www.top500.org/>）的使用分析顯示，金融應用已佔了三分之一強，可見金融與電腦資訊的緊密結合淵源已久。

本章已提及在金融計算（Computational Finance）的領域中，已經發展出一些變異數縮減的技術，在「算法（Algorithm）」上提高蒙地卡羅的精準度。在此我們希望運用 GPU 強大的平行運算功能，進一步在「硬體」上以大量快速模擬的方式來提高蒙地卡羅的精準度。一般來說，GPU 的購買建置與 CUDA C 程式語言的撰寫需要花上一段時間適應。國家網路與高速電腦中心（NCHC）提供了豐富的資源，以下呈現的結果即承蒙該中心的大力協助才得以完成，在此表達感謝之意。

藉著引入平賭控制變異法，可以有效的增進基本蒙地卡羅法估計的精準度。我

們將以此估計式作為 MCV (平賭控制變異) 算法, 若將平賭控制 $M(P;T)$ 移除則為 BMC (基本蒙地卡羅) 算法。

6.1 數值結果

以下測試在一個樣本數為 819200 的大小下進行評價歐式選擇權之比較, 評價模型是根據隨機波動率模型 (stochastic volatility model) 中的單因子 Log-Vasicek 模型, 定義如下。

$$\begin{aligned} S_t &= \mu S_t dt + \exp(Y_t/2) S_t dW_{1t} \\ \sigma_t &= \exp(Y_t/2) \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t)dt + \beta(\rho dW_{1t} + \sqrt{1-\rho^2} dW_{2t}) \end{aligned}$$

模型參數的設定在本節最後的程式說明中, 數值計算如下表。

		GPU	CPU	速度
BMC (基本蒙地卡羅法)	期望值	17.1324	16.8473	X249
	標準誤差	0.0328	0.0305	
	計算時間	162.3 (ms)	40465 (ms)	
MCV (平賭控制變異法)	期望值	16.8030	16.8072	X157
	標準誤差	0.0037	0.0037	
	計算時間	454.3 (ms)	71535 (ms)	
Accuracy (精準度)	Variance Reduction Ratio (變異數縮減)	X76	X65	

主要的觀察有以下兩點：

- (1) 算法上：MCV 的標準誤差遠小於 BMC 的標準誤差, 這表示 MCV 的算法十分精準, 分別達到了近 250 倍與 150 倍的差距。

(2) 硬體上：不論對 BMC 或是 MCV 的算法，在 GPU 上的計算時間遠小時在 CPU 上的計算時間。

可看出結合 MCV 平賭控制變異法與 GPU 平行計算能達到最佳的運算效能。比起標準 BMC 在 CPU 上的計算，前者的精準度提高了近七十倍而且計算時間少了近一百倍。若將此二效應相乘，則可達數千倍的效能，效果實在驚人！此外我們也測試了雙因子 Log-Vasicek 模型（two factor Log-Vasicek model），數值結果非常類似，顯示 MCV-GPU 的運算方式相當穩定。

未來預計將此運算方式應用到第六章中關於 Monte Carlo 對選擇權價格之模型校準的實證應用。在 Han et al. (2011) 的論文中提出兩階段方法，並根據一隨機波動模型對隱含波動率曲線（implied volatility curve）進行模型校準。雖然配適的結果令人滿意，不過在整個運算是在 CPU 上使用 Matlab，其所花費的計算時間約為 30 分鐘。從以上的 GPU 實驗結果顯示，結合平賭控制變異法與 GPU 的平行運算總和起來可提高上千倍的效能，因此我們預期此模型校準的計算時間可從原來的數十分鐘縮短至數秒以內，大幅提高了在實務上的應用價值，使得線上交易資料分析的可能性大幅增加。

程式說明

(1) 檔案架構

Cuda		
單因子程式：	EuroSVCall_LogVasicek.cu	更改程式 Mode 部分來變換使用之方法：（原始設定 Mode 1 ） 1：基本蒙地卡羅法 others：平賭控制變異法
LogVasicek（單因子）		
執行檔：	LogVasicek.exe	執行單因子模型

主程式： <i>EuroSVCall_Payoff_BMC+MCV.cpp</i>	更改程式Mode部分來變換使用之方法：（原始設定Mode 1） 1：基本蒙地卡羅法 others：平賭控制變異法
--	--

(2) 可調整參數（參數設定）

<i>EuroSVCall_LogVasicek</i>
<pre>// Monte-Carlo Method (line 23)</pre> <p>（調整要顯示之方法：1為基本蒙地卡羅法，其他則是控制變異法）</p> <pre>#define Mode 1 // 1: Basic Monte-Carlo, others: MCV</pre>
<pre>// data Size (line 24)</pre> <p>（樣本數目/蒙地卡羅次數可以做更改）</p> <pre>#define DATA_SIZE (8192*100)</pre>
<pre>// Finance (line 29)</pre> <p>（可以根據模型參數的不同做改變）</p> <pre>#define alpha 0.01 #define beta 0.1 #define rho -0.7 #define m -2.0</pre>
<pre>// #### Finance initial value setup #### (line 302)</pre> <p>（根據狀況不同可以做更改）</p> <pre>float s0 = 100; // Asset float k = 100; // Strike float r = 0.05; // Interest rate float v0 = -2; // Volatility float t0 = 1; int no_steps = 100; // Max number of steps = 1000;</pre>

(3) Cuda 程式架構說明

主程式 `int main()`

```
##### Finance initial value setup #####
```

設定初始值

```
// Host memory allocation
```

```
// Device memory allocation
```

分別定義CPU以及GPU的記憶體

```
// submit CUDA Kernel
```

✧ `EuroSVCall_Payoff_BMC_Sampling<<<128,128>>>... : 執行基本蒙地卡羅法`

✧ `EuroSVCall_Payoff_MCV_Sampling<<<128,128>>>... : 執行平賭控制變異法`

✧ `EuroSVCall_Payoff_Mean<<<128,128>>>... : 將在上述其中一種方法執行之結果，`
將每個block中所有thread加總（剩下128個加總的值）

✧ `psum<<<1,128>>>... : 將上述的128個加總的值在進行加總並除以樣本數`
（819200）得到平均

✧ `EuroSVCall_Payoff_SE<<<128,128>>>... : 將在上述其中一種方法（BMC或MCV）`
執行之結果，將每個block中所有thread減去平均在平方後知答案加總（剩下128
個加總的值）

✧ `psum<<<1,128>>>... : 將上述的128個加總的值在進行加總並除以樣本數減`
一（819200-1）得到變異數

```
//Print Ans
```

```
printf("European call option with Stochastic Volatility\n");
```

```
printf("BMC value = %f\n", EV_value);
```

```
printf("BMC SE = %f\n", sqrt(SE_value/DATA_SIZE)); //計算標準誤差 (standard  
error)
```

```
printf("European call option with Stochastic Volatility\n");
```

```
printf("MCV value = %f\n", EV_value);
printf("MCV SE= %f\n", sqrt(SE_value/DATA_SIZE)); //計算標準誤差 (standard error)
```

```
function EuroSVCall_Payoff_BMC_Sampling<<<128,128>>> ...
```

```
const int tid = threadIdx.x;
```

```
const int bid = blockIdx.x;
```

```
int id = bid * blockDim.x + tid;
```

```
// Threads' global id=block的ID*一個block有幾個thread+在該block中的thread ID
```

```
for(int j=0;j<no_steps;j++){
```

此for迴圈之中計算各切割後時間點的隨機波動率以及資產價格

```
Price[j] = expf(-r*t0)*PMAX(s[no_steps]-k,0.0);
```

計算選擇權的折現價格

```
function EuroSVCall_Payoff_MCV_Sampling <<<128,128>>>...
```

概念與EuroSVCall_Payoff_BMC_Sampling<<<128,128>>> ...相同，但加入control控制進去

```
for(int j=0;j<no_steps;j++){
```

```
control += exp(-r*t[j])*delta_bsm_call(s[j],k,r,sigbar,t[no_steps-j])*sig1[j]*s[j]*
dt_root[0]*w[j];
```

```
}
```

對值每一個切割後時點進行control並加總

```
Price[j] = (expf(-r*t0)*PMAX(s[no_steps]-k,0.0) - control);
```

計算選擇權價格扣除control即是控制變異法得到的價格，並進行折現得到折現價格

```
functionEuroSVCall_Payoff_Mean<<<128,128>>>...
```

```
functionEuroSVCall_Payoff_SE<<<128,128>>>...
```

```
functionpsum<<<1,128>>>...
```

```
EuroSVCall_Payoff_Mean<<<128,128>>>...和
```

```
EuroSVCall_Payoff_SE<<<128,128>>>...
```

```
for(inti = bid * blockDim.x + tid; i < DATA_SIZE; i += gridDim.x * blockDim.x) {}
```

分別先進行了每一個thread中的Price[i]進行加總或是減去平均在平方後加總

```
_syncthreads(); //確保上述工作執行完全完成
```

```
if(tid < 64) { shared[tid] += shared[tid + 64]; } _syncthreads();
```

```
if(tid < 32) { shared[tid] += shared[tid + 32]; } _syncthreads();
```

```
if(tid < 16) { shared[tid] += shared[tid + 16]; }
```

```
if(tid < 8) { shared[tid] += shared[tid + 8]; }
```

```
if(tid < 4) { shared[tid] += shared[tid + 4]; }
```

```
if(tid < 2) { shared[tid] += shared[tid + 2]; }
```

```
if(tid < 1) { shared[tid] += shared[tid + 1]; }
```

```
if(tid == 0) { result[bid] = shared[0]; }
```

進行個別block中的值加總，將每個block中的thread分兩半，分別加總，持續進行直到一個block只剩下一個值

(4) 自行測試

一、環境介紹

Cuda (GPU) 測試環境	
Device :	GTX480 *3
Driver Version :	4.0
Runtime Version :	4.0
Capability Major/Minor version number :	2.0

CPU :	<i>Intel i7-930 Quad-Core (2.80 GHz)</i>
RAM :	<i>DDR3-1333 24GB UDimm</i>
C++ (CPU) 測試環境 :	
CPU :	<i>Intel Core2 (2.80 GHz)</i>
RAM :	<i>2GB</i>

二、自行測試參數與狀態設定

<i>Single factor Log-Vasicek Model</i>			
DATA_SIZE	= (8192*100)	no_steps (時間切割數目)	=100
alpha	=0.01	beta	=0.1
rho	=-0.7	m	=-2.0
s0 (初始價格)	=100	k (執行價)	=100
r (利率)	=0.05	v0 (初始波動率)	=-2
t0 (單位時間)	=1		

PART III

**金融統計與
實證研究**

**(FINANCIAL
STATISTICS AND
EMPIRICAL STUDIES)**

Chapter 5

波動率估計

本章學習重點

- 第一節 簡介波動率
- 第二節 傅立葉轉換方法估計瞬時波動率—無母數方法
- 第三節 修正後傅立葉轉換方法—偏誤降低
- 第四節 應用一：瞬時波動率與波動率指數的線性假說
- 第五節 隨機波動率模型之參數估計
- 第六節 應用二：對 Taixex 進行一因子隨機波動率模型之參數估計
- 第七節 Dupire 公式：隱含局部波動曲面
- 第八節 波動率指數：市場濾波器
- 第九節 變異數／波動率契約
- 第十節 波動率的離散模型
- 第十一節 小結

Use as little modeling as possible. And, if have to use a model, it's always good to use more than one.

~ E. Derman

波動率，亦稱為波動度，在金融上被用來衡量一具風險性資產「噪音程度」。在現貨市場（spot market）中，例如對權益型證券（equity security）來說，波動率與資產報酬在實證經驗上往往存在著強烈的負相關，即所謂的槓桿效應（leverage effect）；且波動率本身也存在著某些如均數回歸（mean reversion）、叢聚性（cluster）、與持續性（persistence）等典型特質。因此在實務上，波動率往往成為重要的估計量，以進一步提供有用的訊息給市場參與者或金融監理機構。相對的，在衍生品市場（derivative market）中，由於選擇權市場的日益興盛，其訂價理論，如 Black-Scholes 選擇權訂價公式，的一重要參數已知為波動率。因此不論在現貨與選擇權市場或是在學術研究與實務交易上，波動率的重要性不言而喻。

在學理上，由於波動率與市場風險因子（如布朗運動）共同出現，因此它無法直接觀測得到。波動率的估計方法長期以來就是一個具關鍵地位的研究課題。尤其是當高維度資產，高交易資料頻率，或具微結構噪音（microstructure noise）（見 Bandi et al. (2008)）等情況，「波動率矩陣（volatility matrix）」（見 Malliavin and Mancino (2009)）的估計更是充滿了許多的挑戰性。於是整合波動率（integrated volatility）、實現波動率（realized volatility）、瞬時波動率（instantaneous volatility）、隱含波動率（implied volatility）、波動率指數（volatility index）、波動率衍生品（volatility derivative）等詞彙（見 Gatheral (2006), Hull (2008) 與 Zhang and Mykland (2005)）一一被定義或發展出來以分別出波動率在現貨市場與衍生品市場中的許多樣貌，這些皆有助於人們瞭解並應用其資訊內涵，以達成在資本市場中的交易或風險管理的目的。

計量經濟學（Econometrics）主要是應用了統計學的方法對經濟，財金等資料進行分析。在對波動率估計這方面的文獻上，首推在離散時間下 ARCH/GARCH 等模型的建立，分析與應用。Robert Engle 教授因對這些波動率離散模型的基礎貢獻榮獲

了 2003 年的諾貝爾經濟學獎。關於這一系列模型的描述與估計方法，請見 Tsay (2005)；亦可見 Engle (2009) 討論波動率，甚而在高維度資產的相關性上，以及對選擇權訂價、避險、投資組合、風險管理等領域的應用。相對於離散時間的波動率模型，在連續時間下也有十分豐富的討論，例如 Heston 模型，有跳躍與無跳躍的隨機波動率模型等，時間改變的波動率模型 (time change volatility models)。關於這些模型的描述與估計方法，有許多關於濾波理論 (filtering theory)，馬可夫鏈蒙地卡羅 (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 等方法，可參考 Tsay (2005)，Molina et al. (2010)，或 Broto and Ruiz (2004) 與 Yu (2010) 等文獻回顧。

第一節 簡介波動率(Introduction to Volatility)

有了文獻上這麼多的關於波動率的模型，吾人可問到底哪一種模型比較好呢？甚至可以問一定要使用模型嗎？然而答案往往是跟使用者的目的有關：例如，從選擇權定價的觀點而言，複雜的波動率模型，在模型校準 (model calibration) 方面的表現較佳，見 Christoffersen et al. (2009)。然而，複雜的模型所提供的避險效果未必較好。Yung and Zhang (2003) 在對美國 S&P 500 指數選擇權的避險實證研究時發現，以 GARCH 模型所估計出的波動率，其避險效果並不優於簡單的隱含波動率。

以下討論三種波動率，包括了歷史波動率，隱含波動率，以及瞬時波動率。其中前兩者廣泛的被使用，且估計方法十分容易；最後一個波動率則是近來由 Malliavin and Mancino (2009) 利用一無母數傅立葉轉換所得。基於瞬時波動率在隨機財務理論及應用的重要性，我們在此會詳加討論其估計方法與相關應用。

(一) 歷史波動率 (Historical Volatility)

定義為一序列資產價格的標準化對數報酬率 (Standardized Log Return) 的標準差。詳細描述如下，給定資產價格的一組歷史資料，令 S_i 為資產 S 之時間序列的第 i 個價格， Δt_i 為年化後相鄰價格的時間間隔 (如 S_i 均為日資料時， $\Delta t \approx 1/252$) 則 (年化) 歷史波動率的估計式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad (1-1)$$

其中 $X_i = \ln(S_i/S_{i-1})/\sqrt{\Delta t_i}$ 是價格的標準化對數報酬率， \bar{X} 為其平均值， n 代表所有報酬率的總個數。

範例 1.1

從網頁 Yahoo Finance (finance.yahoo.com) 下載美國 S&P 500 指數及其波動率指數 (VIX)，交易代號 (ticker name) 分別為 ^GSPC 與 ^VIX。資料期間為從 2001 年 1 月 02 日到 2007 年 12 月 30 日的日資料。對 S&P 500 指數使用 30 個交易日作為採樣期間的長度並以連續移動資料來估計一序列的歷史波動率。畫出這些指數與波動率的摺線圖並加以比較。

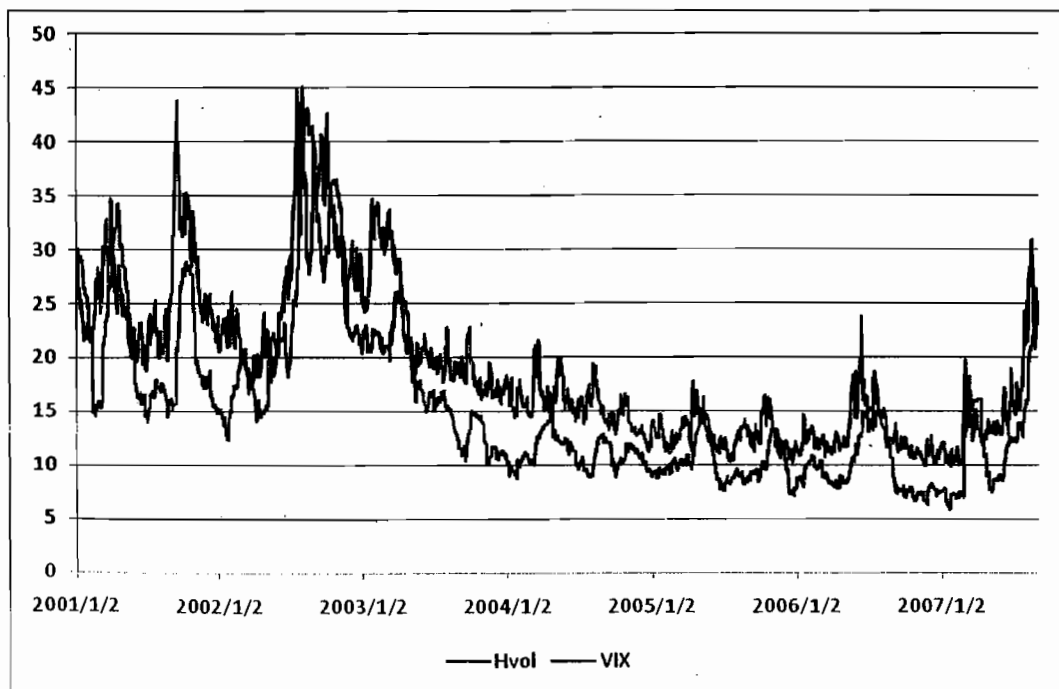


圖 1-1 美國 S&P 500 指數 30 天期歷史波動率與波動率指數 (VIX) 的比較

上圖是美國 S&P 500 指數以移動窗口的方法計算 30 天期之歷史波動率。不難立即看出歷史波動率會隨著時間而有所改變，並非全如 Black-Scholes 模型中所假設之「常數」波動率。另外可觀察到幾個典型事實 (stylized fact) 如下。這些波動率 (含 VIX) 與指數間會呈現強烈的負相關，稱為槓桿效應 (leverage effect)；當波動率大 (小) 時，常會伴隨大 (小) 波動率，稱為叢聚效應 (cluster effect)。

若考慮與時間相依的過程 σ_t ，不論是否為隨機， σ_t 稱之為在時間 t 的「瞬時」波動率。假設在成長率 μ 為 0 的簡化情形下，Black-Scholes 模型可被推廣為

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dW_t。$$

在工程上有所謂的濾波問題 (filtering problem)，其一般的形式如下：所觀察到的訊號 Y_t 是真實的訊號 X_t 被以相加的方式滲入雜訊。也就是說，在實驗的過程中 $Y_t = X_t + \text{雜訊}$ 。如何在給定 Y_t 與在一些關於雜訊的假設下，估計出最佳的 X_t 呢？濾波問題有相當古典的結果，譬如說 Kalman-Bucy 濾波器 (filter)。但注意到在上式中，觀察值 dS_t/S_t 乃具有相乘而非相加的結構。讀著或許會考慮將上式平方後取對數，這樣做就可將「相乘」的訊號變為「相加」的訊號，不過由於雜訊的結構亦隨之改變，以至於傳統的濾波技術仍不見得能夠用來解決瞬時波動率的估計問題，一般需要搭配其它統計分析上的技術，如 MCMC 或 GMM (generalized method of moments) 等，來加以解決。

以上所談的財務模型及選擇權定價理論都是假設時間是連續的情形下，在文獻上平行發展著另一支著重於離散時間的模型，且有很成功應用的學術領域是計量經濟學 (Econometrics)。1982 年 Robert Engle 提出了自我迴歸型式的條件變異數不齊一性 (autoregressive conditional heteroscedasticity, ARCH) 模型，用以描述波動率並非常數的時變 (time-varying) 行為，其後產生了許多如廣義 ARCH (Generalized ARCH, GARCH) 等波動率模型，並成為分析經濟上時間序列的重要方法。因著 ARCH 模型的開創性工作，Engle 與從事共整合 (con-integration) 的 Clive Granger 共同分享了 2003 年諾貝爾經濟學獎的桂冠。對離散模型及其統計分析方法有興趣的讀者，請見 Tsai (2003) 與 Engle (2009) 的專書。以下我們仍然回到連續時間的架構。

作業 1.1 從台灣證券交易所網頁 (www.twse.com.tw)¹ 下載兩種不同頻率下臺灣證券交易所發行量加權股價指數 (TAIEX)。

(一) 日資料：指數為從 2010 年 8 月 2 日到 2011 年 8 月 1 日的日資料。

歷史波動率的估計是用了 30 個交易日作為採樣期間長度。

(二) 15 秒高頻資料：指數為 2011 年 8 月 1 日每 15 秒的高頻資料，歷史

波動率的估計是用 241 筆為固定的採樣期間長度。畫出指數與波動率的折線圖並加以比較。

範例 1.2

在 Black-Scholes 模型下，對高頻資料來說，歷史波動率的估計式 (1-1) 會十分接近於以下利用二次變分 (quadratic variation) 的估計式 (1-2)，其所推導如下。從對數價格的二次變分為 $\langle \ln S, \ln S \rangle_T = \sigma^2 T$ ，這個簡單的結果帶出了對常數波動率的估計式

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \ln^2(S_{t_{i+1}}/S_{t_i})}。 \quad (1-2)$$

此外在 Black-Scholes 模型下，式 (1-1) 中定義的 $X_i = \ln(S_i/S_{i+1})/\sqrt{\Delta t_i}$ 是某個時間 t 下 $d\ln S_t/\sqrt{dt}$ 的近似。因此，利用 $d\ln S_t/\sqrt{dt}$ 是由 $(r - \sigma^2/2)\sqrt{dt}$ 與一個 martingale 項所組成的性質可得 $\bar{X} = E[X_i] \approx (r - \sigma^2/2)\sqrt{\Delta t_i} \approx 0$ ，當 $\Delta t_i \approx 0$ 。這就是說在高頻資料下，估計式 (1-1) 與 (1-2) 相近。

備註：一般來說，高頻資料的分析處理較為困難。一方面是資料量相當龐大，另一方面是資料所呈現的模式相當複雜，例如多重時間尺度，微噪音影響等。隨機分析的技巧如這裡介紹的二次變分或是稍後介紹的傅立葉轉換方法，均為提供高頻資料下波動率估計的可能方案。

¹ 依序首頁 > 產品與服務 > 指數編製與授權 > 本公司自行編製指數 > 發行量加權股價指數及產業分類指數。

作業 1.2 分別使用作業 1.1 中的日資料與 15 秒高頻資料，比較估計式(1-1)與(1-2)的誤差情形。

(二) 隱含波動率 (Implied Volatility)

給定選擇權市場中關於某到期日 T 與某履約價 K 之歐式買權 (或賣權) 的成交价格，利用 Black-Scholes 的評價公式反推出 σ ，稱作「隱含波動率」(implied volatility)，通常也記做 $\sigma_{imp}(T, K)$ 。此量代表了市場參與者對於標的物未來波動情況的預期。

隱含波動率是否唯一呢？注意到在到期日前給定其它的參數與變數，歐式買權及賣權的 Vega 值相等且為正：

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x) = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma}(t, x) = Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\sqrt{T-t} > 0$$

這個性質確保了隱含波動率存在的唯一性，但注意到在任一時刻隱含波動率並不只有一個，它是與選擇權契約中的到期日 T 以及履約價 K 有關的一個函數。嚴格來說使用 $\sigma_{imp}(T, K)$ 這個符號來表達隱含波動率才是正確的。

在金融市場上，很多指數選擇權契約都將到期日以及月份固定，一般來說是最接近連續的 3 個月份，接著每個季月 (3、6、9、12 月) 的這些月份中第三週的週三是到期日，通常最遠月的到期日不會超過兩年。在給定不同的到期日 T 與履約價 K 後，對應的隱含波動率就形成了一個離散曲面，自然的稱之為隱含波動率曲面 (implied volatility surface)。這個曲面透露出市場對未來波動情形的看法，因此如何解讀這個重要的訊息成為金融工程中的重要課題。

對一個計量分析師 (quantitative analyst, Quant) 而言，經常性在盤中或盤後利用一些數學模型來擷取隱含波動率曲面的訊息，這個動作稱為模型校準 (model calibration)。其意義是先取得市場波動的最新訊息，並將之用於評價其它的選擇權或進行避險等風控行為，以期與市場風險狀況一致。這就是所謂的「按市價計值

(mark to the market)」。

範例 1.3 波動率微笑曲線 (implied volatility smile/smirk)

在固定的到期日下存在許多履約價，這些隱含波動率 (Y 軸) 與在 X 軸的 LMMR (Log Moneyness to Maturity Ratio; 定義為 $\ln(K/S_t)/(T-t)$) 往往存在著一些典型的曲線模式，稱之為微笑曲線如下圖所示，選擇權價格資料擷取日期如圖中所示，並且這些選擇權的到期月份是最近月。

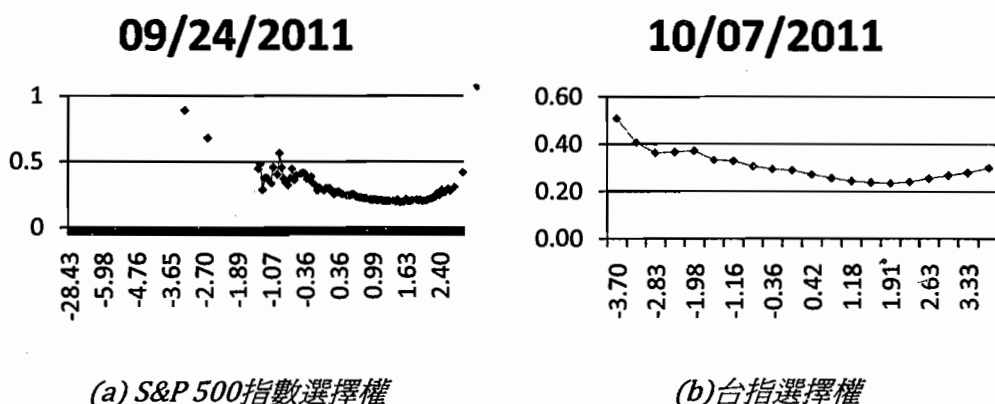


圖 1-2 隱含波動率與LMMR關係圖

作業 1.3 試比較這些隱含波動率曲線，並自行在 Yahoo Finance 以及臺灣證交所中下載最近的指數選擇權價格，並且畫出隱含波動率曲線。(可利用 Matlab 中的指令 `blsimpv.m` 來計算隱含波動率。)

(三) 瞬時波動率 (Instantaneous Volatility)

顧名思義，瞬時波動率描述了一特定時間當下資產的波動情形。許多文獻試圖利用無母數方法來估計瞬時動率。例如以二次變分 (quadratic variation) 先計算整合波動率 (integrated volatility) 後，對總時間長度做微分，就可以用數值方法計算出近似的瞬時波動率 (參見 Anderson et al. (2001)、Zhang and Mykland (2005) 與其

中參考文獻)。Malliavin and Mancino (2009) 指出此做法的結果並不穩定，且易受資料頻率的影響，在實務上較不可行。該文提出一無母數傅立葉轉換，在連續時間半鞅 (semi-martingale) 過程的架構下估計市場之瞬時波動率。由於該方法基於計算變異數過程的傅立葉係數 (非計算二次變分)，需要計算時間數列的積分 (非微分)，因此他們宣稱該方法特別適用於高頻率時間數列分析與資產的動態波動率，或較廣義的相關矩陣 (correlation matrix)，的計算。

以下我們詳細介紹此無母數傅立葉轉換法 (nonparametric Fourier transform method) 來估計瞬時波動率 (instantaneous volatility)。此外當一個隨機的波動率模型參數需要被估計時，通常可由常見的估計方法如最大概似估計法 (maximum likelihood method) 另外進行推估。

第二節 傅立葉轉換方法估計瞬時波動率—無母數方法 (Fourier Transform Method for Instantaneous Volatility Estimation—a Nonparametric Method)

由於本書大部份僅討論單一資產，如臺灣加權指數 (TAIEX) 或美國 S&P 500 指數，故僅介紹一維度傅立葉轉換方法 (Fourier transform method) 的理論如下。事實上本節所介紹的方法皆適用於任何有限維度的「波動率矩陣」之估計。

令 u_t 為標的資產價格 S 在時間 t 的自然對數值，即 $u_t = \ln(S_t)$ ，並遵循以下擴散過程：

$$du_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

其中 μ_t 是瞬時成長率， W_t 是一維標準布朗運動。將資料期間 $[0, T]$ 依序映射至 $[0, 2\pi]$ ，則連續過程 $u(t)$ 的傅立葉轉換的定義是對 $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(u)(k) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{i}{k} \left[\frac{1}{2\pi} (u(2\pi) - u(0)) - \mathfrak{F}(du)(k) \right].\end{aligned}$$

最後的等式是由部份積分法得到，其中瞬時對數報酬 du_t 在頻率為 k 的傅立葉係數 $\mathfrak{F}(du)(k)$ 被定義為

$$\mathfrak{F}(du)(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ikt) du_t.$$

定義 Φ 及 Ψ 兩個函數的波爾卷積 (Bohr Convolution Product) 如下：

$$(\Phi *_B \Psi)(k) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \Phi(s) \Psi(k-s).$$

Malliavin and Mancino (2009) 證明出在頻域 (frequency domain) 下，瞬時變異數的傅立葉係數為

$$\frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}(\sigma^2)(k) = (\mathfrak{F}(du) *_B \mathfrak{F}(du))(k), \text{ 對於 } k \in \mathbb{Z}.$$

這個等式的收斂性是在機率中 (in Probability) 的意義下成立的。因此，在時域 (time domain) 下瞬時變異函數 $\sigma^2(t)$ 可由反傅立葉轉換 (inverse Fourier transform) 算出

$$\sigma^2(t) = 2\pi \mathfrak{F}^{-1} \left((\mathfrak{F}(du) *_B \mathfrak{F}(du))(k) \right)$$

作業 2.1

證明當頻率 $k=0$ 時，

(1) 整合波動率 (integrated volatility) $\int_0^{2\pi} \sigma^2(t) dt$ 可表示為

$$(2\pi)^2 (\mathfrak{F}(du) *_B \mathfrak{F}(du))(0).$$

(2) 在給定 log 價格 u 的抽樣期間 $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = 2\pi\}$ 以及定義符號

$\delta_j(u) = u(t_j) - u(t_{j-1})$ 下，證明

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} \sum_{j=1}^n \sum_{j'=1}^n e^{is(t_j - t_{j'})} \delta_j(u) \delta_{j'}(u) = \int_0^{2\pi} \sigma^2(t) dt$$

範例 2.1

從上述作業中，可以歸納出整合波動率的一個傅立葉估計式 (Fourier estimator) 如下：

$$\hat{\sigma}_{n,N}^2 := \sum_{j=1}^n \sum_{j'=1}^n D_N(t_j - t_{j'}) \delta_j(u) \delta_{j'}(u)$$

其中

$$D_N(t) := \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\frac{t}{2}}$$

稱為 Dirichlet kernel。

證明：

$$\text{驗證 } \sum_{|s| \leq N} e^{ist} = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\frac{t}{2}} \text{ 即可。} \quad \blacksquare$$

實證文獻上，如 Reno (2008)，指出傅立葉轉換法在估計瞬時波動率時間數列的邊界表現不佳。Han et al. (2010a, 2010b, 2010c) 藉著標的資產報酬與其瞬時波動率之關係，改進了原始傅立葉轉換方法。他們發現運用此一修正後傅立葉轉換方法 (corrected Fourier transform method) 所估計出之瞬時波動率，在對匯率與 S&P 500 指數的風險值 (Value at Risk) 估計，回溯測試 (backtesting)，以及對臺指與 S&P 500 指數選擇權的避險效能上等，皆有很好的表現。

上述瞬時波動率估計方法之教學型的介紹如下，可參考 Han et al. (2010a, 2010b)。

步驟1：計算標的資產 u_t 的傅立葉係數

² Mancino and Sanfelici (2008) 進一步證明出此傅立葉估計式在微結構噪音 (microstructure noise) 下仍為穩健 (robust)，相較於其他傳統的估計式會隨著噪音變大而發散的情形，顯然具有優勢。

$$a_0(du) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du_t \quad (2-1)$$

$$a_k(du) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) du_t \quad (2-2)$$

$$b_k(du) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt) du_t \quad (2-3)$$

該運算中係對所有自然數 $k \geq 1$ ，且傅立葉級數可重建為

$$u(t) = \frac{\int_0^{2\pi} u_t dt}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{b_k(du)}{k} \cos(kt) + \frac{a_k(du)}{k} \sin(kt) \right]$$

原時間數列區間 $[0, T]$ 在該積分中都可一對一的映射至 $[0, 2\pi]$ 。

作業 2.2 試下載一段時間的股價，取 \ln 後，與重建後的傅立葉級數做比較。

步驟 2：計算變異數 σ_t^2 的傅立葉係數如下：

$$a_k(\sigma^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N-k} [a_s^*(du) a_{s+k}^*(du) + b_s^*(du) b_{s+k}^*(du)] \quad (2-4)$$

$$b_k(\sigma^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N-k} [a_s^*(du) b_{s+k}^*(du) - b_s^*(du) a_{s+k}^*(du)] \quad (2-5)$$

其中 $k \geq 0$ ， $a_s^*(du)$ 與 $b_s^*(du)$ 定義為

$$a_s^*(du) = \begin{cases} a_s(du), & \text{if } s > 0 \\ 0, & \text{if } s = 0 \\ a_{-s}(du), & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

與

$$b_s^*(du) = \begin{cases} b_s(du), & \text{if } s > 0 \\ 0, & \text{if } s = 0 \\ -b_{-s}(du), & \text{if } s < 0 \end{cases}.$$

步驟 3：重新建構變異數 σ_t^2 之時間數列

$$\sigma_t^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \varphi(\delta k) [a_k(\sigma^2) \cos(kt) + b_k(\sigma^2) \sin(kt)] \quad (2-6)$$

其中 $\varphi(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ 為一平滑函數(smooth function)，亦稱作 Fejer Kernel。其初始

條件 $\varphi(0) = 1$ 且 δ 為平滑參數 (smooth parameter)，通常設定為 $\delta = 1/50$ (參見 Reno (2008))。

觀察方程式 (2-1) - (2-3) 可得知，傅立葉係數的積分誤差與資料頻率成反比。也就是說，愈高頻的資料愈有利於傅立葉轉換方法。另注意到此方法十分容易在電腦程式上執行，如方程式 (2-4) 與 (2-5) 所示，乃由於變異數之傅立葉係數可被 a^* 與 b^* 之有限乘積和近似。因此，該方法可規避傳統對二次變分後作微分的方法所導致的缺點。

第三節 修正後傅立葉轉換方法一偏誤降低 (Modified Fourier Transform Method - Bias Reduction)

然而 Reno (2008) 提出警告，傅立葉轉換法在估計的波動率時間數列的邊界表現不佳，即估計波動率的前 1% 與最後 1% 的時間數列資料較不精確。Reno 建議摒棄邊界的波動率估計，但該折衷方法會造成實際應用上的缺失。其中的一個例子是，若去除最近 1% 的波動率估計值將會扭曲短期波動率的預測，例如預測一日的波動率。為了避免這種邊界效果所造成的計算偏誤，Han 等人 (2010) 提出藉著標的資產價格之報酬與其波動率之關係，以修正原始傅立葉轉換方法。該方法只需要解一由最大概似估計法導出的迴歸方程式，相當容易進行數值運算。此外，該方法的優點包括(1)觀察的資料沒有遺漏，以及(2)減少傅立葉轉換產生的波動率偏誤。該文對隨機波動率模型 (stochastic volatility model) 的一些模擬研究發現，均方根誤差與最大絕對誤差都有效減少一半以上。

Han et al. (2010) 所提出之傅立葉轉換的價格修正方法節錄如下。對上述之傅立葉轉換方法所估計之變異數過程 σ_t^2 之對數值進行線性轉換，其中取對數值的目的是要確保修正後的波動率為正。也就是說，先將波動率之對數值 $\hat{Y}_t = 2\ln\hat{\sigma}_t$ 轉換成

$a + b\hat{Y}_t$ ，使得轉換後後的波動率 $\sigma_t = \exp\left(\frac{a+b\hat{Y}_t}{2}\right) > 0$ ，以及滿足 $\Delta u_t \approx \exp\left(\frac{a+b\hat{Y}_t}{2}\right)\sqrt{\Delta_t}\varepsilon_t$ 。其中 $\Delta u_t = u_{t+1} - u_t$ ， a 與 b 代表修正係數， ε_t 代表獨立同分配的標準常態隨機變數。此線性轉換可理解為波動率非線性轉換的一階近似。然後，吾人可以最大概似估計法與回歸分析法，藉由標準化報酬率 $\Delta u_t/\sqrt{\Delta_t}$ 的平方與波動率過程中之 $a + b\hat{Y}_t$ 的下列關係，來估計修正係數 a 與 b ：

$$\ln\left(\frac{\Delta u_t}{\sqrt{\Delta_t}}\right)^2 = a + b\hat{Y}_t + \ln\varepsilon_t^2 \quad (3-1)$$

為了進一步驗證此修正後傅立葉轉換方法的有效性，我們考慮以局部波動率模型及隨機波動度模型作為模擬測試。

3.1 模擬測試一：局部波動率

採用 Jiang (1998) 的局部波動率的利率模型如下：

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \beta r_t^\gamma dW_t \quad (3-2)$$

其中 W_t 為一維度的標準布朗運動。其均值回歸率 α 的估計值為 0.093，長期均值 m 為 0.079，波動率中之波動率 β 為 0.794，且指數 γ 為 1.474。再使用尤拉離散法 (Euler discretization) 進行對利率過程 (3-2) 之抽樣，以一年為時間單位，離散時間均為 1/5000。根據所抽樣的 5000 筆利率樣本 (則 5000 筆的真實局部波動率時間序列為 $\sigma_t = \beta r_t^\gamma$)，進行原始傅立葉轉換方法與修正後傅立葉轉換方法估計。

在估計誤差上，我們發現原始傅立葉轉換方法所得到的均方根誤差 (mean squared error) 為 7.53E-04，最大絕對誤差 (maximum absolute error) 為 0.04；而修正後傅立葉轉換方法所得到的均方根誤差為 1.19E-05 且最大絕對誤差為 0.02，可見原始傅立葉轉換法的偏誤大幅下降。若將離散時間設為 1/500，則根據所抽樣的 500 筆利率樣本，我們發現原始傅立葉轉換方法 ($\delta = 1/6$) 所得到的均方根誤差與最大絕對誤差分別為 1.44E-05 與 0.0103；而修正後傅立葉轉換方法所得到的均方根誤差與最大絕對誤差分別為 2.80E-06 與 0.0046。以上的兩個模擬結果皆再次地顯示出我

們驗證了修正後傅立葉轉換法的有效性。

3.2 模擬測試二：隨機波動率

設定一隨機波動度模型服從 Ornstein-Uhlenbeck 的形式，其定義如下列方程式 (3-3) 所述。一因子的隨機波動率模型如下，稱之為 log-Vasicek：

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \exp(Y_t/2) S_t dW_{1t} \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta dW_{2t} \end{cases} \quad (3-3)$$

其中 S_t 為標的物價格過程， μ 為瞬時成長率， W_{1t} 與 W_{2t} 為可相關的兩個標準布朗運動。瞬時波動率過程 σ_t 定義為 $\exp(Y_t/2)$ ， m 為長期平均 (long-run mean)， α 為均值回歸率 (mean-reverting rate)， β 是波動率的波動率 (volatility of volatility)， Y_t 為一均值回歸的 log-Vasicek 模型 (或稱之為 Ornstein-Uhlenbeck Process)。

模型參數設定如下： $\mu = -0.01$ 、 $S_0 = 50$ 、 $Y_0 = m = -2$ 、 $\alpha = 5$ 、 $\beta = 1$ 且 $\rho = 0$ ，時間的離散長度 $\Delta t = 1/5000$ 。我們模擬波動率序列 $\sigma_t = \exp(Y_t/2)$ 以及資產價格序列 S_t ，並根據 (i) 原始傅立葉轉換方法以及 (ii) 原始傅立葉轉換方法搭配價格修正法，可估計出兩組波動率序列，與真實波動率序列比較後，計算其誤差。Mean squared errors (MSE) 以及 Maximum absolute errors (MAE) 為我們使用的兩個比較誤差之準則，比較的結果如下：

1. Mean squared error：0.0324 (原始傅立葉轉換方法)；0.0025 (修正後傅立葉轉換方法)
2. Maximum absolute error：0.3504 (原始傅立葉轉換方法)；0.1563 (修正後傅立葉轉換方法)。

從模擬的結果，可觀察到我們至少降低了一半的誤差。類似的估計結果，亦可在其它很大量模擬結果中觀察到。值得注意的是我們所提出的價格修正法，如方程式 (3-1) 所示，是基於一個簡單的最大概式估計法而來，因此很容易使用且可有效降低波動率的估計偏誤。另在此修正法下，修正後傅立葉轉換方法在此階段仍然是

保持了原始傅立葉方法免模型 (model-free) 的特性，因為並沒有任何隨機波動模型參數會出現在迴歸方程式 (3-1) 中。

第四節 應用一：瞬時波動率與波動率指數的線性假說 (Application I: Hypothesis of Linearity between the Instantaneous Volatility and VIX)

VIX (Volatility Index) 即波動率指數，是由美國芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 所編制，細節可見本章第七節或 Hull (2011)。它是由 S&P 500 指數之價外選擇權，依據其履約價給定不同的權重，所定義出來的指數，以用來衡量 S&P 500 股票市場未來的風險程度。因此，VIX 也稱為恐懼指數。

Zhang and Zhu (2006) 證明出 VIX^2 與瞬時變異數 (瞬時波動率的平方) 在 Heston 模型下存在著線性關係。假設在風險中立測度下瞬時變異數 V_s 遵循以下的開根號過程：

$$dV_s = [\alpha m - (\alpha + \lambda)V_s]ds + \beta\sqrt{V_s}dW_s,$$

其中， m 定義為長期平均， α 為均值回歸率， β 為變異數的變異數， W_s 為標準布朗運動， λ 則是測度轉換下的波動率風險溢酬。藉由對上式取期望值可得

$$dE_t[V_s] = \alpha m - (\alpha + \lambda)E_t[V_s]ds. \quad (4-1)$$

此式為一線性常微分方程式，不難解出

$$E_t[V_s] = \frac{\alpha m}{\alpha + \lambda} + \left(V_t - \frac{\alpha m}{\alpha + \lambda}\right)e^{-(\alpha + \lambda)(s-t)}$$

此處條件期望值 $E_t[\cdot]$ 之計算是在時間 t 的資訊下給定一風險中立的機率測度。如上述 VIX^2 定義為變異交換率，我們可以用下列式子來評價之：

$$\begin{aligned} \text{VIX}_t^2 &= E_t \left[\frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} V_s ds \right] \\ &= \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} E_t(V_s) ds \end{aligned}$$

該 τ_0 定義為 $\frac{30}{365}$ 。綜合以上，可以推得 VIX^2 與瞬時變異數 V_t 在 Heston 模型下的線性關係：

$$\text{VIX}_t^2 = A + BV_t,$$

其中 $A = \frac{\alpha m}{\alpha + \lambda} \left[1 - \frac{1 - e^{-(\alpha + \lambda)\tau_0}}{(\alpha + \lambda)\tau_0} \right]$ 與 $B = \frac{1 - e^{-(\alpha + \lambda)\tau_0}}{(\alpha + \lambda)\tau_0}$ 皆為常數。以下我們推廣上述在 Heston 模型下所得出瞬時變異數與 VIX 平方之線性關係的結果。

假設瞬時波動率 σ_t 服從一均值回歸過程如下

$$d\sigma_t = \alpha(m(t) - \sigma_t)dt + g(\sigma_t)dW_t \quad (4-2)$$

其中所有的(函)數均使得此隨機微分方程的解 σ_t 存在並唯一，且幾乎處處(almost surely) $\sigma_t \geq 0$ 。利用 Ito's Lemma 可得到

$$d\sigma_t^2 = (2\alpha m(t)\sigma_t - 2\alpha\sigma_t^2 + g^2(\sigma_t))dt + 2\sigma_t g(\sigma_t)dW_t。$$

並

$$dE[\sigma_t^2] = (-2\alpha E[\sigma_t^2] + h(t))dt \quad (4-3)$$

其中， $h(t) = E[2\alpha m(t)\sigma_t + g^2(\sigma_t)]$ 為一僅依賴於時間的確定性的函數(deterministic function)。雖然第(4-3)式比第(4-1)式多出了一非齊次項(inhomogeneous term)，但仍屬可解的範疇，吾人可得

$$E[\sigma_t^2] = \sigma_0^2 e^{2\alpha t} - \int_0^t e^{2\alpha(s-t)} h(s) ds,$$

且 VIX^2 為

$$\begin{aligned} VIX_0^2 &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E[\sigma_t^2] dt \\ &= A + B\sigma_0^2 \end{aligned}$$

其中 $A = -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_0^t e^{2\alpha(s-t)} h(s) ds dt$ ，且 $B = \frac{1}{2\alpha\tau} (e^{2\alpha\tau} - 1)$ 。我們將此結果以下面引理做總結。

引理 4.1：

若瞬時波動率的動態行為服從更廣義的均值回歸過程如第 (4-2) 式，則瞬時變異數 σ_t^2 與 VIX_t^2 有如下的線性關係：

$$VIX_t^2 = A + B\sigma_t^2$$

以下的實證結果是建立在 VIX 與瞬時變異數的線性假說，如式 (4-3) 所述。利用無母數（修正後）傅立葉轉換方法估計出瞬時變異數，並驗證其與 VIX^2 的線性關係。實證資料為 2006/12/01~2011/04/25 臺灣發行量加權指數每日收盤價和其相對應台灣 VIX （新制，五個日曆換月），其來源為台灣經濟新報資料庫。運用修正後傅立葉轉換先得到臺灣發行量加權指數的瞬時變異數，之後我們將使用 General Linear Test Approach，見 Kutner et al. (2005)，來檢驗 VIX^2 與瞬時變異數 σ^2 是否真的存在線性關係。

圖 4-1 標示出瞬時變異數和臺指選擇權 VIX^2 的折線圖。接著利用上述的 General-Linear Test Approach 來檢驗迴歸係數的顯著性。在此我們的假設為

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0, \\ H_1: \beta_1 \neq 0. \end{cases}$$

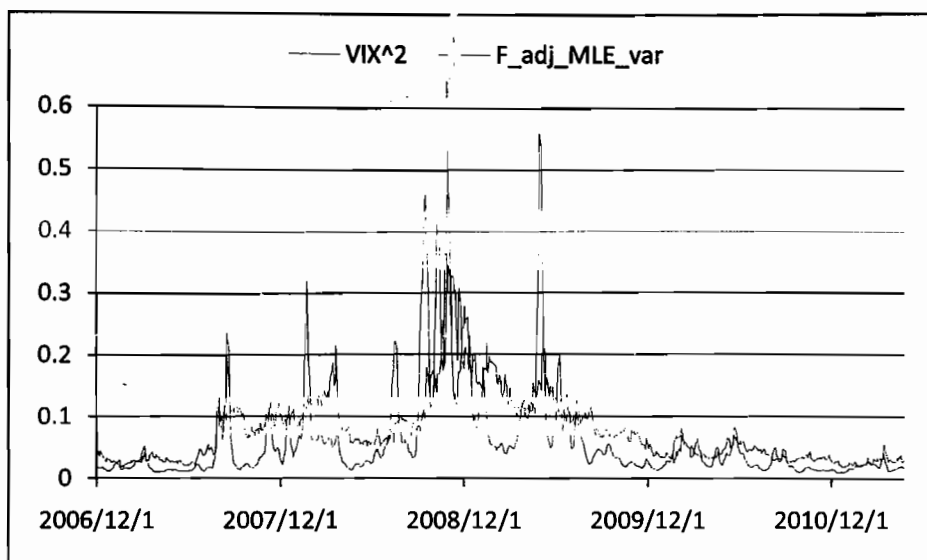


圖4-1 2006/12/01~2011/04/25瞬時變異數和臺指選擇權 VIX^2 的折線圖

而在對立假設下，模型為 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ 。我們可藉由最小平方方法得到此模型的誤差平方和（以 $SSE(F)$ 表示），可知 $SSE(F)$ 是一自由度為 $(n-2)$ （以 df_F 表示）卡方分配。相對地，在虛無假設下模型為 $Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$ ，可同上得到在此模型下的誤差平方和（以 $SSE(R)$ 表示），其為一自由度為 $(n-1)$ （以 df_R 表示）卡方分配。F 統計量定義為

$$F^* = \frac{\frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F}}{\frac{SSE(F)}{df_F}} \sim F(1 - \alpha, df_R - df_F, df_F),$$

其中 $(1 - \alpha)$ 為信心水準。給定資料量 $n = 1091$ ，我們根據最小平方方法所得到最適配置顯示在圖 4-2 當中，且其線性關係為 $VIX_t^2 = 0.048 + 0.491 V$ 。在 99% 的信心水準下，我們得到的 F 統計量如下：

$$F^* = 964.88 > F(0.99, 1, 1089) = 6.658214,$$

因而確認了迴歸係數的顯著性。

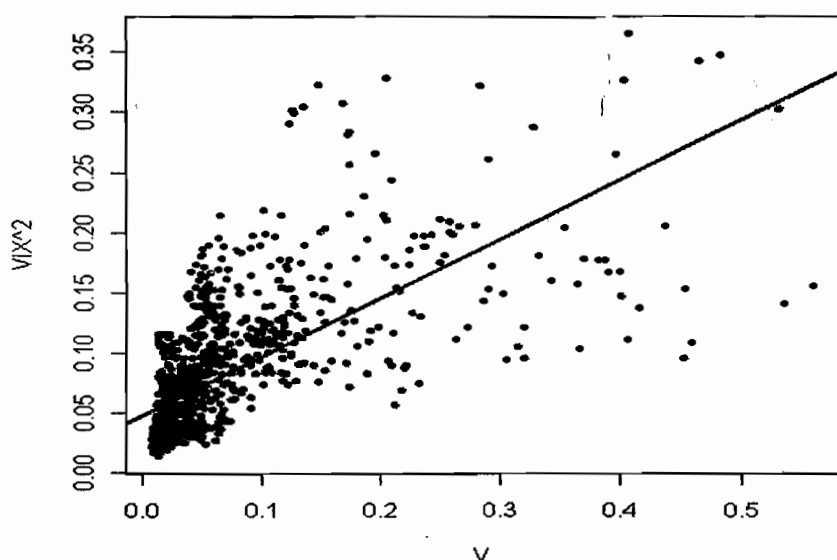


圖4-2 2006/12/01~2011/04/25瞬時變異數和臺指選擇權 VIX^2 的線性最適配置圖

第五節 隨機波動率模型之參數估計

(Parameter Estimation for Stochastic Volatility Model)

在許多情形下當市場參與者欲進行較複雜的交易行為時，往往不可避免的會使用到模型。相較於資產價格是可被觀察的，波動率乃是一隱藏變數（latent variable）。統計上來說一個如式（3-3）的隨機波動率模型的估計並不容易，有許多工作在這上面，見回顧文獻如 Yu（2010）與 Broto and Ruiz（2004）等。現在吾人可透過（修正）傅立葉轉換將此估計問題變得十分容易。其過程包括以下的兩個步驟，並以方程式（3-3）為例。

步驟 1：先使用修正後傅立葉轉換法估計出瞬時波動率 σ_t ， $\hat{Y}_t = 2\ln\sigma_t$ 即為已知。

步驟 2：藉由離散該 log-Vasicek 模型中的 Y 過程並運用最大概似估計法（Maximum Likelihood Method）計算出模型中的 (α, β, m) 三個參數。關於對模型參數 (α, β, m) 估計式的詳細推導可見 Han et al.（2010a），其結果節錄如下：

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{1}{\Delta_t} \left[1 - \frac{\left(\sum_{t=2}^N \hat{Y}_t \right) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right) - (N-1) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \hat{Y}_{t+1} \right)}{\left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right)^2 - (N-1) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t^2 \right)} \right], \\ \hat{\beta} &= \sqrt{\frac{1}{(N-1)\Delta_t} \sum_{t=1}^{N-1} \left[\hat{Y}_{t+1} - (\hat{\alpha} m \Delta_t + (1 - \hat{\alpha} \Delta_t) \hat{Y}_t) \right]^2}, \\ \hat{m} &= \frac{-1}{\hat{\alpha} \Delta_t} \left[\frac{\left(\sum_{t=2}^N \hat{Y}_t \right) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t^2 \right) - \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \hat{Y}_{t+1} \right)}{\left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right)^2 - (N-1) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t^2 \right)} \right].\end{aligned}$$

若隨機波動率服從 Heston 模型，也就是

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_{1t}, \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta \sqrt{Y_t} dW_{2t}, \end{cases}$$

則第一步驟中瞬時波動率過程 σ_t 為 $\sqrt{Y_t}$ ，而第二步驟中模型參數 (α, β, m) 的最大概似估計式為：

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{1}{\Delta_t} \left[1 - \frac{(N-1) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \frac{\hat{Y}_{t+1}}{\hat{Y}_t} \right) - \left(\sum_{t=1}^{N-1} \frac{1}{\hat{Y}_t} \right) \left(\sum_{t=2}^N \hat{Y}_t \right)}{(N-1)^2 - \left(\sum_{t=1}^{N-1} \frac{1}{\hat{Y}_t} \right) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right)} \right], \\ \hat{\beta} &= \sqrt{\frac{1}{(N-1)\Delta_t} \sum_{t=1}^{N-1} \left[\hat{Y}_{t+1} - (\hat{\alpha} \hat{m} \Delta_t + (1 - \hat{\alpha} \Delta_t) \hat{Y}_t) \right]^2 / \hat{Y}_t}, \\ \hat{m} &= \frac{-1}{\hat{\alpha} \Delta_t} \left[\frac{\left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \frac{\hat{Y}_{t+1}}{\hat{Y}_t} \right) - (N-1) \left(\sum_{t=2}^N \hat{Y}_t \right)}{(N-1)^2 - \left(\sum_{t=1}^{N-1} \frac{1}{\hat{Y}_t} \right) \left(\sum_{t=1}^{N-1} \hat{Y}_t \right)} \right].\end{aligned}$$

第六節 應用二：對 TAIEX 進行一因子隨機波動率模型之參數估計 (Application II: One-Factor SV Model Parameter Estimation for TAIEX)

本實證研究資料為臺灣發行量加權指數 (TAIEX)，下載之資料頻率為每 15 秒盤後交易指數、每日收盤交易指數以及每週收盤交易指數，其中高頻資料的期限為 2011/01/03~2011/03/31，來源是臺灣證券交易所。我們將時間分成三種不同的頻率：(1) 每 5 分鐘為一時間單位，以每個交易日為一期，每一期將會有 54 筆資料；(2) 每天為一時間單位，以 500 個交易日（兩年）做為一期，每一期有 500 筆資料¹³；(3) 每週為一時間單位，以 520 週（十年）做為一期，每一期有 520 筆資料¹⁴。在給定這三種資料採樣的頻率之下，我們預期將會估計出三種不同時間尺度的瞬時波動率。

6.1 高頻臺指波動率的日效應

一天之內的高頻波動率通常會呈現週期性，稱之為日效應 (Daily Effect)；意即在開盤和收盤階段波動率會比其他時段較高，整個波動率曲線會呈現中間下凹的 U 形狀 (U Shape)。圖 6-1 為 2011 年 2 月 10 日至 2011 年 2 月 15 日，每交易日以 15 秒為一單位的瞬時波動率（標示為 Vol）。不難發現在每天的開收盤，波動率皆有異常飆高現象。此日效應與文獻所記錄的現象相符，如 S&P 500 指數的高頻資料，見 Fouque et al. (2000)。

為了更精確的比較在不同時間尺度下的波動率，我們根據 Wild and Seber (1999) 的去季節 (deseasonalized) 效應法，將日內高頻波動率的季節效應去除，

¹³ 在此我們的資料使用的資料期間為 2009/01/08~2011/03/31。

¹⁴ 在此我們的資料使用的資料期間為 2000/12/30~2011/03/31。

如圖 6-1 標示為 Vol_Deseasonalized 之線。

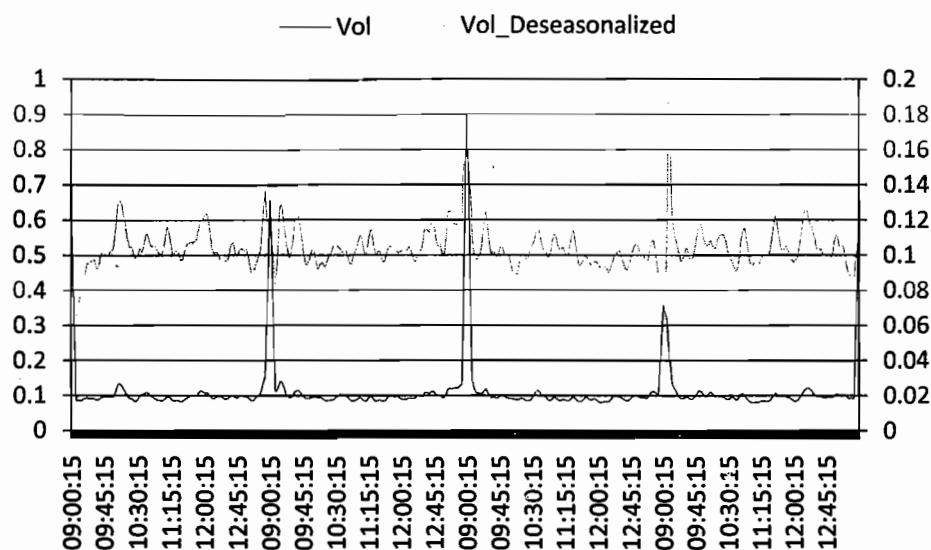


圖6-1 2011/02/10~2011/02/15每15秒TAIEX的瞬時波動率

6.2 波動率模型參數在不同資料頻率下的表現

利用上述修正後傅立葉轉換以及對 5 分鐘抽樣資料去除日效應等方法，我們對 2011/01/03~2011/03/31 的 TAIEX 資料期間，估計出在三種不同抽樣頻率下的瞬時波動率，並得到在 log-Vasicek 模型下三組不同的波動率模型參數(α, β, m)。

(一) 長期平均¹⁵： m

在此我們呈現 2011/01/03~2011/03/31 在三種不同抽樣頻率下波動率模型中的長期平均(m)的圖形，如圖 6-2。

現在我們可以試圖用波動率來解讀市場資訊。從圖 6-2 中不難發現，在日內高頻率下的波動率，較能確實反映出現在的市場資訊，隨著頻率的降低，很多市場資訊都會被過去的資料給平均掉。其中以 10 年週資料（標示為 1w_10y）的平均效果

¹⁵ 注意到此處的長期平均 m 是隨機波動模型中的一個參數，並非指價格波動率的長期平均。後者可大致由 $e^{m/2}$ （在 log-Vasicek 模型下）作為逼近。

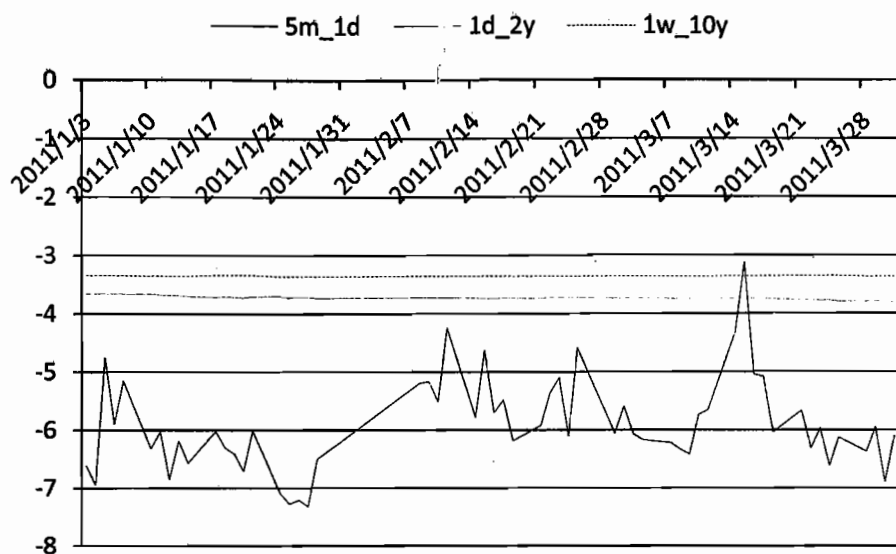


圖6-2 2011/01/03~2011/03/31波動率模型的長期平均(m)

最為明顯，該線幾乎為一條直線，顯示了長時間臺指波動率的固定風險。可從最高頻資料的波動率長期平均（標示為 5m_1d）中發現整個趨勢有兩大起伏點。2011 年為農曆新年，股市於 1 月 28 日封關、2 月 8 日重新開市，從圖 6-2 可觀察到農曆新年前後，市場波動率呈現截然不同的訊息。過年前許多投資人對後市看好，預期過完年後會開紅盤，整個市場波動率較低，市場呈現一片多頭。但在過完年後，外資大量賣超，從波動率的上升趨勢可看出市場的風險直線上升；過年後開盤那一個星期大盤跌將近 500 點，並且市場低迷一陣子。第二個市場波動率驟升的時間點為 2011 年 3 月 14 日後，由於日本 3 月 11 日發生大地震，發生時間點臺灣股市已收盤，因此並未影響 3 月 11 日的大盤指數。不過 3 月 14 日星期一開盤之後，日本地震所可能造成後續的不利影響，就逐漸反映在大盤指數上，甚至在 3 月 15 日當天大盤就跌了將近 300 點。不過日本地震過後，市場波動率立刻急遽上升，我們也可以輕易地從高頻波動率長期平均中觀察得到。

（二）均值迴歸率及波動率的波動率： α 、 β

除了長期平均外，我們也可以從參數 α 、 β 上觀察到波動率的確存在著不同時間

尺度。表 6-1 記錄了資料期間 2011/01/03~2011/03/31 中三種不同時間頻率下的參數估計的平均值及標準差。

表 6-1 2011/01/03~2011/03/31 三種不同時間頻率下的參數估計平均值及標準差

	α	(α_std)	β	(β_std)
5m_1d	11661.39	(2681.39)	114.83	(14.70)
1d_2y	23.81	(2.08)	6.29	(0.27)
1w_10y	2.62	(0.17)	2.18	(0.07)

從表 6-1 可以觀察到隨著時間頻率的增高，波動率的均值迴歸率 α 和波動率的波動率 β 也會跟著變大。可見波動率的確不單單只存在一個時間尺度，它是由許多不同時間尺度的因子所組合而成。高頻資料的資訊會被包含在低頻資料的訊息中，但如果我們使用低頻資料來估計波動率，我們就只能捕捉到低頻時間尺度之下的波動率，因為高頻率資料的訊息往往會被平均掉。

除此之外，亦可觀察到高頻率下波動率的另一個特色為 $\alpha \propto \beta^2$ 。這也符合 Fouque et al. (2000) 所提出的 fast mean-reverting stochastic volatility model：

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + f(Y_t) S_t dW_{1t}, \\ dY_t = \frac{1}{\varepsilon} (m - Y_t) dt + \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{\varepsilon}} dW_{2t}, \end{cases}$$

其中， $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{\varepsilon}}$ 。在此假設下， Y_t 過程的不變分配函數 (invariant distribution) 為一常態分布，其均值為 m ，變異數為 v^2 。這個事實對於本書第三章所描述之平賭控制變異法 (martingale control variate method) 的建構及分析具有關鍵的地位，亦可見 Fouque et al. (2007, 2008, 2009) 的詳細討論。

第七節 Dupire 公式：隱含局部波動曲面

(Dupire's Formula: Implied Local Volatility Surface)

關於波動率在歷史機率測度下的估計方法，如歷史波動率、瞬時波動率、及整合波動率，已在前面章節作了討論。以下進行波動率在風險中立的機率測度下的估計方法—Dupire's Formula，它在局部波動率模型（local volatility model）下完整刻劃歐式選擇權價格和隱含（局部）波動曲面的關係。這個理論上完美的結果與先前僅透過 Black-Scholes 公式所定義出的隱含波動率（implied volatility）有極大的差異，可以這麼說 Dupire's Formula 深刻啟發了波動率模型與選擇權價格間關乎模型校準（model calibration）的思考方向。

7.1 隱含風險中立分佈

令 S_t 為標的物的價格，且其歐式買權的價格被定義為 $C(0, T, x, K) := E^*[e^{-rT}(S_T - K)^+ | S_0 = x]$ 。另外假設 $\tilde{P}(0, T, x, y)$ 記為風險中立機率測度下從在時間 0 的價格 x ，記為 $(0, x)$ ，移動到 (T, y) 的轉移密度函數（transition density function），則下式成立

$$C(0, T, x, K) = e^{-rT} \int_K^{\infty} (y - K) \tilde{P}(0, T, x, y) dy。$$

連續對 $C(0, T, x, K)$ 的履約價進行兩次的偏導分別可得

$$\begin{aligned} C_K(0, T, x, K) &= -e^{-rT} \int_K^{\infty} \tilde{P}(0, T, x, y) dy \\ &= -e^{-rT} E^*[I(S_T > K)]， \\ C_{KK}(0, T, x, K) &= e^{-rT} \tilde{P}(0, T, x, K)。 \end{aligned}$$

從後式立即得到，隱含機率密度函數可由選擇權價格的二次偏微分而導出

$$\tilde{P}(0, T, x, K) = e^{-rT} / C_{KK}(0, T, x, K)。$$

這個結果亦稱為 Breeden-Litzenberger 公式 (Breeden-Litzenberger formula)。在推導著名的 Dupire's 公式之前，先介紹 Kolmogorov Forward Equation 的結果，此證明可見於 Shreve (2003)。

定理 7.1： Kolmogorov 前向方程 (Kolmogorov Forward Equation) 令隨機過程 X_t 服從了 $dX_t = \beta(t, X_t)dt + \gamma(t, X_t)dW_t$ 且 $P(t, T, x, y)$ 記為 (機率密度) 轉移函數，則它會滿足下面以 T 與 y 作為「前向」(forward) 變數的前向 PDE：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} P(t, T, x, y) = & -\frac{\partial}{\partial y} (\beta(t, y)P(t, T, x, y)) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\gamma^2(t, y)P(t, T, x, y)) \end{aligned}$$

7.2 Dupire 公式

之前提及如何解讀隱含波動率曲面。關於試圖解決這個問題的先驅者是 Bruno Dupire。頗令人訝異的是，他提出了隱含波動率可以完全由 Black-Scholes 訂價 PDE 的「對偶」PDE 來描述，這個結果的推導如下。令標的物的價格 S_t 服從一局部波動率模型如下

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t)S_t dW_t^*$$

其轉移函數會滿足

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \tilde{P}(t, T, x, y) \\ = & -\frac{\partial}{\partial y} (ry\tilde{P}(t, T, x, y)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2(t, y)y^2\tilde{P}(t, T, x, y)) \end{aligned} \quad (7-1)$$

由於

$$C(0, T, x, K) = e^{-rT} \int_K^\infty (y - K) \tilde{P}(0, T, x, y) dy \quad (7-2)$$

$$C_T(0, T, x, K) = -C(0, T, x, K) + e^{-rT} \int_K^\infty (y - K) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial T}(0, T, x, y) dy, \quad (7-3)$$

在假設邊界上極限值收斂到 0 的條件下，利用部份積分法可得

$$-\int_K^\infty (y - K) \frac{\partial}{\partial y} (ry \tilde{P}(t, T, x, y)) dy = \int_K^\infty ry \tilde{P}(0, T, x, y) dy, \quad (7-4)$$

類似的方式可得

$$\frac{1}{2} \int_K^\infty (y - K) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2(T, y) y^2 \tilde{P}(t, T, x, y)) dy = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \tilde{P}(0, T, x, y). \quad (7-5)$$

循序應用式 (7-3, 7-2, 7-1, 7-4, 7-5) 以及隱含機率密度函數，最後可推導出

$$\begin{aligned} C_T(0, T, x, K) &= e^{-rT} rK \int_K^\infty \tilde{P}(0, T, x, y) dy + \frac{1}{2} e^{-rT} \sigma^2(T, K) K^2 \tilde{P}(0, T, x, K) \\ &= -rK C_K(0, T, x, K) + \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 C_{KK}(0, T, x, K). \end{aligned}$$

由此，局部波動率可表成

$$\sigma^2(T, K) = 2 \frac{C_T(0, T, x, K) + rK C_K(0, T, x, K)}{K^2 C_{KK}(0, T, x, K)}. \quad (7-6)$$

Dupire 公式所隱含的啓發如下：

一、Dupire 公式僅僅假設了波動率在數學上較弱的局部性質，僅與時間、價格有關，學理上稱之為「局部波動率」(local volatility)。注意到這局部波動率不須滿足特定的函數形式，因此進一步具有免模型 (model free) 的特殊性質。Dupire 公式呈現出某種數學的美，它在較弱的條件下，讓市場上選擇權的交易資訊自動的決定出波動率；而非人為的先決定波動率的動態模式，如 Engle 所提出之 ARCH 等關於波動率的參數模型 (parametric model)，再以統計的方法配適出來。

關於在某種程度上免模型的數學結果，目前大部份是由漸進理論 (asymptotic theory) 所推導出來，見 Fouque et al. (2011) 及內附文獻，這樣的好處是具有對降低模型誤差 (model error) 的「強韌性」(robustness)。然而許多工作仍集中在對選

擇權市場使用特定模型的最佳配適上，例如 Heston 的隨機波動 (stochastic volatility) 模型，這些工作統稱為模型校準 (model calibration)，見 Gatheral (2006)，而且一般會牽涉到最佳化的問題。

二、Dupire 公式提供一種對隱含波動曲面的插值 (interpolation) 方式。由於選擇權市場僅提供有限的到期日 T 並有限的履約價 K ，在評價另一組不同 T 與 K 的選擇權價格時，交易員會需要知道對應的隱含波動率，以評量出符合市場風險的價格。由式 (7-6) 可以看出，若欲得到誤差小的隱含波動率插值，吾人需要在插值附近存在許多被交易的選擇權價格，以降低在逼近偏微分時的誤差。這件關乎插值的苦差事，至少在目前的市場上，交易資料尚無法滿足此數學公式的要求，縱使以其他例如 Spline 方法進行插值。另外的做法是拉回模型校準，想法是仍然去配適一個參數模型，然後以數值方法計算選擇權價格。這仍不失為一個可行的做法，只不過要隨時小心模型所可能產生的誤差，甚至要去規避因誤用波動率模型所可能產生的風險。

備註：Dupire 推論出局部波動率可完全由歐式選擇權價格導出。這個結果對金融工程有下面幾個重要的啟發

- (1) 在局部波動率的假設下，波動率與歐式選擇權價格滿足對偶於 Black-Scholes PDE 的方程。
- (2) 模型校準可以完全在風險中立的機率測度下進行。
- (3) 免 (局部波動率) 模型下的模型校準。不須在模型上強加要求局部波動率的確切形式，市場會自行決定。

第八節 波動率指數：市場濾波器 (Volatility Index-VIX: Market Filter)

每當主要的金融指數重挫時，有「恐慌指數」之稱的波動率指數 (Volatility Index, VIX) 便經常出現在一般的媒體上，成為衡量金融環境惡化程度的溫度計。當市場

景氣較好時，VIX 通常維持在較溫和，例如 10%~30%，的水準。然而在 2008 下半年爆發的全球性金融危機，VIX 曾高達 80%；在 2011 年 8 月初標準普爾信用評等公司（Standard & Poor rating company）調降美國主權評等後，美國股票市場大跌，而 VIX 也昇到 50%。這個恐慌指數如何產生？為什麼人們會如此廣泛的接受並引用它呢？我們將在本節中詳細討論。

上一節提到的 Dupire 公式以（偏）微分方法刻畫了局部波動率，雖然市場交易的選擇權並沒有多到可支持實際的運算，不過在觀念上「免模型」的想法卻為人珍賞並悄悄植入從事金融工程人士的心中，而波動率指數（Volatility Index, VIX）就是最好的範例。

關於 VIX 的編制也有一段曲折的發展歷程。俗稱投資人恐慌指標（The investor fear gauge）的 VIX，原先在美國芝加哥選擇權交易所（CBOE）於 1993 年 1 月推出，以 S&P100 指數之近月份及次月份最接近價平¹⁶的買權及賣權共八個序列的選擇權，對隱含波動率加權平均後所得之指數。2001 年推出以 S&P 500 指數為計算基礎之 VIX，分別計算所有近月份及次月份 S&P 500 指數選擇權之隱含波動率，再予以加權平均。而後於 2003 年更進一步推出以 S&P 500 指數選擇權價格加權平均後所定義出的 VIX，注意到先前都是以隱含波動率來作為定義。至此，波動率指數可說是「數學正確」了，而原有的編制指數仍然留用，只不過改稱為 VXO。以下我們說明 VIX 的定義。

接下來我們推導 VIX 公式。首先證明一個有趣的結果：整合波動率（integrated volatility），定義為波動率平方在時間 t 及 T 間的平均值，可用動態與靜態交易的方式複製而成，如下所示：

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds = \frac{2}{T-t} \left[\int_t^T \frac{dS_s}{S_s} - \ln \frac{S_T}{S_t} \right],$$

¹⁶ 注意到此處的長期平均 m 是隨機波動模型中的一個參數，並非指價格波動率的長期平均。後者可大致由履約價與標的資產價格相等。

其中動態複製 (dynamic replication) 的權重是交易標的價格的導數 $1/S_t$ ，而靜態複製 (static replication) 是賣出一對數報酬。

證明：

假設標的資產的模型服從一個連續的擴散過程 $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma_t dW_t$ ，注意到價格 S_t 的波動率可以變動並非如 Black-Scholes 模型。將價格取自然對數後得到 $d\ln S_t = (\mu - \sigma_t^2/2)dt + \sigma_t dW_t$ ，右項中的 $-\sigma_t^2/2$ 來自於 Ito's 公式的修正項。將兩式相減後取積分便可得證。

這個結果表達了整合波動率 $\int_t^T \sigma_s^2 ds / (T-t)$ 可以完全用動態的買賣股票 $\int_t^T 1/S_s dS_s$ ，以及靜態的賣出一個選擇權契約 $\ln(S_T/S_t)$ 的方式加以複製。不過由於對數契約在市場上並不存在，這個關係的實用性就下降了。所幸下面的結果進一步提供了對數報酬與期貨、買權與賣權的價平關係，整合波動率就可由市場所交易的證券進行完美的複製了。

引理 8.1：

固定一履約價 $K > 0$ ，對任一價格 $x > 0$ ，我們可得如下等式

$$-\ln \frac{x}{K} + \frac{x}{K} - 1 = \int_K^\infty (x-k)^+ \frac{dk}{k^2} + \int_0^K (k-x)^+ \frac{dk}{k^2}$$

備註：從上述的結果可知，一個對數契約 (Log contract) 可由一些期貨，買權及賣權的報酬所合成。這裡很有趣的觀察乃是它們的權重，依序為 $1/K, 1/k^2, 1/k^2$ 。

大寫的 K 指的是固定的履約價而小寫的 k 則為一變數。

證明：

首先觀察到右式等同於 $\int_K^x (x-k) \frac{dk}{k^2}$ 若 $x > k$ 、或者 $\int_x^K (k-x) \frac{dk}{k^2}$ 若 $x < k$

利用部份積分法即可證明出在任何一個情形都會等於左式。

將引理中等式折現後取條件期望便可得

$$E^* \left[e^{-r(T-t)} \left(-\ln \frac{S_T}{K} + \frac{S_T}{K} - 1 \right) \right] = \int_K^\infty C(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2} + \int_0^K P(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2}.$$

將左式中計算 $\ln \frac{S_T}{K} = \ln \frac{S_T}{S_t} + \ln \frac{S_t}{K}$ 且 $\ln \frac{S_T}{S_t} = \left(r(T-t) - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_s^2 ds \right) + \int_t^T \sigma_s dW_s^*$

帶入原式後移項可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T-t} E^* \left[\int_t^T \sigma_s^2 ds \right] \\ &= \frac{2}{T-t} \left(r(T-t) + \ln \frac{S_t}{K} - \frac{e^{r(T-t)} S_t}{K} + 1 + \int_K^\infty e^{r(T-t)} C(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^K e^{r(T-t)} P(t, S_t; T, k) \frac{dk}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (8-1)$$

在距離到期日 $T-t$ 固定為 30/365 之下， K 選在 S_t 附近時，上述結果即是 VIX 平方的數學定義。

CBOE 在編製 VIX 時加上一些技術上的修正如下，或逕見 CBOE 網站上 [vixwhite.pdf](#) 的詳細說明。

1. 式 (8-1) 中的遠期價格 $F_t \equiv e^{r(T-t)} S_t$ 由 put-call parity 得出，可參考第一章中的式 (4-10)。
2. 利用泰勒展開項逼近式 (8-1) 中的

$$r(T-t) + \ln \frac{S_t}{K} - \frac{e^{r(T-t)} S_t}{K} + 1 \approx -\frac{1}{2} \times \left(\frac{F_t}{K} - 1 \right)^2$$

3. 由於並非所有履約價的買賣權價格存在市場上，因此以有限的黎曼合來逼近式 (8-1) 中的積分如下，並且將式 (8-1) 中的左項記為 σ^2 ：

$$\sigma^2 \equiv \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (8-2)$$

其中，

T = 距離到期日 (time to maturity) 的時間 (年化)

K_0 = 第一個比遠期價格 F_t 小的履約價

K_i = 第 i 個價外選擇權的履約價

ΔK_i = 履約價區間，通常取為與 K_i 鄰近履約價格 K_{i+1} 與 K_{i-1} 差距的一半，

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}。$$

r = 無風險利率

$Q(K_i)$ = 選擇權 (以 K_i 為履約價) 買賣價的均值 (midpoint of bid-ask spread)

4. 使用 30 個天 (日曆日) 前後兩個到期日的選擇權價格，進行適當的權重後，再以下述的內外差分法，估算 30 天期的未來整合波動率 (future integrated volatility) 的期望值的方根：

$$VIX = 100 \times \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}} \quad (8-3)$$

其中，

T = 距離到期日 (time to maturity) 的時間 (分鐘數)

σ^2 = VIX 平方的數學公式

N_{T_1} = 距離最近月到期選擇權 (near-term option) 的時間 (分鐘數)

N_{T_2} = 距離次近月到期選擇權 (next term option) 的時間 (分鐘數)

N_{30} = 30 天 (日曆日) 的分鐘數 ($30 \times 1,440 = 43,200$)

N_{365} = 365 天 (日曆日) 的分鐘數 ($365 \times 1,440 = 525,600$)

作業 8.1 假設遠期波動率 (forward volatility) 有等比的性質 $\frac{1}{T_2 - T_1} E^* \left[\int_{T_1}^{T_2} \sigma_s^2 ds \right] = \frac{1}{T - T_1} E^* \left[\int_{T_1}^T \sigma_s^2 ds \right]$ ，其中 $T_1 < T < T_2$ ，導出式 (8-3) 中對 VIX 平方 σ_1^2 與 σ_2^2 的權重。

注意到，式（8-3）中 VIX 的定義與波動率的模型完全無關，並且可被避險複製，因此具強韌性。另外由於 VIX 可視為未來市場景氣的指標，在金融實務上善用 VIX 作為歷史資料模擬的情境測試（scenario test）與壓力測試（stress test），乃不失為一簡便的辦法。

作業 8.2 「自行編撰 VIX」：根據本章中作業 1.3 與上述 VIX 公式，分別編撰出臺灣以及 S&P 500 VIX，並與所公佈出來的 VIX 做比較。另試著算出 60 天或 90 天期的 S&P 500 VIX 並與 CBOE 網頁上所公佈出來的 VIX 期限結構

VIX 的成功除了在數學上的正確性之外，它能夠在金融市場上成為一個領先指標實為關鍵。首先不難用「肉眼」觀察到圖 8-1 中 VIX 與其標的 S&P 500 指數的關係，二者呈現了強烈的負相關，也就是金融上所謂的槓桿效應（leverage effect）。事實上，在樣本期間中 S&P 500 指數與 VIX 的相關係數高達-0.75。

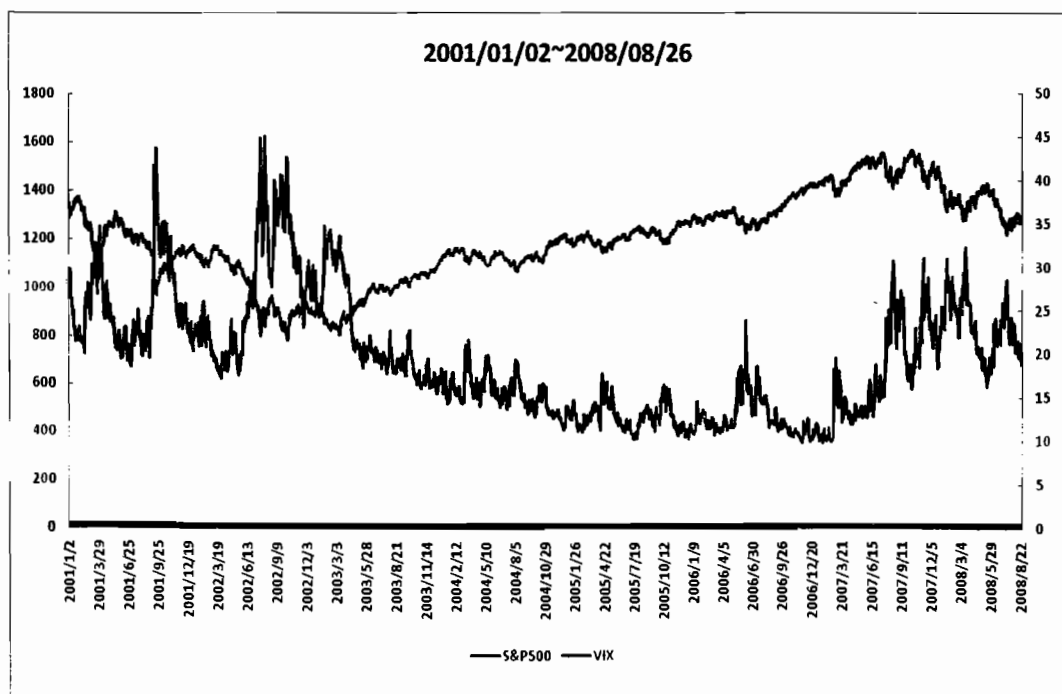


圖8-1 美國S&P 500與波動率指數（VIX）的比較

由於選擇權價格或隱含波動率可反應市場參與者對於標的物未來波動率的期望。在股價持續重挫時，VIX 會不斷攀升；反之，當股市穩定股價持續上漲時，VIX 則會較低。因此，透過觀察 VIX 的高低，甚至可以反推，市場參與者是否陷入恐慌而不計價格地買進賣權，或是透露市場參與者的過度樂觀，這也都有可能是反轉行情到來的時刻。總之，與其分析許多不同到期日與履約價的選擇權價格，現在由單一指數，也就是 VIX 波動率指數，可立即、明確的反映出選擇權市場參與者對於大盤後勢波動程度的看法，這對風險管理當然有重要的影響。

另外從 VIX 的行為來觀察，見圖 8-2，可以看出波動率具叢聚效應（cluster effect），高波動率之後的波動率通常也是較高的，反之亦然。將 VIX 與 30 天期的歷史波動率相比較，亦不難看出 VIX 是一個領先的指標。

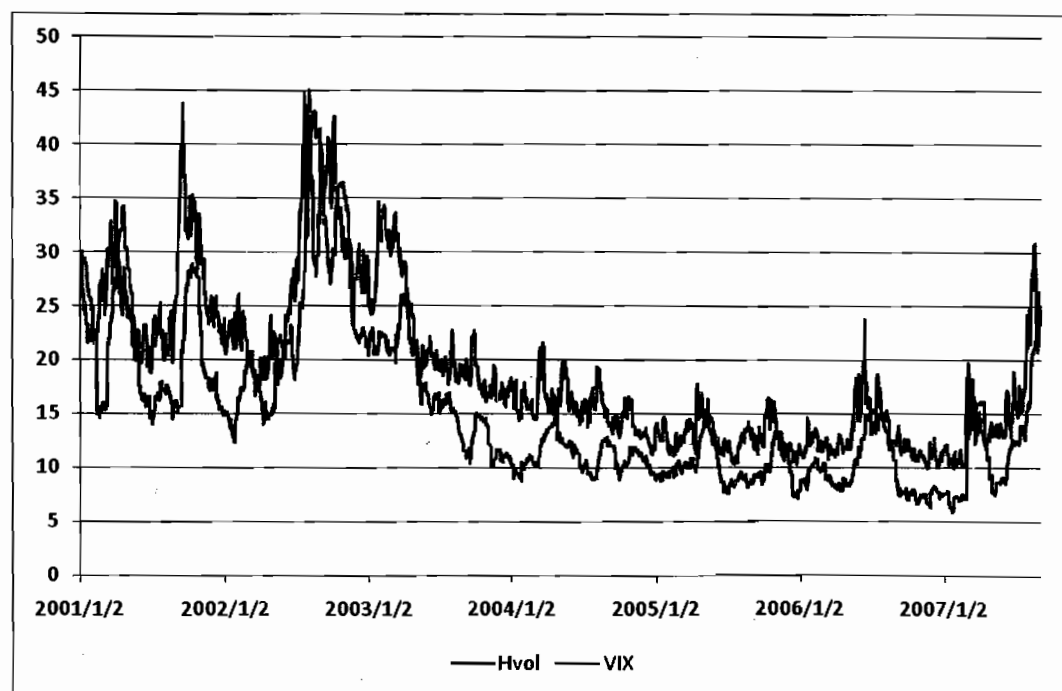


圖8-2 美國30天期歷史波動率與波動率指數（VIX）的比較

VIX 自從 2003 年的採用了「數學正確」的定義之後，便不斷受到金融市場與學術研究上的重視。在市場上，它甚至衍生出次一級的「波動率市場」以供轉嫁波動率之風險。對金融機構投資人，例如投資銀行，由於他們在選擇權上的曝險部位需要被控制，交易波動率成為一種有效的風險管理的辦法。以 VIX 為標的物之期貨於 2004 年 3 月 26 日在 CFE (CBOE 的期貨交易所) 開始交易，VIX 選擇權於 2006 年 3 月 24 日在 CFE 開始交易，三個月期的波動率指數，代號為 VXV，於 2007 年 11 月 12 日開始公佈，此外與 VIX 的期限結構等都是有趣的議題，相關發展可詳見 CBOE 網頁 www.cboe.com 上的介紹。學術上也提到，例如相較歷於史波動率，VIX 擁有較佳的資訊內涵，且對實現波動率有比較好的預測能力，不過 VIX 的動態行為仍呈現相當複雜的模式。見 Jiang and Tian (2005) 及其內附文獻。

關於波動率的估計至今並沒有公認的最佳方法，然而 VIX 的實用性就像是一個市場上的濾波器，它不倚賴於任何特別的隨機模型，自成一個簡易的指標來衡量市場風險。事實上，在本書第一章第五節選擇權訂價理論的基礎上，就可以進行 VIX 公式的推導了，可見 VIX 的觀念並不困難，不過它的使用卻如此頻繁，甚至於出現在一般的報導媒體上了。

讀者或許會關心臺灣金融市場的發展狀況。與歐美等成熟的市場相較，臺灣是相當年輕的。台灣證券交易所從 1962 年開始營運，1998 年臺灣期貨交易所開始營運，且在 2001 年 12 月推出「臺指選擇權」。直至今日，台指選擇權的交易量雖然很大(單一指數選擇權名列全球第四)，然而對很多廣大的股票投資人來說選擇權的觀念仍然很陌生。至於臺灣 VIX 的編制雖是參考 CBOE 的方式，不過它的使用情形為何呢？

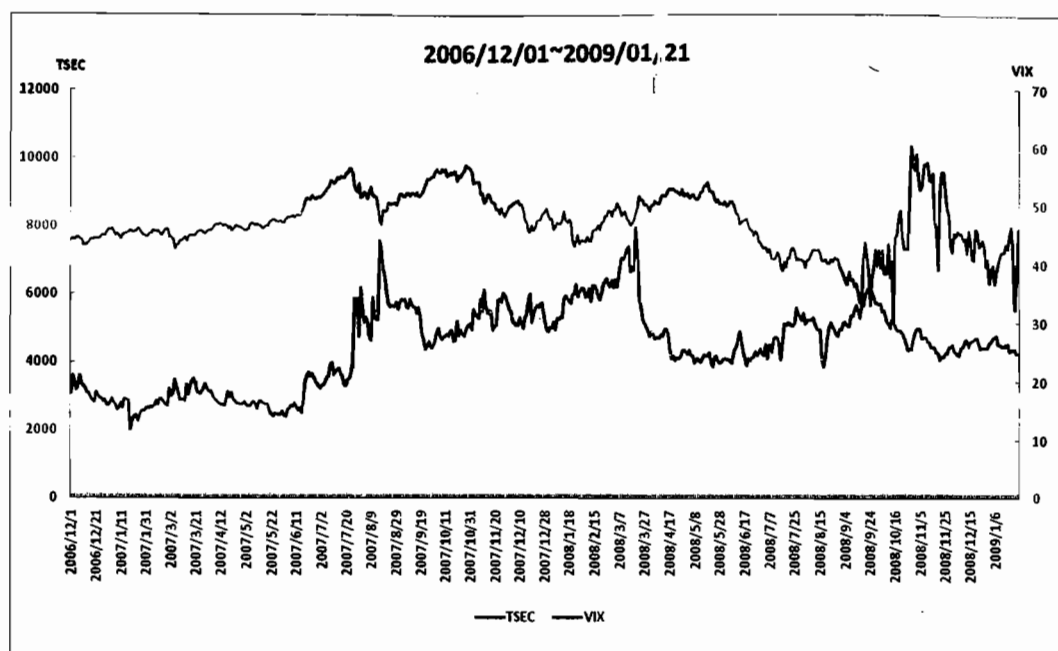


圖8-3 台灣加權股價指數 (TAIEX) 與台指選擇權波動率指數 (VIX)

我們已經從圖 8-1 美國 S&P 500 與美國 VIX 的關係圖，清楚看見股價指數與波動率指數間的負向關係。然而在圖 8-3 中台灣加權股價指數 (TAIEX) 與臺灣 VIX 的關係圖，資料期間為 2006/12/01~2009/01/21，觀察到在 2007/08 前，台指與其 VIX 並沒有很明顯的負向關係。事實上，在 2006/12/01~2007/08/07 年間，其相關係數為正的 0.5462；而在 2007/08/08~2008/12/31 年間，其相關係數才成為負的 0.7362。關於台指選擇權波動率指數至今仍不普及的原因，我們則留給讀者進一步思考與探索。

第九節 變異數／波動率契約

VIX 平方 (VIX^2) 等同於 30 個交易日的變異交換率 (Variance Swap Rate)，其可由一選擇權之投資組合所複製出來。近來與 VIX 有關的金融商品包括 VIX 期貨與 VIX 選擇權等，見 Luo and Zhang (2010)，其交易日漸熱絡。

變異數契約一般來說是標的資產年化波動率 (annualized volatility) 的一種遠期契約。變異數交換或是波動率交換是常見的變異數契約，交易對手大部分是金融機構彼此之間交換實現變異數 (波動率) 的曝險，以控制資產池中價格的波動情形。

一個變異數交換的報酬定義為履約價 K 與離散抽樣報酬率平方的平均 (average of discrete-sampled squared returns)

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2, \quad (9-1)$$

其中 N 是直到交割日的樣本天數， S_i 是第 i 天的標的資產價格。

式 (9-1) 在連續時間下會收斂到

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt, \quad (9-2)$$

稱作整合波動率，其中 σ_t 是標的資產的瞬時波動率。Black-Scholes 模型的架構下 (允許波動率與時間相關)，則整合波動率會與標的價格的自然對數並與 martingale 有關

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = rT - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^2 dt + \int_0^T \sigma_t^2 dW_t^*, \quad (9-3)$$

在風險中立機率測度之下。因此，由式 (9-1) 與 (9-3) 可得

$$E^* \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2 \right] \approx E^* \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right] = 2r + \frac{2}{T} (\ln S_0 - E^*[\ln S_T]). \quad (9-4)$$

另一種逼近實現變異數 (realized variance) 的辦法是利用泰勒展開式

$$\ln \frac{S_{i+1}}{S_i} \approx \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2.$$

因此式 (9-1) 可被漸進為

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2 \approx \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} + 2 \ln \frac{S_T}{S_0}$$

並且

$$E^* \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \right)^2 \right] \approx \frac{2}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} (e^{r\Delta t} - 1) + \ln S_0 - E^*[\ln S_T] \right)$$

其中 Δt 是年化後的資料抽樣時間。

Breeden and Litzenberger (1978) 觀察到一個平滑 (smooth) 的報酬函數可用歐式選擇權的投資組合來複製，這稱作「靜態複製 (static replication)」。上式中的 \ln 自然對數就可用一組買／賣權報酬函數加以複製。

常見的幾種變異數契約在連續時間下的報酬函數如下：

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt} - K \quad (\text{波動率交換})$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt - K \quad (\text{變異數交換})$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 1_{(a,b)}(S_t) dt - K \quad (\text{迴廊變異數交換})$$

第十節 波動率的離散模型

在本章一開始介紹歷史波動率時，波動率是由 \log 報酬率平方做了相等權重後的平均。一個推廣是時間比較接近的資料，應該占有比較大的權重。後來就衍生出下面兩種常見在離散時間 (discrete time) 上的波動率模型：EWMA 與 GARCH(1,1)。

指數加權移動平均 (exponentially weighted moving average, EWMA) 使用於 RiskMetrics 資料庫中。此法將一期的變異數 σ_t^2 假設為上一期報酬 r_{t-1} 平方與變異數的凸組合 (convex combination) 以確保為非負： $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$ 。當中的權重或稱為衰退因子 (decaying factor) λ 為變異數受前一期的影響程度，隨著時間漸漸增加，變異數對第一期變異數的記憶程度最終會呈現指數形的減少，因此 EWMA 具備了『記憶』的特質。RiskMetrics 中通常設定 λ 為 0.94，是財務時間序列

(financial time series) 中在處理日資料時，常被使用的一種簡易的離散時間模型。

GARCH(1,1)的模型結構如下：條件下的報酬序列服 $r_t|F_{t-1} = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t$ ， $\epsilon_t \sim N(0,1)$ ， $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ ，其中 F_{t-1} 表為累積到時間 $t-1$ 的資訊集合， μ_t 表為條件均值 (conditional mean)， σ_t^2 表為條件變異數 (conditional variance)。

GARCH(1,1)比 EWMA 多了模型參數 α_0 ，它與波動率的均數迴歸中的長期平均有關。相同的是，此二者都可以用 MLE 的方式很簡便的估計出模型參數，見 Tsay (2005) 與 Hull (2011)。我們會在第六章實證研究中的風險值估計，比較連續時間與離散時間波動率模型的表現效能。

》》》第十一節 小結

與前面幾章的數理或計算上的推論不同，本章從市場的資料出發，並導入了波動率的歷史發展與新的研究方法。一方面在歷史機率測度下，也就是使用了股價、指數等現貨市場的資料，探討了歷史波動率的兩種不同的估計式，以及估計瞬時波動率的新方法—母數的傅立葉轉換法。另一方面在風險中立的機率測度下，也就是使用了選擇權的衍生性市場資料，我們推導了 Dupire's 公式以及 VIX 的編制。「免模型」是本章的一個重要觀念，值得讀者深思。現貨與衍生品市場間的關係在第四節中做了探討，並會在下一章模型校準中進一步討論。

無疑的，波動率是現代金融的核心問題，其實務應用包括了交易策略與風險管理等，這些關係我們會下一章的實證研究中探討。另可見 Engle (2009) 在離散模型下的討論，與 Fouque et al. (2011) 利用漸進理論的相關結果。

Chapter 6

實證研究

本章學習重點

- 第一節 選擇權避險表現：Delta 與 Delta/Gamma 策略
- 第二節 風險管理：風險值、條件風險值與及回溯測試
- 第三節 Monte Carlo 對選擇權價格之模型校準

Indeed, the underpinning of our theories of finance is the choice between risk and return for all investors, and this requires everchanging assessments of risk in a world of such great and interesting complexity.

~ Robert Engle (2009)

本章探討三種應用，包括選擇權避險效能之比較，風險管理上風險值（條件風險值）的估計與回溯測試（backtesting），以及對隱含波動率曲面的模型校準等議題作探討。這些實證研究工作皆為本書前五章內容的綜合應用，也是金融實務中常見的議題。

第一節 選擇權避險表現：Delta 與 Delta/Gamma 策略 (Option Hedging Performance: Delta and Gamma/Delta Strategies)

本節針對美國 S&P 500 指數選擇權 (SPX) 與台灣加權股價指數選擇權 (TXO) 之買權進行每日避險效能之研究。交易手續費與稅額被考慮進避險成本，而平均損益與夏普指數被用來衡量避險投資組合之效能。為了規避市場價格風險與波動率風險，所測試之避險策略包括了 Delta 避險策略，調整後 Delta 避險策略，以及 Delta-Gamma 避險策略，亦搭配了歷史波動率、瞬時波動率及隱含波動率等波動率的估計方法。由於這些避險策略與波動率估計並不和標的資產波動率模型的特殊結構相關，因此在避險效能上可能具有強韌性。

在衍生性商品市場中，傳統的 Black-Scholes 定價理論（見第一章）對歐式選擇權的評價模型，是建構在標的資產價格（舉例而言，股價、利率、匯率）與其衍生性商品價格（期貨、交換、選擇權等等）的無套利（no-arbitrage）或是風險中立（risk-neutral）關係。此評價與避險理論之成立，是基於完備市場（complete market）

的假設之下，例如市場上沒有交易成本、證券的買賣可以連續進行、資產是可分割的等等。但實際上，投資人處在不完備市場（incomplete market）下，這使得無套利關係的假設無法滿足；也就是說，沒有一種策略能對一個衍生性商品的報酬（contingent claim）達到完全複製（perfect replication），即衍生性商品的風險無法完全規避。

近幾年對不完備市場的研究可謂如火如荼。相關研究可參見 Fouque et al. (2000) 及其參考文獻。在針對波動率的風險處理上，亦有許多令人振奮的進展，見 Gatheral (2006)。此外，關於指數選擇權的避險研究，Yung and Zhang (2003) 指出使用較複雜的波動率模型如 EGARCH 其避顯效能甚至比 Black-Scholes 模型的 Delta 避險差。這現象與定價模型在追逐複雜的資產動態是相異其趣的。

本節所討論之三種避險策略著眼於建構某些投資組合，以抑制市場價格風險（market price risk）及波動率風險（volatility risk）。在對指數選擇權的實證研究上，我們會建立標的資產之部位，除了與 Delta 值有關，有時會與隱含波動率微笑曲線（implied volatility smile curve）有關，例如調整後 Delta 避險策略（見 Fouque et al. (2000)），以消弭部份 Gamma 風險。因此，在資料處理上，對某個選擇權避險時，往往必須取用該月所有選擇權的價格來分析未來波動率的可能發生的變化。若欲在投資組合中進一步消除 Gamma 風險時，則可建立其它次近月指數選擇權的部位，這就是 Delta-Gamma 避險策略。

另由於波動率的使用在這些策略上極為關鍵，因此引入第五章中所討論的估計方法，如歷史波動率（historical volatility），隱含波動率（implied volatility），以及利用無母數的傅立葉轉換方法（Fourier transform method）的（修正後）瞬時波動率（instantaneous volatility）。

從配對交易的角度，考慮選擇權與避險投資組合間的關係，利用波動率均值回歸（mean reversion）的特性，尋找因波動率偏離產生過度避險（over hedge）的報酬或避險不足（under hedge）的虧損，就長期反覆操作而言，期望能得到正的平均報

酬。在這些策略之下，包含標的資產與衍生性商品的投資組合可能有統計套利（statistical arbitrage）的機會（參見 Avellaneda and Lee (2008)）。因此本節的結論亦可視為在不同投資組合交易策略下之統計套利的表現。然而從風險控管的角度，衍生性商品的報酬雖然較高，但往往伴隨著相當程度的風險，透過建立所述之避險投資組合，我們可以對市場價格及波動率等風險進行控管。至於其他風險，例如信用、流動性、作業、及道德等，的交易或管理，見 Hull (2010) 關於這方面的討論，在此我們並不討論這些風險。

1.1 避險策略介紹

就選擇權賣方的立場而言，是希望透過建立避險投資組合，來規避所可能承擔的市場風險。在 Black-Scholes 模型的假設下，市場價格由幾何布朗運動（Geometric Brownian Motion）描述，意即資產價格波動僅由一風險因子（布朗運動）控制，因此選擇權賣方的動態 Delta 避險投資組合可以完美複製選擇權到期日的可能損益。基本的動態 Delta 避險，見 Hull (2011)。但由於市場並不完善，要透過此避險投資組合來完全規避風險是不可能的，因此會產生避險誤差，且這些誤差不一定為正或負。鑑於市場價格風險與波動率風險，我們以下列的三個策略做為可能的動態避險方式：

- 策略一（Delta 避險策略）：建立一 Delta 中立（Delta neutral）之投資組合，僅能除去市場價格風險。
- 策略二（調整後 Delta 避險策略）：建立一 Delta 中立及部份 Gamma 中立之投資組合，類似 Delta 避險策略，並萃取隱含波動率微笑曲線的訊息進行校正。
- 策略三（Delta-Gamma 避險策略）：建立一 Delta 及 Gamma 中立（Delta-Gamma neutral）之投資組合，除去市場價格與波動率風險，但在實際交易上因為要買或賣次近月選擇權的投資部位所以比較昂貴。

以上三種策略詳述如後。

一、Delta 避險策略 (Delta Hedging Strategy)

選擇權的 Delta 係指當股價變動一單位時，選擇權價格的改變，是依據 Black-Scholes 訂價模型計算出來的。若考慮履約價為 K 到期日為 T 時間的選擇權，在 t 時間下的股價為 S_t ，而買權價格 $P^c(t, S_t; T, K, r, \sigma)$ 與賣權價格 $P^p(t, S_t; T, K, r, \sigma)$ 分別為：

$$P^c(t, S_t) = S_t N(d_1(\tau, S_t)) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(\tau, S_t)) \quad (1-1)$$

$$P^p(t, S_t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2(\tau, S_t)) - S_t N(-d_1(\tau, S_t)) \quad (1-2)$$

$$\begin{cases} d_1(\tau, S_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right] \\ d_2(\tau, S_t) = d_1(\tau, S_t) - \sigma\sqrt{\tau} \end{cases}$$

其中 $\tau = T - t$ 為距離到期日時間， r 為無風險利率， σ 為市場波動率，在 Black-Scholes 模型下 σ 為一固定值，但本研究利用過去股價資料估計 30 天期的歷史波動率，也利用選擇權價格計算的隱含波動率，此兩者皆為隨時間改變的波動率，以 σ_t 表示。而 Delta 值為選擇權價格對股價的一次偏微分，表示為：

$$\Delta_t = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial S_t}。$$

在完備市場的架構下，透過 Black-Scholes 公式，我們可以完美複製出一個選擇權。所謂的 Delta 避險策略，就是利用選擇權價格可以被完美複製的性質，藉由持有 Delta 單位的標的資產，與投入無風險性資產，組成一個與該選擇權有一樣價格變化的投資組合。因此，買賣選擇權所產生的風險，可以被此投資組合給抵消。由於選擇權價格是會隨著時間、股價的不同而改變，投資人所持有的 Delta 部位亦會隨著時間改變，所以 Delta 避險策略屬於動態避險。

Delta 避險策略若在完備市場下，符合可連續調整以及無交易成本等的假設，是不會有任何的避險誤差產生；但實際上，我們只能離散的調整持有的 Delta 部位，並存在交易成本，因此會存在避險誤差，此避險誤差可能為正或負。

二、調整後 Delta 避險策略 (Adjusted Delta Hedging Strategy)

Black-Scholes 訂價模型是建立在完備市場的假設之下，其中假設了波動率為一個常數，但運用在市場資料計算時卻產生了隱含波動率微笑，這代表市場參與者面對不同的履約情形時對風險的看法會不同。在 Fouque et al. (2000) 的書中提到的選擇權價格在波動率風險下的一階修正法，即是根據隱含波動率微笑的訊息，將 Delta 避險策略進行修正。其調整後的 Delta 值如下：

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_t &= \frac{\partial P(t,x)}{\partial x} - \frac{V_3(T-t)}{x} \left(4x^2 \frac{\partial^2 P(t,x)}{\partial x^2} + 5x^3 \frac{\partial^3 P(t,x)}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial^4 P(t,x)}{\partial x^4} \right) \\ &= \Delta_t - \frac{V_3(T-t)}{x} (4x^2 \Gamma_t + 5x^3 \varepsilon_t + 4x^4 \kappa_t)\end{aligned}\quad (1-3)$$

其中 $\tilde{\Delta}_t$ 代表調整後的 Delta 值，而 Δ_t 、 Γ_t 、 ε_t 、 κ_t 分別為選擇權價格對股價的一次、二次、三次與四次偏微分，如表 1-1 所示，修正參數 V_3 則可從下述迴歸式求出：

$$I(t,K) = a \left[\frac{\ln(K/S_t)}{T-t} \right] + b + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad (1-4)$$

其中 α 是波動率的均值回歸率 (rate of mean reversion)。透過此迴歸式可校準隱含波動率微笑曲線，其中 I 代表在目前時間為 t 到期日為 T 下不同履約價 (K) 的隱含波動率， $\ln(K/S_t)/(T-t)$ 為 LMMR (Log Moneyness to Maturity Ratio)。式 (1-4) 表示將隱含波動率 $I(t,K)$ 對 LMMR 做線性迴歸可能產生的誤差大小與 $1/\alpha$ 同等級。

由第五章圖 1-2 可以見到隱含波動率與 LMMR 的關係圖，圖中(a)為美國 S&P 500 指數選擇權，圖中(b)為台指選擇權，而橫軸為 LMMR 的值，縱軸為隱含波動率。從式 (1-4)，隱含波動率與 LMMR 做線性迴歸分析後，可得到迴歸係數 a 與 b 。Fouque et al. (2011) 的書中推導了 V_3 與 α 的關係如下：

$$V_3 = -a\sigma^3, \quad (1-5)$$

其中 σ 為利用歷史資料估算出來的波動率，將各微分值與 V_3 計算出來後帶入公式 (1-3)，即可計算出調整後 Delta 值。

表 1-1 選擇權價格 (P) 對股價 (St) 的 n 次微分

		Call
Delta	$\Delta = \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial S_t}$	$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-x^2/2} dx$
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial^2 P(t, S_t)}{\partial S_t^2}$	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}$
Epsilon	$\varepsilon = \frac{\partial^3 P(t, S_t)}{\partial S_t^3}$	$\frac{-e^{-d_1^2/2}}{S^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \left[1 + \frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$
Kappa	$\kappa = \frac{\partial^4 P(t, S_t)}{\partial S_t^4}$	$\frac{e^{-d_1^2/2}}{S^3\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \left[\left(1 + \frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \left(2 + \frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - \frac{1}{\sigma^2(T-t)} \right]$

三、Delta-Gamma 避險策略 (Delta-Gamma Hedging Strategy)

Gamma 是用來衡量 Delta 的敏感度，亦即當股價變動時，避險比率 Delta 變動的情況；可表示為選擇權價格對股價的二次偏微分（如表 1-1 所示）：

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P(t, S_t)}{\partial S_t^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t}$$

而 Vega 是用來衡量標的價格波動度改變對選擇權價格的影響，為選擇權價格對波動率 σ 的一次偏微分，表示為：

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial P(t, S_t)}{\partial \sigma} \\ &= S_t N'(d_1) \sqrt{T-t} = S_t^2 \sigma (T-t) \times \Gamma \end{aligned}$$

使用 Delta-Gamma 避險策略，與 Vega 避險策略近似，是加入另外一個與原本相近履約價 K 且次近月的選擇權契約，意即新加入選擇權到期日 T2 大於原始選擇權到期日 T1；則原始選擇權的價格，可透過標的資產、無風險性資產與次近月選擇權所組成的避險投資組合來近似。

Delta-Gamma 避險策略主要是多考慮了波動率所伴隨的風險，當股票價格越接近履約價附近時，Gamma 值會越大，圖 1-1 為 Black-Scholes 模型計算出之 Delta 與 Gamma 值，如圖所示，股價在 K 附近時，Delta 對股價變動很敏感，斜率很高，代

表股票波動率的變化對選擇權價格變化有很大的影響；而 Delta 避險策略，無法抵擋當股價波動率有很大的變動時所帶來的風險，為抵禦這類的風險，可多購買另一個選擇權來降低對波動度的敏感性。

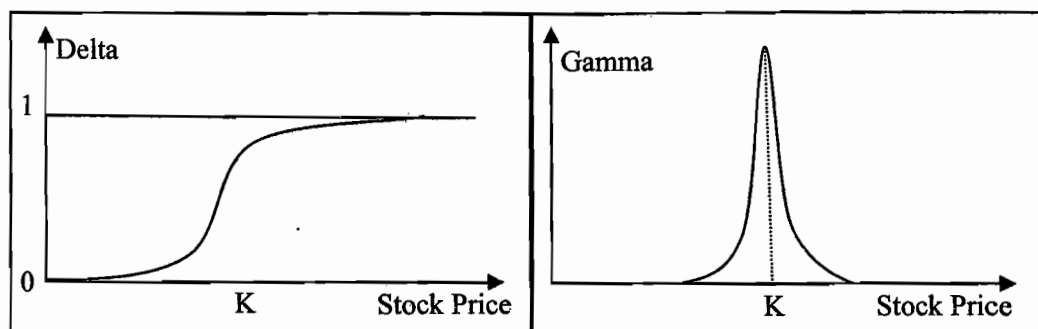


圖 1-1 股價與 Delta、Gamma 關係圖

選擇權在 t 時間的價值 $P^{(1)}(t, S_t)$ 可由標的資產價格 (S_t)、無風險性資產以及另一個履約價接近且次近月選擇權 $P^{(2)}(t, S_t)$ 來複製，此結果是根據 Fouque et al. (2000) 假設在波動率由另一外來擴散過程下所得到的結果：

$$P^{(1)}(t, S_t) = a_t S_t + b_t e^{rt} + c_t P^{(2)}(t, S_t) \quad (1-6)$$

其中 a_t 、 b_t 與 c_t 分別為在 t 時間下，持有標的資產、無風險性資產以及新加入選擇權之數量。而為達到 Delta 與 Gamma 風險中立，可計算出 c_t 為原始選擇權的 Vega 除以新加入選擇權的 Vega 值，亦可轉換為兩者 Gamma 值的比例關係；透過 c_t 進而計算出 a_t 的值，以公式表示為：

$$c_t = \frac{\partial P^{(1)} / \partial \sigma}{\partial P^{(2)} / \partial \sigma} = \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} = \frac{\Gamma^{(1)}}{\Gamma^{(2)}} \times \frac{T_1 - t}{T_2 - t}$$

$$a_t = \Delta_t^{(1)} - c_t \times \Delta_t^{(2)} \quad (1-7)$$

依照上式所算出的 a_t 與 c_t ，隨著時間，動態的調整持有標的資產與次近月選擇權的數量，直到到期日 T 。

1.2 指數選擇權避險實證結果

以下針對美國 S&P 500 指數選擇權 (SPX) 以及台灣加權股價指數選擇權 (TXO) 的買權，進行測試，分別計算在不同的避險策略下產生的損益金額 (P&L) 以及夏普指數 (Sharpe Ratio)。其中，SPX 資料來源為 OptionMetrics 的 IVY Data Base (2001/01~2007/06)，TXO 資料來源為期交所 (2003/07/01~2009/03/01)。此兩種選擇權皆屬歐式選擇權，SPX 為美國芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 發行，其標的資產為 S&P 500 指數，一點價值 100 美元。TXO 為台灣期貨交易所 (TAIFEX) 發行，標的資產為台灣加權股價指數，每點價值新台幣 50 元。

為了突顯不同避險策略的適合使用時機，我們將資料依據契約進場距到期日的時間分類。不同進場距到期日的時間 (T) 下，觀察表現較好或較差的避險策略，隨著進場的時間不同，是否仍舊維持原本較好或較差的表現。其中，本文主要分為 $T=30, 29, \dots, 2$ ，若 $T=30$ 代表該為距到期日 30 天前進場的契約。因此，SPX 的買權總共有 105,125 (3625×29) 筆選擇權資料；TXO 的買權則有 43,993 (1517×29) 筆選擇權資料。

原始資料中有些合約因交易量過小，導致選擇權契約價格異常，或選擇權為深度價內外。故本文刪除原始資料中契約價格呈現過低現象的契約，美國的契約價格以 $3/8$ 點為所採用契約的最小價格，契約價格小於 $3/8$ 點將不採用。而台灣契約採用的最小價格為 12 點，契約價格小於 12 點則不採用。

為了找出何種避險策略與波動率能成為較好的避險組合，我們利用配對 t 檢定 (matched-pairs test) 對平均損益以及夏普指數做兩兩檢定。在此檢定下，虛無假設及對立假設分別為 $\begin{cases} H_0: \mu_D = 0 \\ H_1: \mu_D < 0 \end{cases}$ ，其中 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ ，而統計量 $t = \frac{\bar{x}_D - \mu_D}{s_D / \sqrt{n_D}}$ ，t 分配的自由度 $\nu = n_D - 1$ 。在此假設下，因所要觀察的結果是避險天數 30 天到避險天數 2 天，故組數為 29 組，也就是此統計量分配的自由度 28，因為是單尾檢定，各信心水準下的臨界值如表 1-2 所示。

表 1-2 不同信心水準下 T-test 臨界值

<i>T-test (自由度: 28)</i>			
信心水準	99%	95%	90%
<i>t</i> 值	2.467	1.701	1.313

實證分析的做法是考慮在不同到期日 T (2~30 天) 賣出選擇權後，使用各種避險策略進行每天的避險，包括利用歷史波動率、瞬時波動率及隱含波動率對 Δ 避險、調整後 Δ 避險、 Δ -Gamma 避險等策略的交叉組合。交易成本的設定上，SPX 選擇權的交易成本為每口 \$0.5 美元，標的資產的交易成本為每口 \$0.4 美元；台灣的部分，交易成本分成交易手續費與交易稅，其中選擇權的交易成本為每口 9 元，交易稅為 0.1%，契約價值為每點乘上 50 元，期貨的交易成本為每口 14.4 元，交易稅為 0.01%，契約價值為每點乘上 200 元。而進行策略所使用的利率 r ，美國市場使用 3 個月期國庫券利率，台灣市場則是使用五大銀行一個月期平均存款利率¹⁷。

表 1-3 針對在特定之避險策略下，比較三種波動率所得的避險效益。例如，從 Panel A 中的 Δ 避險策略來看，在搭配上修正後傅立葉轉換方法所估計出之瞬時波動率，所得到的 29 個日平均損益，其統計上的顯著性分別大於該策略搭配歷史波動率與隱含波動率，其中的數字為這些日損益的平均值。由表 1-3 可看出在美國的市場中，以傅立葉方法估計之瞬時波動率的避險平均損益大抵都高於其他波動率所帶來的平均損益；但從夏普指數來看，由 30 天日報酬所算出的歷史波動率還是占優勢，避險的夏普指數顯著的高於其他波動率。台灣市場中，並不能明顯的指出何種波動率在任何避險策略下皆能在平均損益及夏普指數上有較傑出的避險效能，大致上，對應特定一策略下，擁有較高平均損益的波動率相對的夏普指數表現也較好。圖 1-2 與圖 1-3 分別顯示在美國與台灣市場中從 30 個交易日前至 2 個交易日前之避險效能。

¹⁷ 五大銀行平均存款利率，為台灣銀行、合作金庫、第一銀行、華南銀行與彰化銀行之存款利率。資料來源為中央銀行網站。

表 1-3 三種避策略與三種波動率所得的避險效益之交叉比較

(a)美國

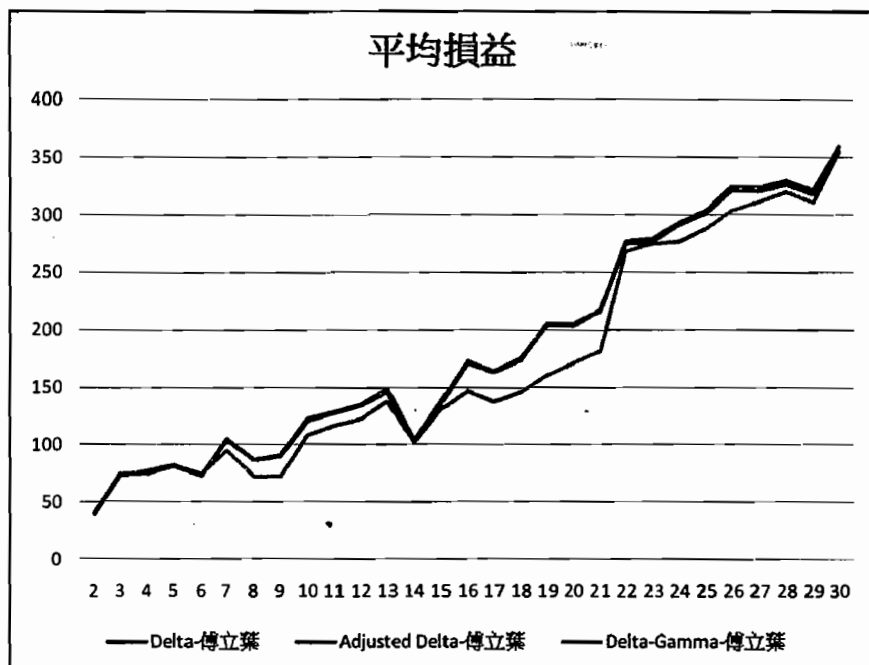
指數			
避險策略／波動率	歷史	傅立葉	隱含
Panel A：平均損益（美元）			
<i>Delta</i>	173.77***	183.09	148.45***
<i>Adjusted Delta</i>	175.30***	184.54	135.28***
<i>Delta-Gamma</i>	169.13	170.85	125.63***
Panel B：夏普指數			
<i>Delta</i>	0.4989	0.4519***	0.4649***
<i>Adjusted Delta</i>	0.4854	0.4501***	0.3911***
<i>Delta-Gamma</i>	0.4961	0.3440***	0.4004***

(b)台灣

指數			
避險策略／波動率	歷史	傅立葉	隱含
Panel A：平均損益（新台幣）			
<i>Delta</i>	19233.48***	19372.26	19175.65***
<i>Adjusted Delta</i>	19314.67***	19401.42	19331.53***
<i>Delta-Gamma</i>	19827.43	19656.75***	19733.44***
Panel B：夏普指數			
<i>Delta</i>	0.3932***	0.3961	0.3918***
<i>Adjusted Delta</i>	0.3944***	0.3957	0.3945***
<i>Delta-Gamma</i>	0.4057	0.4033***	0.4035***

註：粗體部分表最大值，****表在 99%信賴區間下拒絕 H_0 ，***表在 95%信賴區間下拒絕 H_0 ，**表在 90%信賴區間下拒絕 H_0

(a) 平均損益 (美元) 比較



(b) 夏普指數比較

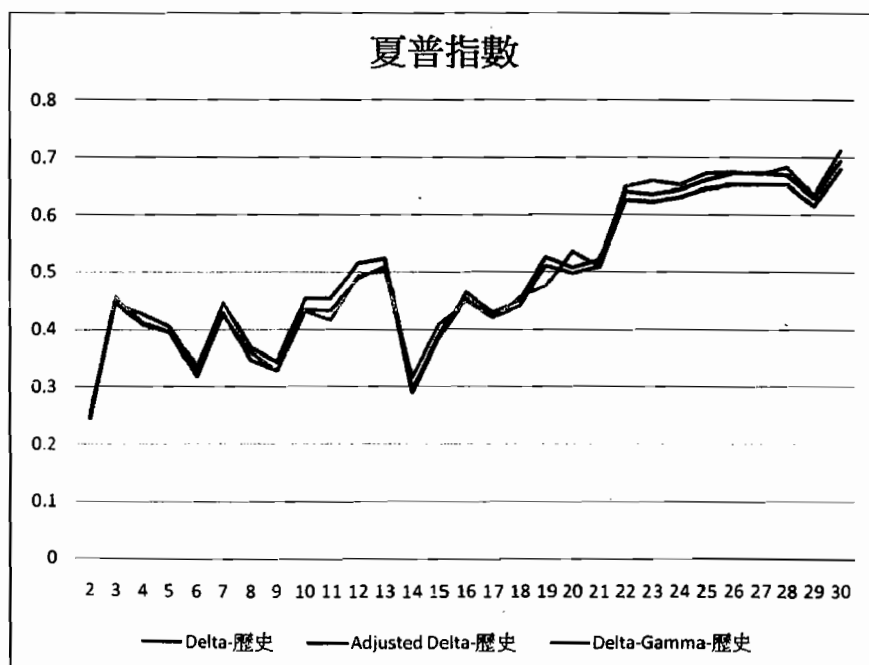
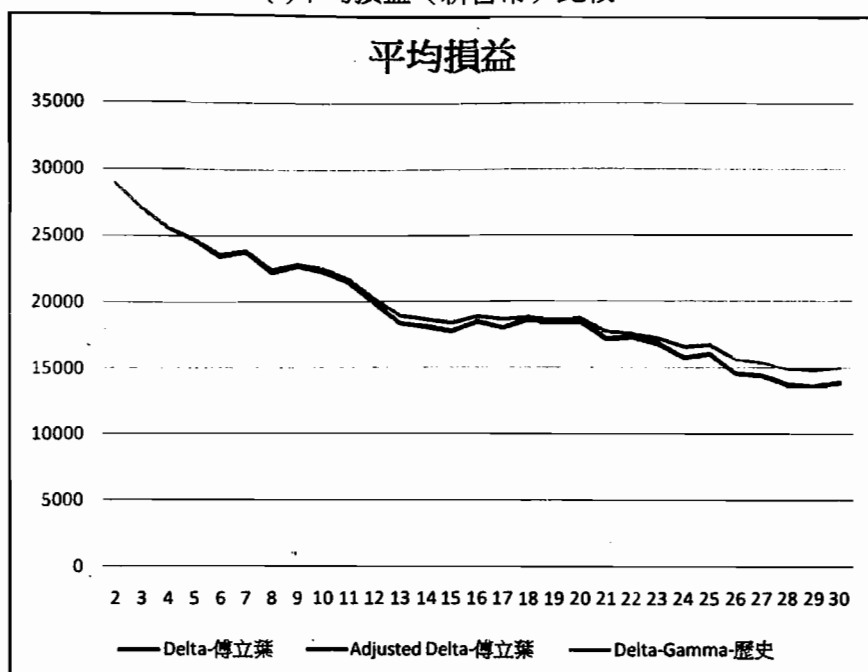


圖 1-2 美國避險效能之比較

(a) 平均損益 (新台幣) 比較



(b) 夏普指數比較

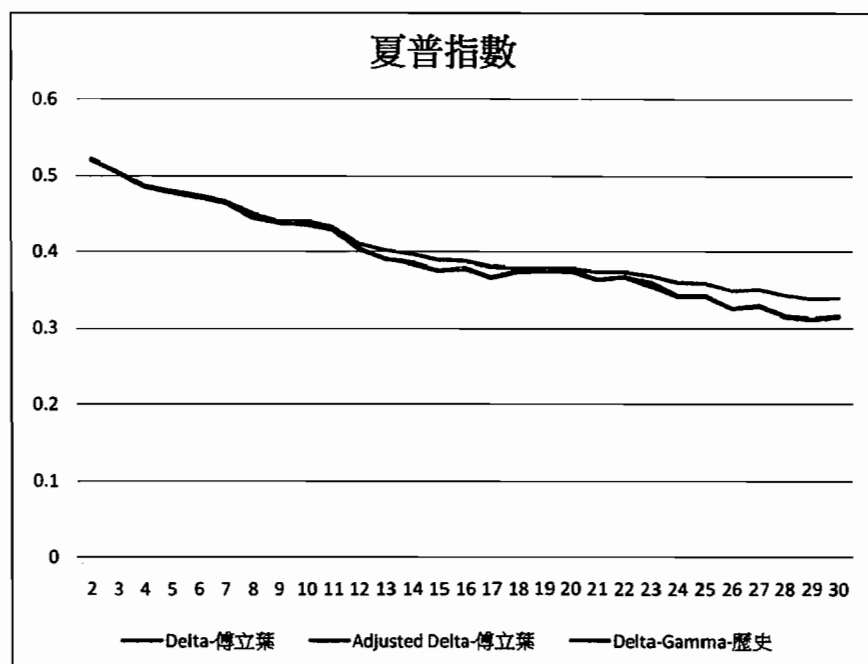


圖 1-3 台灣避險效能之比較

接下來可以考慮最佳波動率下各策略間之比較以延續上一部分的討論。針對特定的避險策略，挑出達成最佳避險效能的波動率，並利用此組波動率的避險表現代表此一避險策略的表現，藉以比較各策略間的表現。由表 1-4 中可看出，在美國市場中，調整後 Delta 的避險效能在平均損益下明顯的高於 Delta 與 Delta-Gamma 策略。在夏普指數下，Delta 與 Delta-Gamma 策略分別顯著於調整後 Delta 策略，雖然前二者的統計差異並不顯著，但以平均值來看仍是 Delta 策略較好。可以說美國 SPX 市場的風險因子主要來自市場價格，所以使用 Delta 與調整後 Delta 的就能達成不錯的避險效能。

表 1-4 最佳波動率下各策略間之比較

(a)美國

指數		
<i>Delta</i>	<i>Adjusted Delta</i>	<i>Delta Gamma</i>
<i>Panel A : 平均損益 (美元)</i>		
183.09 *** (傅立葉)	184.54 (傅立葉)	170.85 *** (傅立葉)
<i>Panel B : 夏普指數</i>		
0.4989 (歷史)	0.4854 *** (歷史)	0.4961 (歷史)

(b)台灣

指數		
<i>Delta</i>	<i>Adjusted Delta</i>	<i>Delta Gamma</i>
<i>Panel A : 平均損益 (新台幣)</i>		
19372.26 *** (傅立葉)	19401.42 *** (傅立葉)	19827.43 (歷史)
<i>Panel B : 夏普指數</i>		
0.3961 (傅立葉)	0.3957 (傅立葉)	0.4057 (歷史)

註：粗體部分表最大值，"****"表在 99%信賴區間下拒絕 H_0 ，"***"表在 95%信賴區間下拒絕 H_0 ，"***"表在 90%信賴區間下拒絕 H_0

對台灣的 TXO 而言，在平均損益上明顯指出 Delta-Gamma 策略有較好的避險表現；雖在夏普指數上不存在顯著的避險策略，但以平均值來看仍是 Delta-Gamma 策略較好。可以說台灣 TXO 的市場風險因子不僅來自價格，波動率風險也很重要，所以適合使用較複雜的 Delta-Gamma 策略以達到較佳的避險效能。另注意雖然此策略必須建立選擇權的投資部位，在成本上較為昂貴，但其控制波動率風險的有效程度遠大於 Delta 與調整後 Delta 等策略之避險所及。

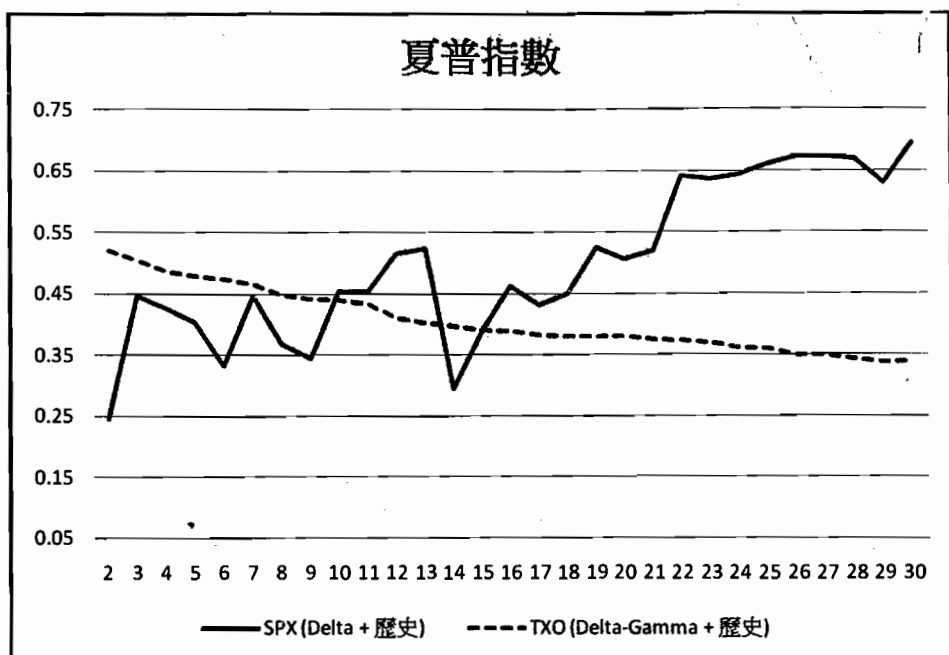
另外從圖 1-4 中可看出兩個市場的其他差異性：(1)就美國市場，距離到期日越長的避險效能越好，台灣則是相反。(2)台灣的避險損益皆高於美國，但台灣的夏普指數普遍皆低於美國。

1.3 小結

本節考慮數種免模型之避險策略與波動率之估計方法分別針對美國 S&P 500 指數選擇權 (SPX) 與台灣加權股價指數選擇權 (TXO) 的歷史買權資料進行避險測試。利用標的資產 S&P 500 指數與台灣加權股價指數建立三種避險投資組合 (包括 Delta 避險、調整後 Delta 避險，以及 Delta-Gamma 避險)，並在三種不同波動率 (包括歷史波動率、瞬時波動率及隱含波動率) 的交叉使用下，檢驗避險表現之優劣，其中交易成本與稅亦被考慮。值得注意的是這些避險策略與波動率估計方法皆是用來降低本研究對於模型的依賴性。

根據實證結果，我們發現兩個市場的共同點是無論建立何種避險投資組合，平均而言是會產生正的報酬。而兩個市場的差異有四點。第一，S&P 500 指數選擇權之隱含波動率與 LMMR 呈現負相關，但台指選擇權卻為正相關。第二，對 SPX 的買權避險時，進場距到期日越遠會有越高的報酬，但在 TXO 卻完全相反。第三，在美國市場中，Delta 或是調整後 Delta 的避險效能明顯的高於 Delta-Gamma；而在台灣，不論是平均損益或夏普指數，皆指出 Delta-Gamma 有較好的避險表現。第四，台灣的避險平均損益雖高於美國，但台灣的夏普指數則普遍低於美國。以上的市場差異顯示出台灣 TXO 的避險投資組合與美國 SPX 相比有較多的波動率風險。TXO 的投資人應謹慎處理或善用此波動率風險。

(a) 平均損益 (以新台幣計價) 比較



(b) 夏普指數比較

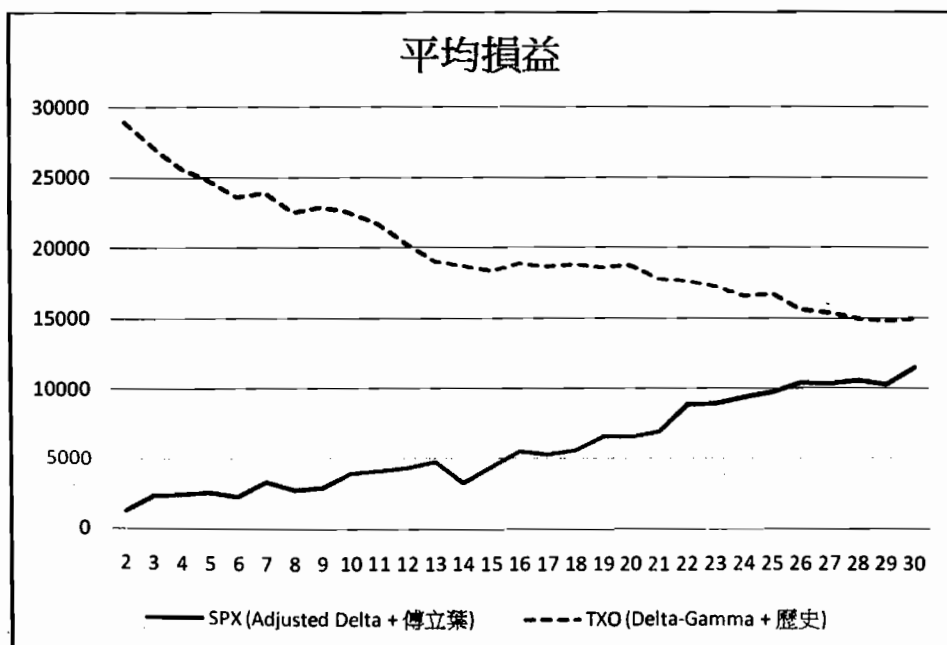


圖1-4 美國與台灣避險效能比較圖 (美元/新台幣: 1/32)

第二節 風險管理：風險值、條件風險值與及回溯測試 (Risk Management: VaR, CVaR and Backtesting)

VaR 與 CVaR 是風險管理中針對市場風險常使用的兩類估計方式。基於不同的模型假設，我們考慮以下四種方法：歷史模擬法 (historical simulation)，RiskMetrics 的 EWMA 法，GARCH(1,1)法，與隨機波動法。其中第一種方法僅依賴過去大量的歷史資料去進行對未來風險的預測，不需要任何模型設定，且便於計算，是一類業界常用的方法。其餘三種方法是針對波動率在不同的模型下，對 VaR/CVaR 進行運算。第二與第三種模型下 VaR 的估計可見 Hull (2011)，而第四種隨機波動模型下 VaR/CVaR 的估計可見 Han et al. (2010)，其中分別應用到了第四章中第一節高效能重要抽樣法以及該章中第 3.2 節中有效波動率 (effective volatility) 的方法。

2.1 回溯測試

在第四章中的重要抽樣法已定義風險管理中風險測度的概念，並提出對風險值以及條件風險值的有效計算方法。這些計算是在給定的金融模型下，量化分析曝險情形，以用來預測在未來一段時間內資產的損失情況；而回溯測試則用以區分模型的準確程度，避免模型誤植。無條件超出率 (unconditional rate of exceedance, UC) 與超出獨立性 (independence of exceedances, IND) 是回溯測試中常用的兩大準則。若是所使用的模型夠準確且被精確估計的話，則可以預期回溯測試的統計結果將達到比較高的顯著水準。

以所估計出的風險值 VaR 與實際所發生的損失情形相較，UC 的假設檢定在超出機率為顯著水準的虛無假設之下，對數概似率 (log-likelihood ratio) 會漸進服從自由度是一的卡方分配，其統計量如下：

$$LR_{UC} = -2\ln[(1-p)^{T-N}p^N] + 2\ln\left\{\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^N\right\} \sim \chi^2(1), \quad (2-1)$$

其中 T 是總日數， N 是總超出數目，見 Kupiec (1995)。

超出樣本的獨立 IND 測試如下。首先以一個指示函數標出每次 VaR 的估計是否有被超出，若是則以 1 表示，否則以 0 表示。接著以 $T_{ij}, i, j \in \{0, 1\}$ 記為在前一期狀態為 i ，在當期狀態為 j 的總日數， π_i 記為在前一期狀態為 i 的情況下，當期發生超出的機率。此獨立測試統計量的漸進分佈會服從自由度是一的卡方分配：

$$LR_{IND} = -2\ln[(1 + \pi)^{(T_{00}+T_{10})}\pi^{(T_{01}+T_{11})}] + 2\ln[(1 - \pi_0)^{T_{00}}\pi_0^{T_{01}}(1 - \pi_1)^{T_{10}}\pi_1^{T_{11}}] \\ \sim \chi^2(1) \quad (2-2)$$

此統計測試有助於檢測超出樣本間是否有序列相依 (serial correlation) 的情形。

另外 Christoffersen (1998) 提出了條件覆蓋 (conditional coverage, CC) 測試以同時檢驗無條件超出率與超出樣本的獨立性，CC 的統計量如下：

$$LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND}。$$

此三種回溯測試的統計量 LR_{UC} ， LR_{IND} 與 LR_{CC} 皆是常被用來確認 VaR 的估計表現。

2.2 實證結果

以下分別針對美元 (USD) 兌換日幣 (JPY) 的匯率，以及美國 S&P 500 指數 (視為一投資組合) 進行模型估計、風險值計算、以及回溯測試。

一、USD/JPY 匯率

匯率所使用的資料來源為中央銀行網站上 (<http://www.cbc.gov.tw/>) 提供的日資料，樣本期限為從 1998 年 1 月 5 日到 2009 年 7 月 24 日，總共有 2890 筆日觀察值。該匯率以及報酬的敘述統計量如表 2-1 所述。以 r_t 記為時間 t 的當日匯率， X_t 記為日對數報酬 $X_t = \ln(r_t/r_{t-1})$ ，其序列圖形如圖 2-1 所示。

現在針對四種 VaR 估計方法所得到的結果進行前述的三種回溯測試，包括了無條件覆蓋，獨立性，與條件覆蓋。VaR 的信心水準為 95%與 99%，而拒絕回溯測試的顯著水準設為 10%。由表 2-2 可以看出，隨機波動模型的準確程度最高。

部份這些討論可以延生至考慮日內 (intraday) VaR，見 Dionne et al. (2009)。若考慮流動性風險，則價差成本 (spread cost)、外部 (exogenous) 及內部 (endogenous) 性因素等皆常被用來修正 VaR 的估計。

二、S&P 500 指數

這裡所使用的資料來源為 Yahoo! Finance (<http://finance.yahoo.com/>)，由 S&P 500 及其 VIX 兩組日資料組成，樣本期限為從 2005 年 1 月 3 日到 2009 年 7 月 24 日，總共有 1138 筆日觀察值。該指數以及報酬的敘述統計量如表 2-3 所述。這裡由兩只數報酬率的相關係數作為模型中參數 ρ 的估計值，並且利用第五章中估計隨機波動率的方法來估計其它參數 (α, β, m) 。

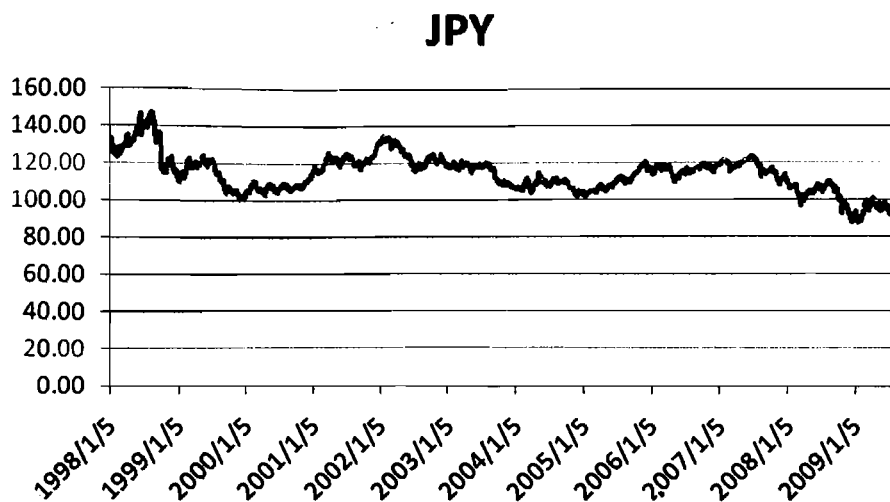
表 2-1 USD/JPY 匯率的敘述統計量

	原始匯率	匯率對數報酬
<i>Mininum</i>	87.915	-0.04565
<i>1st Quantile</i>	107.525	-0.00384
<i>Mean</i>	114.5035	-0.00012
<i>Median</i>	115.265	0
<i>3rd Quantile</i>	120.35	0.004003
<i>Maximum</i>	147.41	0.049073
<i>Standard Deviation</i>	10.00708	0.007231
<i>Skewness</i>	0.254427	-0.43005
<i>Kurtosis</i>	0.435041	3.67931

表 2-2 對 USD/JPY 匯率 VaR 估計的回溯測試結果

<i>Historical Simulation</i>			
<i>Significance</i>	<i>1%</i>	<i>Significance</i>	<i>5%</i>
<i>LRuc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRuc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>
<i>LRind</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRind</i>	<i>Reject VaR Model</i>
<i>LRcc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRcc</i>	<i>Reject VaR Model</i>
<i>RiskMetrics</i>			
<i>Significance</i>	<i>1%</i>	<i>Significance</i>	<i>5%</i>
<i>LRuc</i>	<i>Reject VaR Model</i>	<i>LRuc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>
<i>LRind</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRind</i>	<i>Reject VaR Model</i>
<i>LRcc</i>	<i>Reject VaR Model</i>	<i>LRcc</i>	<i>Reject VaR Model</i>
<i>GARCH(1,1)</i>			
<i>Significance</i>	<i>1%</i>	<i>Significance</i>	<i>5%</i>
<i>LRuc</i>	<i>Reject VaR Model</i>	<i>LRuc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>
<i>LRind</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRind</i>	<i>Reject VaR Model</i>
<i>LRcc</i>	<i>Reject VaR Model</i>	<i>LRcc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>
<i>SV</i>			
<i>Significance</i>	<i>1%</i>	<i>Significance</i>	<i>5%</i>
<i>LRuc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRuc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>
<i>LRind</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRind</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>
<i>LRcc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>	<i>LRcc</i>	<i>Don't Reject VaR Model</i>

Panel 1 : 原始日資料



Panel 2 : 日報酬率序列

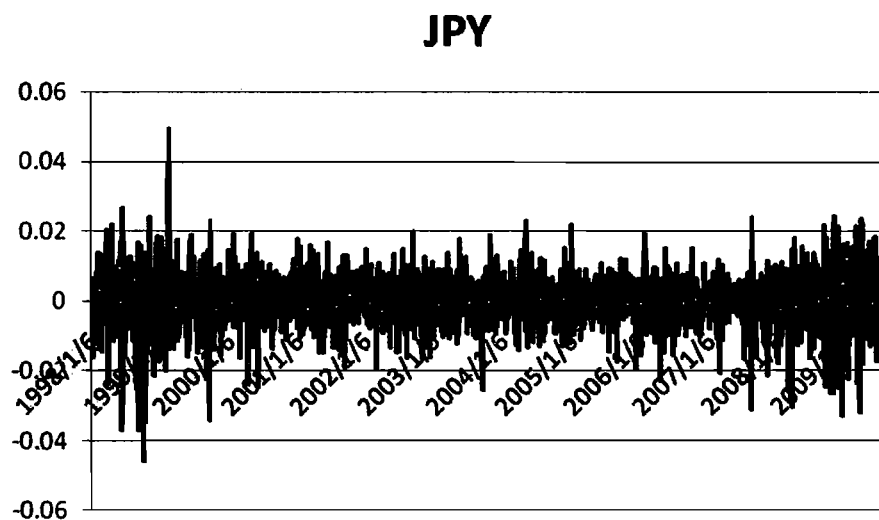


圖2-1 USD/JPY匯率時間序列

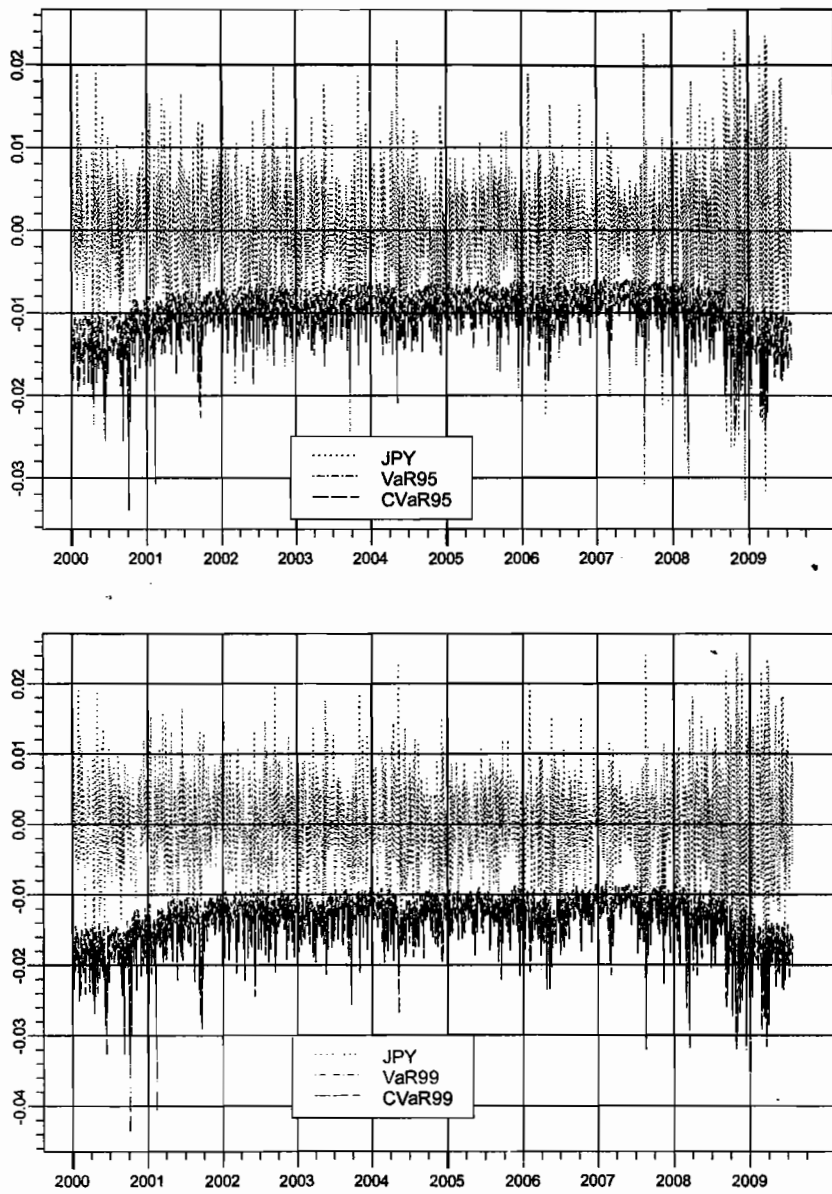


圖2-2 顯著水準95%與99%下，USD/JPY匯率中一天的VaR與CVaR估計值的時間序列。

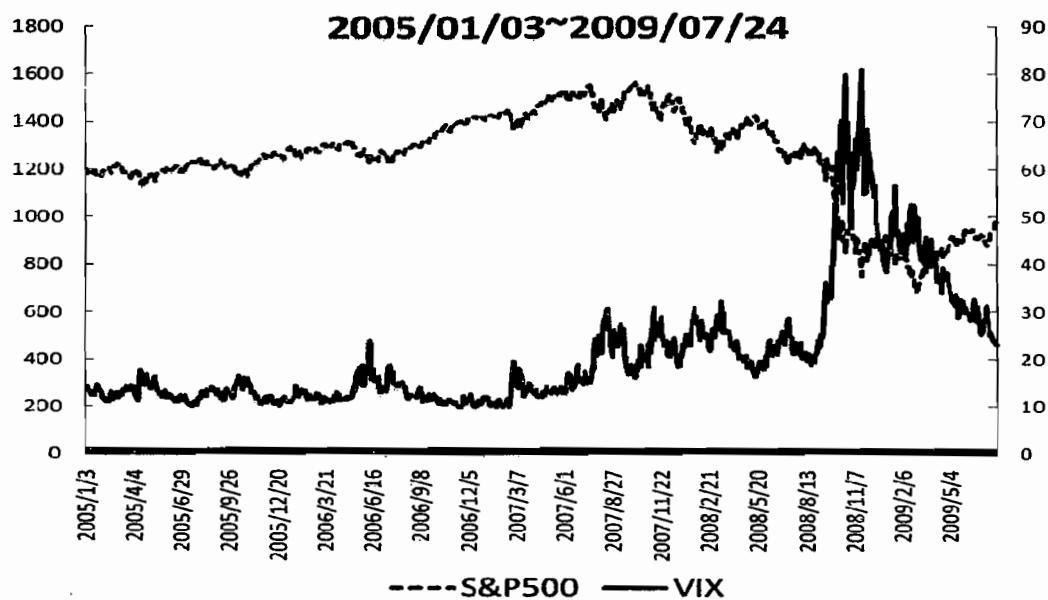
表 2-3 S&P 500 與 VIX 的敘述統計量

	S&P500	VIX	S&P500 Return.	VIX Return.
Minimum	676.53	9.89	-0.0947	-0.29987
1st Quantile	1190.47	12.26	-0.00532	-0.03683
Mean	1248.455	21.26077	-0.00018	0.000435
Median	1275.55	15.59	0.000739	-0.0033
3rd Quantile	1400.565	25.14	0.005524	0.032046
Maximum	1565.15	80.86	0.102457	0.496008
Standard Deviation	203.4692	13.0195	0.015136	0.066551
Skewness	-0.85291	1.859021	-0.10722	0.574778
Kurtosis	-0.0239	3.345993	9.331141	4.770059

表 2-4 對 S&P 500 VaR 估計的回溯測試結果

RiskMetrics			
Significance	1%	Significance	5%
LRuc	Reject VaR Model	LRuc	Reject VaR Model
LRind	Reject VaR Model	LRind	Don't Reject VaR Model
LRcc	Reject VaR Model	LRcc	Reject VaR Model
Historical Simulation			
Significance	1%	Significance	5%
LRuc	Reject VaR Model	LRuc	Reject VaR Model
LRind	Don't Reject VaR Model	LRind	Don't Reject VaR Model
LRcc	Reject VaR Model	LRcc	Reject VaR Model
SV			
Significance	1%	Significance	5%
LRuc	Don't Reject VaR Model	LRuc	Reject VaR Model
LRind	Don't Reject VaR Model	LRind	Don't Reject VaR Model
LRcc	Don't Reject VaR Model	LRcc	Reject VaR Model
GARCH(1,1)			
Significance	1%	Significance	5%
LRuc	Reject VaR Model	LRuc	Reject VaR Model
LRind	Don't Reject VaR Model	LRind	Reject VaR Model
LRcc	Reject VaR Model	LRcc	Reject VaR Model

Panel 1 : 原始日資料



Panel 2 : 日報酬率序列

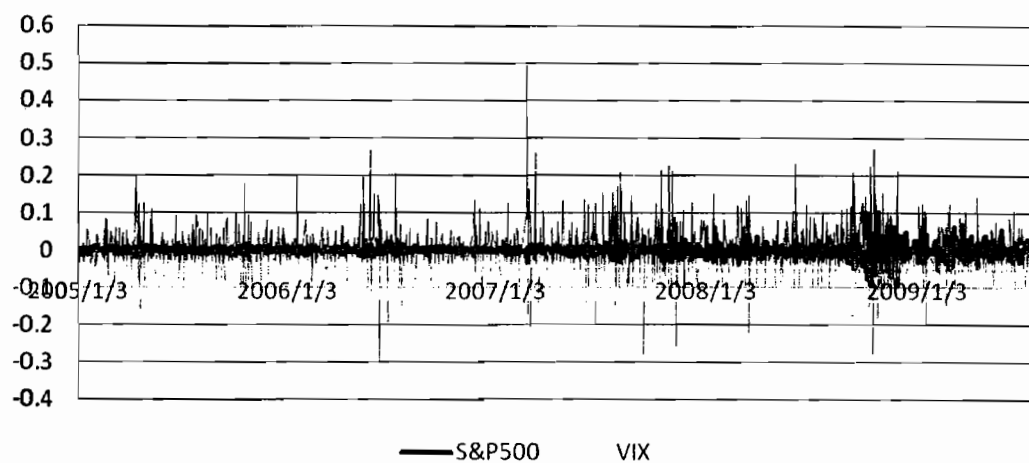


圖 2-3 S&P 500與VIX時間序列

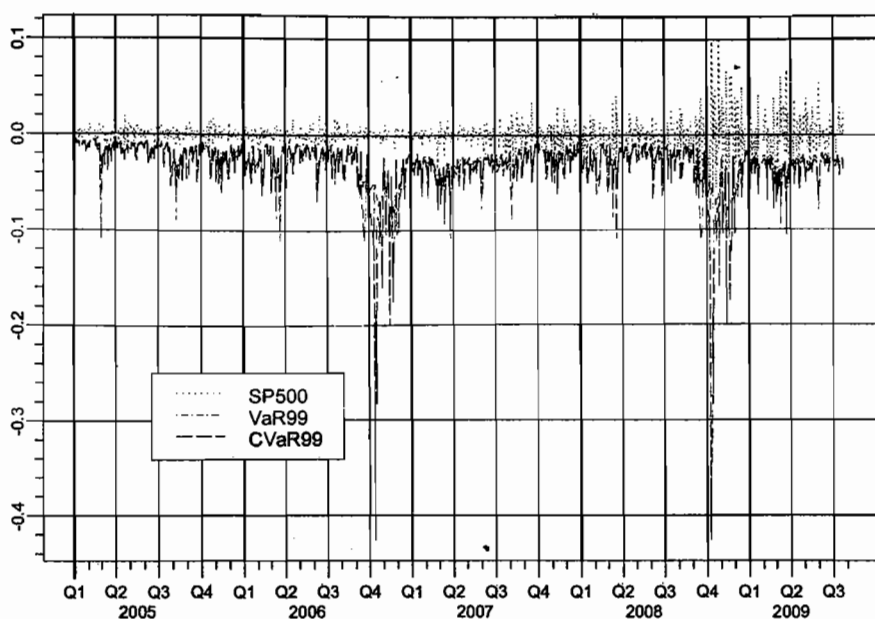


圖2-4 顯著水準99%下，S&P500中一天的VaR與CVaR估計值的时间序列

2.3 小結

本節探索了在隨機波動模型下估計 VaR 與 CVaR 的方法，主要包括了傅立葉轉換的波動率估計以及重要抽樣法，並且以回溯測試的結果與歷史模擬法、EWMA 模型、與 GARCH(1,1)模型做效能上的比較。這裡使用了兩組歷史資料，分別是 USD/JPY 的匯率以及 S&P 500 指數的日資料。資料期限均包括了 2008 年金融海嘯的期間。回溯測試的結果顯示隨機波動模型在 99% VaR 的估計表現優於傳統的方法，這建議了使用了在隨機波動模型在 BASEL 規範下的可行性。

第三節 Monte Carlo 對選擇權價格之模型校準 (Monte Carlo Calibration for Option Prices)

本節結合修正後傅立葉轉換方法與 Monte Carlo 模擬法，發展一個兩階段方法，以探索波動率在現貨市場（歷史機率測度）與選擇權市場（風險中立機率測度）之

動態行為，並藉由一因子隨機波動模型，將此兩市場（或等價的機率測度）中關於波動率的訊息，包括了瞬時波動率及波動風險溢酬，加以系統性的分析，並針對臺指選擇權市場進行模型校準。此兩階段 Monte Carlo 校準方法主要的好處在於能夠減少模型中所需校準的參數，在有限的樣本中更有效率及準確的校準模型參數。

現貨市場中能夠呈現關於波動率的最新訊息即是瞬間波動率；然而歷史波動率乃是將一段已過交易資料的報酬率加以平均，後者所反應的市場訊息有著不容小覷的偏誤¹⁸。相對的衍生品市場中的波動風險溢酬則控制了隱含波動率曲線（或曲面）的形狀，這個量前探了（forward looking）未來標的的資產風險。在過去，取得瞬時波動率與波動風險溢酬等這些訊息的技術尚有不少瓶頸。隨著近年來一些學術上的突破，例如 Malliavin and Mancino (2009)，波動率的資訊結構及其內涵就很快速的被揭開了。在定價、避險、及風險管理上的應用可分別見 Fouque et al. (2000, 2008, 2009)、Han (2010b)、及 Han et al. (2010a)；或見 Gatheral (2006)、Hull (2008)、和 Engle (2009) 中更廣泛的討論。

3.1 兩階段 Monte Carlo 模型校準法

為了使讀者更清楚的了解此兩階段方法，我們以一個常見的隨機波動率模型 Heston 來具體說明如下：

1. 第一階段：波動率模型在歷史機率測度下的參數估計

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_{1t} \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t)dt + \beta\sqrt{Y_t}dW_{2t} \end{aligned} \quad (3-1)$$

其中標準布朗運動 W_{1t} 與 W_{2t} 之間的二次變分 (quadratic variation) 為 ρt 。在 Heston 模型的架構下，模型參數有 (α, β, m, ρ) 四個。如第五章第五節所述，我們首先利

¹⁸ 事實上，Zhang et al. (2005) 證明了歷史波動率對整合波動率估計之偏誤會隨著資料頻率的增加而增加，在超高頻資料下甚至會發散。

用現貨價格資料，經由修正後的傅立葉方法估計波動率序列，接著利用此波動率序列，使用最大似估計法，可估得在歷史機率測度下的模型參數 (α, β, m) 。

2. 第二階段：波動率模型在一風險中立機率測度下的參數估計

假設歷史機率測度轉換至一風險中立測度時，模型參數 (α, β) 維持不變，第二階段我們欲利用 Monte Carlo 法，在由第一階段估出的 (α, β) 基礎上，利用選擇權資料，在一風險中立機率測度下，藉著解一最佳化問題，即最小化模型價格與市場真實報價的相對誤差 (relative price mean square error)，校準剩下的模型參數 (m^*, ρ^*) ：

$$\min_{m^*, \rho^*} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{Price_{Model}^{(i)}(T, K_i, m^*, \rho^*) - Price_{Market}^{(i)}(T, K_i)}{Price_{Market}^{(i)}(T, K_i)} \right]^2$$

其中 N 為執行價的個數， $Price_{Model}^{(i)}(T, K_i, m^*, \rho^*)$ 指的是在第 i 個執行價在到期日為 T 時，經由兩階段方法配合模型參數所計算出的價格； $Price_{Market}^{(i)}(T, K_i)$ 指的是市場上第 i 個執行價在到期日為 T 時的真實報價。

為了改善基本 Monte Carlo 法的精準度，我們引進了第四章第二節所提出的 Martingale 控制變異法 (martingale control variate method, MCV)，此類方法之最大優點是幾乎適用於各類選擇權商品契約，並以建構方式選擇控制變數，使選擇權價格之不偏估計量的變異數得以減少。由於在此處理的是隨機波動模型，請詳見 4.3.2 節中以一個歐式選擇權來說明 MCV 方法，與亂化擬蒙特卡羅 (randomized quasi Monte Carlo) 等方法之結合，以應用於此處的計算。

為了更簡潔清晰的了解兩階段方法模型校準的實際做法，我們將流程彙整如下：

1. 在歷史機率測度下，估計隨機波動模型的參數 (α, β, m) 。此步驟包含兩個部份：
 - 甲、利用修正後的傅立葉方法，估計出波動率數列。
 - 乙、使用估計出的波動率數列估出模型內的參數。

2. 在風險中立的機率測度下，假設模型參數 (α, β) 不變：

甲、利用蒙地卡羅搭配 Martingale 控制變數，依選定的隨機波動率模型模擬選擇權價格。

乙、藉由解一最佳化問題

$$\min_{m^*, \rho^*} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{Price_{Model}^{(i)}(T, K_i, m^*, \rho^*) - Price_{Market}^{(i)}(T, K_i)}{Price_{Market}^{(i)}(T, K_i)} \right]^2$$

估計出在風險中立測度下的 (m^*, ρ^*) 。

備註：蒙地卡羅模擬法中的Martingale控制變異法的程式可見於第四章，而這裡最佳化的數值解法可使用Matlab指令fminsearch.m。另可用指令xlswrite將計算結果匯出至Excel檔以供畫圖。

3.2 實證結果

接著我們使用這個兩階段校準方法，在 Heston 模型架構下，對臺指選擇權進行實證分析，觀察經由此兩階段方法所校準的模型對於真實資料的配適情況。資料處理方面，我們蒐集 2010/01/22 的臺灣指數選擇權的買權，將選擇權價性(moneyness)在 0.9~1.1 之外的資料以及無法計算出隱含波動率的資料，予以刪除。無風險利率我們選用臺銀公告三個月定存利率。

表 3-1 為我們採用 2010/01/22 前 500 天的臺灣大盤指數，經由第一階段使用修正後的傅立葉方法，在歷史機率測度下估計出的模型參數。

表 3-1 歷史機率測度下估計的模型參數

α	β	m
10.8600	2.2092	0.0921

表 3-2 風險中立測度下估計的模型參數、價格誤差及隱含波動率誤差

m^*	ρ^*	MSE_RPrice	MSE_ImpVol
0.038184	-0.9163	3.93E-02	2.86E-05

表 3-2 中的 (m^*, ρ^*) 為經由第二階段在一風險中立機率測度下估計出的參數， MSE_RPrice 為在第二階段校準中，模型價格與市場真實報價的相對誤差。由於人們習慣用隱含波動率（Implied Volatility）的誤差來衡量模型校準的結果，因此我們利用經此兩階段 Monte Carlo 校準法所校準過的模型參數 $(\alpha, \beta, m^*, \rho^*)$ ，計算由模型估計出的價格的隱含波動率與真實報價的隱含波動率兩者間的誤差（ MSE_ImpVol ）來進一步觀察此兩階段 Monte Carlo 校準法對隱含波動率的配適程度。我們採用的資料經處理後內含到期日為 2010/02/22，共 11 個不同執行價的買權。由表 3-2 中可以看出，此兩階段 Monte Carlo 校準法對隱含波動率配適的誤差可以達到 2.86E-05 的水準。圖 3.1 是將經由這 Monte Carlo 法校準過的模型參數 $(\alpha, \beta, m^*, \rho^*)$ ，對臺指選擇權買權的隱含波動率進行配適的結果，我們可以看出由兩階段方法得到的隱含波動率幾乎與真實的隱含波動率重合。下一小節中，會比較此兩階段 Monte Carlo 校準法與廣為人知的快速傅立葉方法對隱含波動率的配適結果。

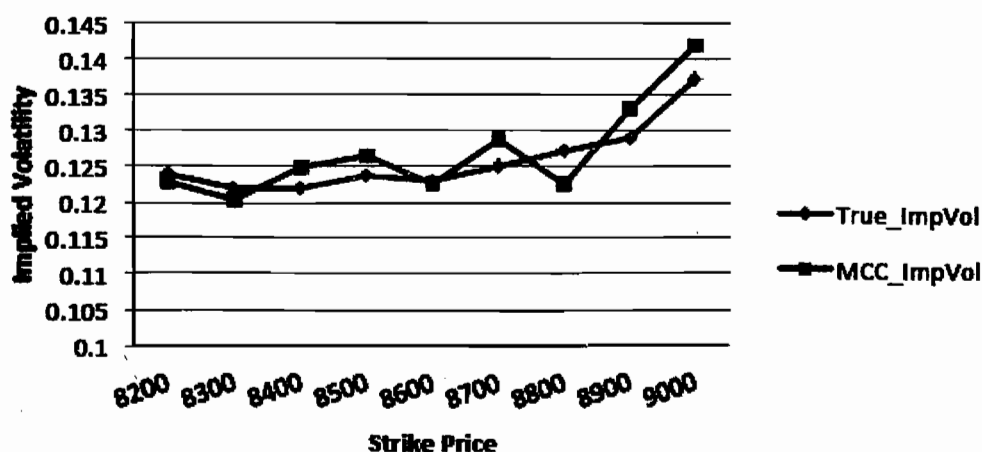


圖 3-1 兩階段 Monte Carlo 校準法在 Heston 模型下對隱含波動率的配適結果

3.3 與傳統快速傅立葉方法比較

為驗證上一節所介紹的兩階段 Monte Carlo 校準方法，我們與傳統的 FFT Heston 模型校準方法做比較。值得注意的是，FFT 方法僅侷限於開根號過程（squared root process）之下，詳細敘述見第三章第二節。注意到，兩階段 Monte Carlo 對一因子的隨機波動模型具有一般性。

由於快速傅立葉方法在 Heston 模型的架構下有封閉解，其估計結果的精準度已是廣為人知的事實。因此，我們將上一節所介紹的兩階段 Monte Carlo 校準法與快速傅立葉方法，在 Heston 模型架構下，分別對 2010/01/22 臺指選擇權的買權價格進行模型校準。表 3-3 列舉出此兩種方法個別的模型參數估計結果、價格誤差及隱含波動率誤差。

表 3-3 兩階段 Monte Carlo 校準法與快速傅立葉方法的估計參數、價格誤差及隱含波動率誤差

	α	β	m^*	ρ^*	MSE_RPrice	MSE_ImpVol
<i>MCC-Heston</i>	10.8600	2.2092	0.038184	-0.9163	3.93E-02	2.86E-05
<i>FFT-Heston</i>	30.8303	0.7471	-0.0505	-0.0308	5.60E-03	3.26E-05

圖 3-2 為快速傅立葉方法及兩階段 Monte Carlo 校準法對真實隱含波動率配適結果。由圖表可知，此兩階段 Monte Carlo 校準法對隱含波動率的配適誤差與快速傅立葉方法屬於同一個數量尺度，這表示此兩階段 Monte Carlo 校準法在提升模型校準效率的前提之下，仍保有一定的準確度。更甚者，利用此兩階段 Monte Carlo 校準方法比快速傅立葉方法來的有彈性。快速傅立葉方法只有在 Heston 模型的架構下才有封閉解，而此兩階段 Monte Carlo 校準方法除了可以廣泛的應用在其它隨機波動率模型上，例如：log-Vasicek 模型，也適用於除了歐式選擇權外的其它選擇權，例如美式選擇權、亞式選擇權，等等。

以下我們利用 2010/09/20 的臺指選擇權，在 log-Vasicek 模型的架構下使用此兩階段 Monte Carlo 校準方法，與快速傅立葉方法比較對模型參數校準的效果。由表 3-4 可以看出，在隱含波動率的配適上，使用兩階段 Monte Carlo 校準法搭配

log-Vasicek 模型優於快速傅立葉方法搭配 Heston 模型。圖 3-3 表示由校準後的參數所得之隱含波動率與真實隱含波動率的比較情形。

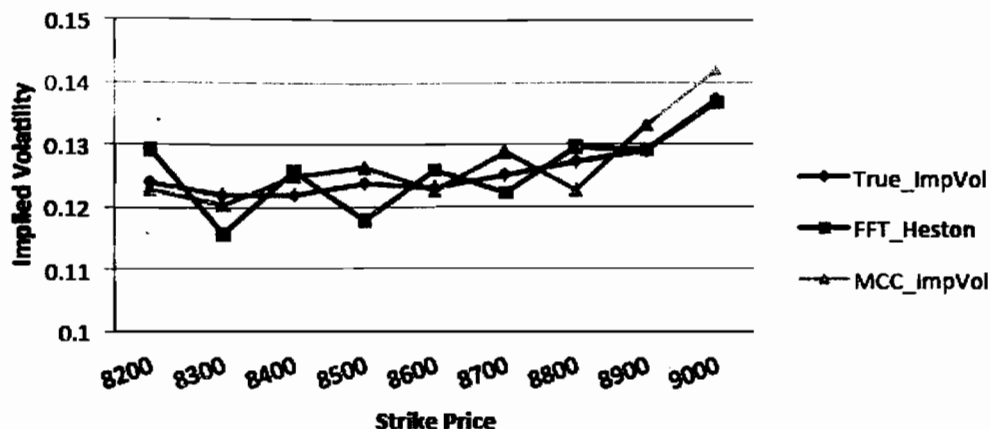


圖3-2 快速傅立葉方法與兩階段Monte Carlo方法對隱含波動率配適的比較

表 3-4 兩階段 Monte Carlo 校準法搭配 log-Vasicek 與快速傅立葉搭配 Heston 的估計參數、價格誤差及隱含波動率誤差

	α	β	m^*	ρ^*	MSE_RPrice	MSE_ImpVol
<i>MCC _Log-Vasicek</i>	21.2771	6.1765	-4.6516	-0.2088	1.54E-02	9.66E-06
<i>FFT_Heston</i>	31.5004	0.2253	-0.0447	-0.2555	1.19E-02	5.61E-04

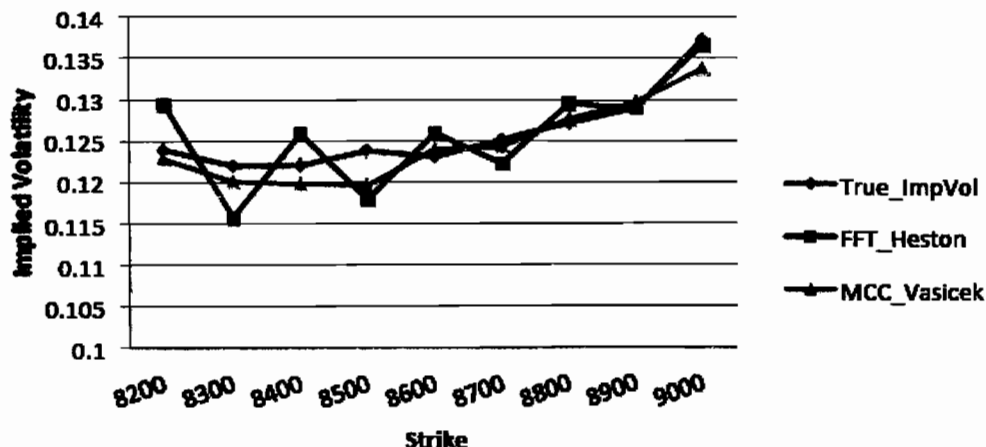


圖3-3 兩階段Monte Carlo校準法搭配log-Vasicek與快速傅立葉方法搭配Heston對隱含波動率配適的比較

3.4 小結

在兩個等價的 **Martingale** 機率測度（也就是在現貨與選擇權市場）下，**TAIEX** 波動率的動態行為可由本節所提出之兩階段 **Monte Carlo** 模型校準法加以研究。此校準法比起傳統的快速傅立葉轉換 (**FFT**) 在模型使用上更有彈性且應用層面更廣，包含了不同抽樣頻率下波動率的分析，**Heston** 與 **log-Vasicek** 等模型參數估計等。在未來我們除了可推展現有的研究方法到波動率風險溢酬的分析外，另將在美國 **S&P 500** 指數選擇權價格上，對更廣義的隨機波動模型進行校準，對某些美式選擇權價格的模型校準，以及跨金融市場，如股票市場與信用市場 (**Credit Market**)，的共同模型校準 (**Joint Model Calibration**) 等相關課題進行研究，以深入探索波動率或波動率矩陣的資訊內涵。

Appendix

附 錄

本章學習重點

附錄一：機率理論回顧

附錄二：隨機過程回顧與離散模型

附錄一 機率理論回顧

由於現代金融理論中使用到許多建立在抽象空間上的機率知識，以測度理論（measure theory）為基礎的機率理論會比較符合本書的需要。以下的內容節錄了基本的概念與本書中需要的重要結果，讀者會發現雖然我們從抽象性的定義出發，但最終會仍回到熟悉的機率統計方面的記號。

一、機率空間

對於任何一個給定的（物理）實驗，每一個實驗結果或產出（outcome）稱為樣本（sample），記為 ω 。將所有可能的實驗產出搜集起來，則此集合 $\Omega := \{\omega: \omega \text{ 為實驗一個產出}\}$ 稱之為樣本空間（sample space）。

範例 1.1

1. 對於擲一次銅板來說： $\Omega_1 = \{\text{正面}(H), \text{反面}(T)\}$ 。

2. 擲 n 次銅板的樣本空間為

$$\Omega_n = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_1 = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n): \omega_i = \{H, T\}, i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}。$$

3. 擲銅板無限多次的樣本空間為

$$\Omega_\infty = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_1 \times \cdots = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots): \omega_i = \{H, T\}, i \in \{1, 2, \cdots\}\}。$$

4. 對於 $[0, 1]$ 這個閉區間任意取出一個數字的樣本空間為

$$\Omega_{[0,1]} = \{\omega \in [0,1]\} = [0,1]。$$

備註：樣本空間 Ω_∞ 以及 $\Omega_{[0,1]}$ 都包含了（不可數）無限多個樣本。

定義 1.1： 假設 Ω 為一個非空的樣本空間，令 \mathcal{F} 為由 Ω 的子集合所形成的另一個集合，

我們稱 \mathcal{F} 為 σ -algebra 或 σ -field，若下面三個條件滿足：

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ 。（樣本空間是 \mathcal{F} 的元素）

2. 如果 $A \in \mathcal{F}$ ，那麼 $\Omega/A \in \mathcal{F}$ 。（一個事件的補集也是一個事件）

3. 如果 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 那麼 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ 。(一序列事件的可數聯集也會是一個事件)。

備註：一個 σ -algebra \mathcal{F} 的元素是 Ω 的子集合，該元素可稱為一個事件 (event) 或是一個可測集合 (measurable set)。序對 (Ω, \mathcal{F}) 稱為可測空間 (measurable space)。

定義 1.2：當 $\Omega = \mathcal{R}$ 是所有實數所形成的集合，而且 \mathcal{C} 是所有開區間所形成的集合。如果 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ 是由 \mathcal{C} 所生成最小的 σ -algebra，那我們就稱 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ 為 Borel σ -algebra，並把它記為 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ 。

範例 1.2

下面的集合都是屬於 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ ，這些集合也稱之為 Borel 集合：(1) (a, b) 、(2) $(a, +\infty)$ 、(3) $(-\infty, a)$ 、(4) $[a, b]$ 、(5) $\{a\}$ 、(6) 任何一個有限的集合、(7) 任何一個可數的集合、(8) 所有自然數所形成的集合、(9) 所有有理數所形成的集合、(10) 所有無理數所形成的集合。

若可測空間 (Ω, \mathcal{F}) 中樣本的產生具隨機性，我們可進一步建立機率測度 (probability measure) 如下。

定義 1.3：令 \mathcal{F} 為一個非空集合 Ω 的 σ -algebra， \mathcal{P} 是一個取值在 $[0, 1]$ 區間上的集合函數 (set function)，而這些集合定義在 \mathcal{F} 上。也就是說，對每一個集合 $A \in \mathcal{F}$ ， $\mathcal{P}(A)$ 會取值在 $[0, 1]$ 中；有時候我們會簡單地記做 $\mathcal{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 為一個集合函數。我們稱 \mathcal{P} 為一個機率測度若

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ 。
2. (可數的加法性, countable additivity) 對任何一個集合序列 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ，其中任兩個集合 A_i, A_j 為互斥，也就是 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 如果 $i \neq j$ ，則

$$\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)。$$

序對 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 稱之為一個機率空間 (probability space)。

備註：機率空間是隨機實驗的數學模型。

範例 1.3

若 P_1 和 P_2 都是定義在 (Ω, \mathcal{F}) 上的機率測度，假設 α_1 及 α_2 為非負的實數而且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ，則我們可以證明 $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ 也會是一個機率測度。

備註：這個結果也可以推廣到可數的加法上。

定義 1.4：若集合函數 $u: B(\mathcal{R}) \rightarrow [0, \infty]$ 滿足以下兩個條件，我們稱 u 為 Lebesgue 測度 (measure)。

(1) 對應了每一個有限的區間到它的長度，也就是

$$u([a, b]) = u((a, b)) = u([a, b)) = u((a, b]) = b - a,$$

(2) 對任何一個兩兩互斥的 Borel 集合序列 A_1, A_2, \dots

$$u\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} u(A_i).$$

備註：當 $\Omega = [0, 1]$ 而且 $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega: A \in B(\mathcal{R})\}$ ，Lebesgue測度 u 則是一個定義在 $[0, 1]$ 上面的機率測度，並且我們稱 u 為均勻測度 (uniform measure)。

範例 1.4

從 Lebesgue 測度定義中的條件(1)可以證明對任何一個在實數上的單點 $x \in R$ 的集合 $\{x\}$ ， $u(\{x\})=0$ ，而利用條件(2)可證明 $u(Q) = 0$ ，其中 Q 是所有有理數點所形成的可數集合。當 u 為定義在 $[0, 1]$ 上的均勻測度時，我們可測量其中無理數點所形成的集合為 $u(Q^c \cap [0, 1]) = 1$ 。這個結果會在範例 3.1 的計算中用到。

定義 1.5: 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 為機率空間，我們說一個事件 $A \in \mathcal{F}$ 會幾乎確定地 (almost surely, a.s.) 發生若 $\mathcal{P}(A) = 1$ 。

定義 1.6: 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 為機率空間，若 $B \in \mathcal{F}$ 且 $\mathcal{P}(B) \neq 0$ ，則定義記號

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

為在給定事件 B 下，事件 A 發生的條件機率 (conditional probability)。

定義 1.7: (獨立性) 給定一序列集合 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$

- (1) 集合 A_1, A_2, \dots, A_n 是獨立的 (independent)，若有限交集事件的機率等於事件機率的相乘： $\mathcal{P}(\cap_{k=1}^n A_k) = \prod_{k=1}^n \mathcal{P}(A_k)$ 。
- (2) 任取兩個事件稱之為相互獨立 (mutually independent)，若對於 $i \neq j$,

$$\mathcal{P}(A_i \cap A_j) = \mathcal{P}(A_i) \cdot \mathcal{P}(A_j)。$$

二、隨機變數及其分佈

定義 2.1: 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 為機率空間，我們稱函數 $X: \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ 為一個隨機變數 (random variable) 如果 X 是一個可測函數 (measurable function)。也就是說，對每一個 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ ，它的前映 (preimage) $X^{-1}\{B\}$ 是一個事件：

$$X^{-1}(B) := \{X \in B\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}。$$

如果恰好原本的樣本空間 $\Omega = \mathcal{R}$ 而且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ ，那麼 X 就稱為 Borel 可測 (Borel measurable)。

作業 2.1 若函數 g 為 Borel 可測， X 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 中的隨機變數，證明 $g(X)$ 亦為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 中的隨機變數。

備註: 利用這個結果我們可以從一個已知的隨機變數，透過函數作用後製造出其它的隨機變數。

範例 2.1

令隨機變數 X 定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上，一個非負函數 $\mu_X: B(\mathcal{R}) \rightarrow [0,1]$ 若服從

$$\mu_X: B \in B(\mathcal{R}) \rightarrow P(\{X \in B\}),$$

則稱 μ_X 為定義在 Borel 集合上的機率測度 (probability measure)。

定義 2.2：我們也稱機率測度 μ_X 為隨機變數 X 的分佈 (distribution)，從其定義可看出此機率測度是定義在 Borel 集合上的，而非原始的 σ -algebra \mathcal{F} 。

備註：兩個不同的隨機變數可以有相同的分佈，而一個隨機變數也可以有兩個不同的分佈，如果它們是定義在兩個不同的機率空間上的話。

定義 2.3：對任何一個實質隨機變數 $X \in \mathcal{R}$ ，若函數 $F_X: \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ 被定義為

$$F_X(x) = \mu_X((-\infty, x]) = P(\{\omega: X(\omega) \leq x\})$$

則稱 F_X 為一個隨機變數 X 的 (累積) 分配函數 ((cumulative) distribution function; CDF)。

備註：知道一個隨機變數 X 的分佈 μ_X ，就等同於知道它的累積分佈函數 F_X 。

定義 2.4：(隨機變數的獨立性) 隨機變數 X_1, X_2, \dots, X_n 是獨立的若對於任意的 Borel 集合 $A_k, k = 1, \dots, n$ ，則 $P(\cap_{k=1}^n \{X_k \in A_k\}) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in A_k)$ 。

引理 2.1：隨機變數 X_1, X_2, \dots, X_n 是獨立的若且維若對任意 $x_k \in (-\infty, \infty]$ ， $k = 1, \dots, n$ ， $P(\cap_{k=1}^n \{X_k \leq x_k\}) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x_k)$ 。

定義 2.5：一個隨機變數 X 稱之為絕對連續 (absolutely continuous) 且有密度函數 (density function) $f_X: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ ，如果對於任何一個 $B \in B(\mathcal{R})$

$$\mu_X(B) = \int_B f_X(x) dx.$$

$$\text{例如 } B = [a, b], \text{ 則 } \mu_X([a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

備註：隨機變數的使用就是一種「量化」的觀念。我們可以對一個隨機變數 X 來定義它的機率測度，而不需要知道它的原始機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ，可見量化工具的一般性。

範例 2.2

我們稱隨機變數 X 服從常態分佈 (normal distribution)，記為 $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 其中 $m, \sigma \in \mathbb{R}$ ，若 X 是一個絕對連續的隨機變數且有密度函數

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

若 $m = 0$ 且 $\sigma = 1$ 則隨機變數 X 稱為標準常態隨機變數 (standard normal random variable)，而其機率密度函數稱之標準常態機率密度函數。其累積分佈函數記為 $\mathcal{N}(x)$ 並且被定義為

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

備註：可以檢查 $\mathcal{N}(x)$ 是一個嚴格遞增函數而且其對 x 取任 k 次的導數都是均勻有界的 (uniformly bounded)。

作業 2.2 一個在衍生性商品訂價中的典型問題是要計算下面的積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)\right) - K \right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (1)$$

其中 $S_0 > 0$ 記為股票在時間0的價格， $r \geq 0$ 記為無風險利率、 $\sigma > 0$ 記為波動率、 T 記為距離到期日的時間，而 $K > 0$ 記為履約價。請驗證方程式(1)有下列的封閉解，亦稱之為 Black-Scholes 公式：

$$S_0 N(d_1) - e^{-rT} K N(d_2),$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

一些常見的機率密度函數如下：

- (1) 二元分佈 (binomial distribution)：成功次數的機率 $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- (2) 幾何分佈 (geometric distribution)：等待時間 $P(N = n) = p(1-p)^{n-1}$
- (3) 泊松分佈 (Poisson distribution)：跳躍次數 $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- (4) 均勻分佈 (uniform distribution) 的密度函數 $f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$
- (5) 指數分佈 (exponential distribution) 的密度函數 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$

三、期望值

在這一節當中我們要定義 Lebesgue 積分，也就是在給定機率空間為 (Ω, \mathcal{F}, P) 之下， $\int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$ 的定義。

首先考慮隨機變數 X 是非負的情形，也就是對於任何一個 $\omega \in \Omega$ ， $X(\omega) \geq 0$ 。給定一個遞增的序列 $y_0 = 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots$ ，那麼我們可定義一個分割集合 (partition set) $\Pi = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ ，而這個集合 Π 的距離可以定義為 $\|\Pi\| = \max \{y_{k+1} - y_k, k \in 0, 1, 2, \dots\}$ 。在給定一個子區間 $[y_k, y_{k+1}]$ 下， X 的一個前映 (preimage) 的定義是

$$A_k = \{\omega \in \Omega: y_k \leq X(\omega) < y_{k+1}\}.$$

一個上 (下) Lebesgue 和 (upper (lower) Lebesgue sum) 分別被定義為

$$LS_{\Pi}^{+}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} P(A_k)$$

$$LS_{\Pi}^{-}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} P(A_k)。$$

當 $\|\Pi\|$ 收斂到 0 的時候，這個 $LS_{\Pi}^{-}(X)$ 的極限就定義為 Lebesgue 的下積分值 (lower integral)。如同黎曼積分 (Riemann integral) 的定義，若 Lebesgue 上積分值等於下積分值，則稱 Lebesgue 積分存在。

備註：在一般的情況下，也就是當 X 如果不是為非負的，我們也可以將上述的結果推廣到比較一般的情況，我們這裡就省略不在此做細部的探討，詳細的討論可以參閱測度理論或實變數函數 (Royden, (1998)) 的書。

Lebesgue 積分與黎曼積分的不同之處在於它們的分割方式。黎曼積分由於它的定義域是實數 (或更廣義的向量空間)，因此可在定義域上做有大小排列的分割；Lebesgue 積分的定義域乃是更一般或抽象的樣本空間，可能沒有大小之分，因此只好在值域上進行切割。事實上，Lebesgue 積分是一種更廣義的積分定義方式。我們可以從以下的範例以及定理中看出來。

範例 3.1

給定如下函數 $f(x) = 1$ 若 $x \in Q^c \cap [0,1]$ ，且 $f(x) = 0$ 若 $x \in Q \cap [0,1]$ 。計算該函數在 $[0,1]$ 區間的黎曼積分與 Lebesgue 積分。(對 Lebesgue 積分時使用了範例 1.4 中的 Lebesgue 測度)

證明：

對任意在 x 軸的分割 π 而言， $RS_{\pi}^{+} = 1$ 但 $RS_{\pi}^{-} = 0$ ，因此黎曼積分不存在。然而對在 y 軸上切割夠細的 π 而言，總可以得到 $LS_{\pi}^{+} \leq (1 + \|\pi\|)u(Q^c \cap [0,1]) = (1 + \|\pi\|)$ 且 $LS_{\pi}^{-} \geq (1 - \|\pi\|)u(Q^c \cap [0,1]) = (1 - \|\pi\|)$ ，因此 Lebesgue 積分存在且為 1。 ■

由此範例不難猜想 Lebesgue 積分比黎曼積分更為廣義，下面的定理確認了這個事實。

定理 3.1：（黎曼積分與 Lebesgue 積分的比較）令 f 為定義在實數上的有界函數且 $a < b$ ，則

- (1) 黎曼積分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在若且唯若 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 中不連續點所成的集合，其 Lebesgue 測度為 0（也就是說， $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 中幾乎處處連續）。
- (2) 若黎曼積分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，則 $f(x)$ 為可測函數且其黎曼積分的值與 Lebesgue 積分的值相等。

定義 3.1：令 X 為定義在一個機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 下的隨機變數，若 X 在 Lebesgue 積分下為可積的（integrable），也就是

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$$

則我們定義此隨機變數 X 的期望值（expectation）為

$$E\{X\} := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)。$$

備註：此期望值一般稱之為均值（mean value）。

關於 Lebesgue 積分的細部性質我們就在此省略，基本上會與下面期望值的性質相符。

定理 3.2：若 X 為定義在一機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 下的隨機變數，則有下列的性質：

1. 若 X 的值域為有限多個，也就是 x_0, x_1, \dots, x_n ，則

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^n x_k P\{X = x_k\}。$$

如果 Ω 是有限的，則 $E\{X\} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}。$

2. （可加性）如果 α, β 為實數且 X 和 Y 是可積的，則

$$E\{\alpha X + \beta Y\} = \alpha E\{X\} + \beta E\{Y\}。$$

3. (單調性) 如果 $X \leq Y$ almost surely, 而且 X 和 Y 是可積的, 則

$$E\{X\} \leq E\{Y\}。$$

4. (Jensen's 不等式) 如果 ϕ 是一個定義在實數 \mathcal{R} 上的凸函數, 而且 X 是可積的, 則

$$\phi(E\{X\}) \leq E\{\phi(X)\}。$$

證明：

省略前 3 個部份, 僅證 Jensen's Inequality。令 $x_0 = E[X]$, 由於 ϕ 的凸性, 必然存在 a, b 使得 $\phi(x) \geq ax + b$ 且 $\phi(x_0) = ax_0 + b$ 。現在考慮 $E[\phi(X)] \geq E[ax + b] \geq ax_0 + b = \phi(x_0) = \phi(E[X])$, 則得證。 ■

作業 3.1 驗證 Jensen's 不等式, 當 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 且 ϕ 是一個二次多項式, $\phi(x) = x^2$, 或是一個買權報酬 (call payoff) 函數, $\phi(x) = \max\{x - K, 0\}$ 。

定理 3.3: 若隨機變數 X_1, X_2, \dots, X_n 是獨立且絕對可積, 則 $E(\prod_{k=1}^n X_k) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$ 。

定義 3.2: 若隨機變數 X 的分佈函數是 F , 動差函數 (moment generating function, mgf) 或稱作拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 定義為 $\phi(t) := E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x)$ 。

若 X 與 Y 互為獨立, 則 $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ 。若 mgf ϕ_X 可微分, $\phi_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$ 且 $\phi_X^{(k)}(0) = E(X^k)$ 。

定義 3.3：若隨機變數 X 的分佈函數是 F ，特徵函數（characteristic function）或稱作

傅立葉轉換（Fourier transform）定義為 $\phi(t) := E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$ ，

$t \in R$ ， $i = \sqrt{-1}$ 是虛數。

範例 3.2 泊松分佈（Poisson distribution， $P(\lambda)$ ）

離散機率密度函數 $f(k) := P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ 特徵函數為 $\phi(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda e^{it})^k / k! = e^{-\lambda(1-e^{it})}$ 。

以下回顧一些特徵函數的性質：

- (1) $\phi(0) = 1$
- (2) $|\phi(t)| \leq 1$ ， $t \in R$
- (3) 特徵函數 ϕ 可唯一決定分佈函數 F 。
- (4) 一序列的隨機變數 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 以及 X ，其特徵函數的收斂性 $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ 等義於 X_n 在分佈中收斂（convergence in distribution）至 X 。

定義 3.4：若隨機變數 X, Y 的分佈函數分別為 F 與 G ，定義 $Z = X + Y$ 且分佈函數記為 H ，則稱 H 為 F 與 G 的包絡（convolution），並記為 $H = F * G$ 。

作業 3.2 假若互為獨立的隨機變數 X, Y 的機率密度函數分別為 f 與 g ，且 Z 的密度函數記為 h ，則 $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$ 。密度函數 h 也稱為 f 與 g 的包絡（convolution），並記為 $h = f * g$ 。

備註：獨立隨機變數的和會對應到分佈或是密度函數的包絡。

範例 3.4

假若隨機變數 t_1, t_2, \dots, t_n 是獨立並服從指數分佈（參數為 λ ），則 $T = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ 服從Gamma分配且其機率密度函數是 $f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$ 。

證明：

利用 t_1 的特徵函數是 $(\lambda - it)/\lambda$ 以及獨立性，則 T 的特徵函數是 $((\lambda - it)/\lambda)^n$ ，即服從 $\text{Gamma}(n, \lambda)$ 分配。

四、收斂模式

本小節探討一序列隨機變數以及它們期望值的收斂性值。

定義 4.1： 假設 X_1, X_2, \dots 為定義在某機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 下的隨機變量序列，

(a) $X_n \rightarrow X$ almost surely，記為 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ，若

$$P(\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \rightarrow X(\omega), n \rightarrow \infty\}) = 1.$$

(b) $X_n \rightarrow X$ in r th mean，其中 $r \geq 1$ ，記為 $X_n \xrightarrow{r} X$ ，若 $E(|X_n|^r) < \infty$ 對所有的 $n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $E(|X_n - X|^r) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 。

(c) $X_n \rightarrow X$ in probability，記為 $X_n \xrightarrow{p} X$ ，若對 $\varepsilon > 0$ ，

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

(d) $X_n \rightarrow X$ in distribution，記為 $X_n \xrightarrow{D} X$ ，若

$$P(X_n \leq x) \rightarrow P(X \leq x), n \rightarrow \infty$$

對所有點 x 使得 $F_X(x) = P(X \leq x)$ 連續。

備註：

- (1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 是點收斂 (pointwise convergence) 的概念，也常記為 $X_n \xrightarrow{a.e.} X$ (almost everywhere) 或 $X_n \rightarrow X$ with probability 1 (w.p.1.)。
- (2) 在分佈中收斂 (convergence in distribution) 常稱為弱收斂 (weak convergence) 或在律中收斂 (convergence in law)。

以上收斂性的關係如下。

定理 4.1 :

- (a) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$
- (b) $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$
- (c) 若 $r \geq 1$, 且 $r > s \geq 1$, 則 $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{s} X$

備註: $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 與 $X_n \xrightarrow{r} X$ 無必然互推的關係

定理 4.2 :

- (1) 若 $X_n \xrightarrow{D} C$, C 為常數, 則 $X_n \xrightarrow{P} C$
- (2) 若 $X_n \xrightarrow{P} X$ 且 $P(|X_n| \leq k) = 1$ 對所有 n 及某個 k , 則 $X_n \xrightarrow{r} X$ 對所有 $r \geq 1$ 。

上述的收斂性雖然使得機率論看起來變的繁複, 不過這種嚴謹化的過程卻是必須的, 我們熟知的大數法則與中央極限定理就是一例。

定理 4.3: (強大數法則, Strong Law of Large Numbers, SLLNs) 令 $(X_i, i \geq 1)$ 為一序列的獨立隨機變數, 且與隨機變數 X 服從相同的分佈。假設隨機變數 X 是可積的, 也就是 $E\{|X|\} < +\infty$, 則

$$E\{X\} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ a.s.,}$$

其中樣本平均數 (sample mean) 定義為 $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 。那也就是說

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = E\{X\}\right) = 1.$$

定理 4.4: (中央極限定理, Central Limit Theorem, CLT) 令 $(X_i, i \geq 1)$ 為一序列的獨立隨機變數, 且與隨機變數 X 服從相同的分佈。假設隨機變數 X 的前兩個動差 (moment) 存在, 則

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} (S_N - E\{X\}) \rightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ in distribution,}$$

其中 σ_X 是 X 的標準差。

在給定一序列的隨機變數 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 會收斂的情形下，很自然地我們會問說它們的期望值也會收斂嗎？一般來說，這個答案並不是肯定的；但在以下兩種情形則是肯定的。

定理 4.5：（單調收斂定理；Monotone Convergence Theorem）令 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ almost surely，且

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \text{almost surely,}$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\}。$$

在廣義的測度理論之下，單調收斂定理仍然是對的，當 $f_n \rightarrow f$ almost surely 在給定一個 Lebesgue 測度 u 上。也就是說，上述的結果與如下的測度理論相符。如果 $\{f_n\}$ 是一序列非負的 Borel 可測函數，它們會單調遞增到 $f(x)$ ，而且此收斂為點收斂（pointwise convergence），也就是說對每一個 x ， $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_n(x) du(x) = \int_R f(x) du(x)。$$

其中 u 是任何一個 Lebesgue 測度。

定理 4.6：（Dominated Convergence Theorem, DCT）令 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ almost surely。

如果存在另外一個隨機變數 Y 使得 $E\{Y\} < \infty$ 而且對於任何一個 n 來說，

$|X_n| \leq Y$ almost surely，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\}。$$

五、期望值的計算

在抽象的機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上，若要利用 Lebesgue 積分的原始定義去計算一個隨機變數 X 的期望值，是非常不方便的。回顧在可測函數或（實質）隨機變數 X 的定義之下，吾人可以定義一個新的機率測度記做 μ_X 為

$$\mu_X(B) = \mathcal{P}\{X \in B\} \text{ 對任何一個 Borel 集合 } B。$$

以下的定理將計算期望值從在原始的機率空間上遷移到實數上，大大簡化了期望值的計算方式，尤其是當隨機變數是絕對連續，也就是機率密度函數存在的時候。

定理 5.1： 令 X 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的一個隨機變數，而且令 g 是定義在 \mathcal{R} 上的 Borel 可測函數，則

$$E\{|g(X)|\} = \int_{\mathcal{R}} |g(x)| d\mu_X(x)。$$

如果這個量是有限的，則我們可以定義 $g(X)$ 的期望值

$$E\{g(X)\} = \int_{\mathcal{R}} g(x) d\mu_X(x)。$$

這個定理的證明要使用到上一節的收斂理論，在此省略該證明。

定義 5.2： 令 X 為定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的一個隨機變數，而且 g 為定義在 \mathcal{R} 上的一個可測函數。若 X 是絕對連續（absolutely continuous）的隨機變數，且其密度函數為 f_X ，則

$$E\{|g(X)|\} = \int_{\mathcal{R}} |g(x)| d\mu_X(x)。$$

而且若該量是有限的，則

$$E\{g(X)\} = \int_{\mathcal{R}} g(x) d\mu_X(x)。$$

定義 5.3：若 X 是絕對連續的隨機變數，且其密度函數為 f_X 使得期望值 $m = E\{X\}$ 是可定義的，則隨機變數 X 的變異數（方差，variance）可定義為

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f_X(x) dx,$$

假設該積分是收斂的；該分佈的第 n 次動差則定義為

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx.$$

範例 5.1

確認 $\text{Var}(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2 \geq 0$ 。

定義 5.4：兩個隨機變數 X 和 Y 的共變異（covariance）定義為

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{X \cdot Y\} - E\{X\} \cdot E\{Y\}.$$

X 和 Y 的相關係數（correlation coefficient）定義為

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

六、機率值的上下界

機率值的計算是期望值的一個特例， $P(X \in B) = E\{I_B(X)\} = \int_B X dP$ 。有時機率值本身並不易估計出，探討它的上下界可能提供一些簡易的訊息，在金融中甚至可以成為「套利（arbitrage）」的判斷準則。

定理 6.1：（上界估計）若 $f: R \rightarrow (0, \infty)$ 是一非負函數，則對 $a > 0$ ，

$$P(f(X) \geq a) \leq \frac{E[f(X)]}{a}.$$

證明：

令 $A = \{\omega: f(X(\omega)) \geq a\}$ ，則 $f(X(\omega)) \geq a \mathbb{I}_A(\omega)$ ，兩邊期望值便可得證。 ■

範例 6.1

(a) 若 $f(x) = |x|$ ，則 $P(|X| \geq a) \leq \frac{E[f(X)]}{a}$ ，稱為 Markov 不等式。

(b) 若 $f(X) = x^2$ ，則 $P(X^2 \geq a) \leq \frac{E[X^2]}{a}$ ，稱為 Chebyshev 不等式。

定理 6.2：（下界估計）若 $f: R \rightarrow [0, M]$ 為非負有界的函數，則對 $0 \leq a < M$ ，

$$P(f(X) \geq a) \geq \frac{E(f(X)) - a}{M - a}$$

證明：

令 $A = \{f(x) \geq a\}$ ，利用 $f(X) \leq M \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_{A^c}$ 取期望值即可得 $E[f(X)] \leq MP(A) + a(1 - P(A))$ 。 ■

以下僅敘述重要的不等式，證明省略。

定理 6.3：

(1) (Holder's Inequality) 若 $p, q > 1$ 且 $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ，則

$$E[|XY|] \leq E[|X|^p]^{1/p} E[|Y|^q]^{1/q}$$

若 $p = q = 2$ ，可得 Cauchy-Schwartz 不等式 $(E[|XY|])^2 \leq E[X^2] \cdot E[Y^2]$

(2) (Minkowski's Inequality) 若 $p \geq 1$ ，則

$$(E[|X + Y|^p])^{1/p} \leq E[|X|^p]^{1/p} + E[|Y|^p]^{1/p}$$

作業 6.1 證明當 $p \geq 1$, $g(p) = \log E[Z^p]$ 為凸函數, 並且 $E[|Z^r|]^{1/r} \geq E[|Z^s|]^{1/s}$ 當 $r \geq s > 0$

範例 6.1

給定對實值隨機變量 X , 對任何 $t \geq 0, x \in \mathcal{R}$, 則

$$P(X > x) \leq E[\exp(tX)] \cdot \exp(-tx)$$

證明:

1. 可直接由 Markov's Inequality 得證。
2. 由於對 $y \geq x$, $1 \leq \exp(t(y-x))$ 。因此

$$\begin{aligned} P(X > x) &\leq \int_x^\infty e^{t(y-x)} dF_x(y) \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty e^{t(y-x)} dF_x(y) \\ &= E[\exp(tX)]e^{-tx} \end{aligned}$$

七、測度轉換

機率測度之間的轉換導至了現代金融中最重要的核心概念-風險中立測度 (risk-neutral probability measure), 它是從歷史機率測度 (historical/physical probability measure) 轉換而來, 扮演了對衍生性金融商品的訂價理論中極重要的角色, 我們會在第一章中詳細討論。以下先提供基本觀念以及符號。

定理 7.1: 給定機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 下, 令隨機變數 $Z \geq 0$ almost surely 且 $E\{Z\} = 1$ 。

對於任何一個事件 $A \in \mathcal{F}$, 我們可以定義

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega). \quad (2)$$

則 \tilde{P} 為一個新的機率測度。此外，如果 $X \geq 0$ 則

$$\tilde{E}\{X\} = E\{XZ\}.$$

如果 $Z > 0$ almost surely，則對於任何一個非負的隨機變數 Y

$$E\{Y\} = \tilde{E}\{Y/Z\}.$$

證明省略。

定義 7.1：（機率測度的等價；Equivalence of probability measures）定義在 (Ω, \mathcal{F}) 上的兩個機率測度 \mathcal{P} 和 $\tilde{\mathcal{P}}$ ，如果它們彼此同意零集合（null set；一個零集合就是在 \mathcal{F} 上定義機率為 0 的一個事件。也就是說對任何事件 A 使得 $\tilde{\mathcal{P}}(A) = 0$ ，則 $\mathcal{P}(A) = 0$ ；反之亦然。），則 \mathcal{P} 和 $\tilde{\mathcal{P}}$ 稱作等價（equivalence）並記為 $\mathcal{P} \sim \tilde{\mathcal{P}}$ 。如果存在一個正的隨機變數 $Z > 0$ almost surely 使得 \mathcal{P} 和 $\tilde{\mathcal{P}}$ 滿足方程式 (2) 所定義，則 Z 就稱為 $\tilde{\mathcal{P}}$ 相對於 \mathcal{P} 的 Radon-Nikodym derivative，並記為

$$Z = \frac{d\tilde{\mathcal{P}}}{d\mathcal{P}}.$$

備註：這個記號在往後關於測度轉換的計算上相當好用。

定理 7.2：（Radon-Nikodym Theorem）若 \mathcal{P} 和 $\tilde{\mathcal{P}}$ 為兩個定義在 (Ω, \mathcal{F}) 上等價的機率測度，則會存在一個隨機變數 $Z > 0$ almost surely 且 $E\{Z\} = 1$ 使得

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \text{ 對任何一個 } A \in \mathcal{F}.$$

備註：如果兩個機率測度 P 和 \tilde{P} 是等價的，而且 $Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}$ 則對任何一個 $A \in \mathcal{F}$ ， $\tilde{P}(A) = \int_A Z^{-1}(\omega) d\tilde{P}(\omega)$ 。

範例 7.1

假設 X 在機率測度 \mathcal{P} 下服從 $\mathcal{N}(0,1)$ 分佈。令 $Z = e^{\theta X - \frac{\theta^2}{2}}$ 是一個 $\tilde{\mathcal{P}}$ 對於 \mathcal{P} 的 Radon-Nikodym derivative，則在 $\tilde{\mathcal{P}}$ 測度下 X 的分配為 $\mathcal{N}(\theta, 1)$ 。此外，

$$E\{I(X > c)\} = \int I(X > c) d\mathcal{P} = \int I(X > c) Z^{-1} d\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{E}\{I(X > c) Z^{-1}\}$$

證明：

檢驗分佈函數 $\tilde{\mathcal{P}}(X < x) = E[I(X < x)Z]$ ，寫出其積分形式並利用完全平方就可得證 $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ 。此外，也可以利用動差函數證明。 ■

作業 7.1 在方程式(1)中的機率表現為

$$E\left\{e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}X} - K\right)^+\right\}$$

其中 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 。利用上述的測度轉換，請再次推導出 Black-Scholes 公式

$$S_0 \mathcal{N}(d_1) - e^{-rT} K \mathcal{N}(d_2).$$

並且試著解釋 $\mathcal{N}(d_1)$ 與 $\mathcal{N}(d_2)$ 的財務意義。

作業 7.2 給定一機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ， $X \sim \exp(\lambda)$ 指數分佈的隨機變數。若 $\tilde{\lambda} > 0$ ，

$Z = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} e^{-(\tilde{\lambda} - \lambda)X}$ ，並定義 $\tilde{\mathcal{P}}(A) = \int_A Z d\mathcal{P}$ 對任意 $A \in \mathcal{F}$ 。證明 (1) $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega) = 1$ ，

(2) X 在新測度 $\tilde{\mathcal{P}}$ 下的分佈為何？

八、條件期望

先前已定義過條件機率如下 $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$ 若 $P(B) > 0$ 。若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是樣本空間的 Ω 的分割 (partition)，則可得

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n) .$$

並可推導出貝氏法則 (Bayes rule)

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_n P(A_n)P(B|A_n)} .$$

若利用指示函數 (indicator function) $I_A(\omega) = 1$ 若 $\omega \in A$, 反之 $I_A(\omega) = 0$, 將機率值以期望值表達出 $P(A) = E(I_A)$, 則上式可寫為

$$E(I_A|B) = \frac{E(I_A I_B)}{P(B)} .$$

這個符號可進一步推廣對隨機變數 X 的條件期望:

$$E(X|B) = \frac{E(X I_B)}{P(B)} .$$

接下來以對離散隨機變數的計算來引入條件期望的定義。假設隨機變數 X 與 Y 分別取值在 x_1, x_2, \dots, x_m 與 y_1, y_2, \dots, y_n 上, 它們發生的邊界機率 (marginal probability) 均為正 $f_X(x_i) > 0$, $i = 1, \dots, m$ 且 $f_Y(y_j) > 0$, $j = 1, \dots, n$, 另外也假設發生的聯合機率 (joint probability) $f(x_i, y_j) > 0$ 。

對事件 $\{X = x_i\}$ 與 $\{Y = y_j\}$ 來說, 在給定事件 $\{X = x_i\}$ 下, 隨機變數 Y 恰等於 y_j 的機率是

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_X(x_i)} .$$

這個條件機率 (conditional probability) 可記為 $f_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_X(x_i)}$ 。則可進一步計算期望值

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^n y_j f_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{\sum_{j=1}^n y_j f(x_i, y_j)}{f_X(x_i)} ,$$

並且定義出一個新的隨機變數 $Z = E(Y|X)$ ，使得對 $\omega \in \{X = x_i\}$ ， $Z(\omega) = E(Y|X = x_i) := z_i$ ；也很自然的稱這個隨機變數 $Z = E(Y|X)$ 「條件期望」(conditional expectation)。條件期望具有以下很特殊的「局部平均性質」(partial averaging property)：對任一事件 $\{X = x_i\}$

$$\begin{aligned}\int_{\{X=x_i\}} Z dP &= z_i P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n y_j f_{X|Y}(y_j|x_i) f_X(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^n y_j f(x_i, y_j) = \int_{\{X=x_i\}} Y dP\end{aligned}$$

利用積分在定義域上的加法性，可得到以下結果

$$\int_A Z dP = \int_A Y dP, \text{ 對任意 } A \in \sigma(X)。$$

這個式子說明了在 X 所生成的事件之下，條件期望 $Z = E(Y|X)$ 與 Y 的積分（或期望）值是相等的。

備註：注意到，條件期望 Z 不是一個數值，它乃是一個隨機變數；並且它與 Y 一般來說是不等的，不過在對 X 所生成的事件上積分卻會相等。

對熟悉機率統計的讀者來說，條件期望 $E(Y|X)$ 的記號就是最小平方法或者是隨機變數 Y 在 X 所生成的事件上的投影量。在附錄二中我們會用上式所呈現的平均性質當作條件期望的定義，並且以隨機過程作為範例。

範例 8.1

驗證上述的平均性質對連續隨機變數也是對的。

作業 8.1 假設隨機變數 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$ ，計算

$$E(Y|X = x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1)。$$

附錄二 隨機過程回顧與離散模型

在附錄一中所討論的觀念是靜態的，與時間無關，然而許多的現象以動態的形式呈現。以金融來說，我們常常需要能夠描述一個經濟系統或金融資產隨著時間而演變的過程，以便能夠在某個時點討論一些決策或訂價。將靜態的機率空間與隨機變數推廣到動態的架構，這是「隨機過程」(stochastic process)所討論的主題。以下我們所提供的基礎介紹，是針對了金融工程所需用的概念。另外，隨機過程與『資訊流』(information flow)有著密切的關係，後者屬於一種幾近「文字化」的解釋，使得艱深的隨機過程理論能夠被一般的文字描述，這促成金融工程能夠在商管學院被廣泛接受的一個原因。

首先在觀念上並不難想像，若想要說明某個金融資產價格的變動模式，我們必然會對該資產有所觀察。隨著時間的增加，關於該資產的消息面會逐漸釋出，投資人也因而能夠作一些投資決策。與「內線消息」做為對比，這裡所謂的「消息面」指的是投資大眾都能夠取得的公開資訊，並且消息面會累積愈來愈多（遞增）。以隨機模型來說，在一個時間下的消息面意指該時間的 σ -algebra，通常記為 \mathcal{F}_t ，並且 $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ 若時間 $s \leq t$ 。由消息面所形成的集合 $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ， I 是離散或連續的時間集合，叫做域流 (filtration)。而投資人得以根據這些消息面做出交易上的決策，則意味著當下的資產價格 S_t 是 \mathcal{F}_t -可測 (\mathcal{F}_t -measurable)；也就是說，給定了 \mathcal{F}_t 的資訊，投資人便可以決定 S_t 的值。請對照於「內線交易」(insider trading)，它指明了某投資人因為知道未來更多的資訊 \mathcal{F}_T ， $T \geq t$ ，而得以決定出可能不同的資產價格 S_t 。本書以及絕大部份的教科書僅考慮在公開資訊下的投資決策，並不考慮任何內部消息。

由價格 (或廣義的隨機變數) 所形成的集合 $\{S_t, t \in I\}$ 稱為隨機過程。若每個 S_t 是 \mathcal{F}_t -可測，則稱資產價格適應於 (adapted) $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ，當然應該在一個原先就給定了的機率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 之下並且每一個 $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ 。即使這樣定義出的隨機過程的架構仍過於廣泛，學理上對隨機過程常假設的兩類性質分別是馬可夫性質 (Markov

property) 與平賭性質 (martingale property); 前者假設了「無記憶性」(memoryless) 而後者假設了「公平性」(fairness), 我們會在下面的介紹中詳述。事實上, 在建立數學模型當中, 這些性質的假設雖然很強烈, 不過卻允許很多強大數學工具的使用, 譬如說伊藤公式, (偏) 微分方程, 傅立葉轉換等等, 並得以做出在金融上有意義的結論。就筆者來看。這是學習金融工程相當重要的一步, 也是全球相關專業課程中的核心元素。

接下來, 我們會以範例來引出隨機過程中許多抽象的定義並以資訊流等文字加以闡述。

一、隨機過程簡介

以連續擲銅板三次作為一個物理實驗, 因著依序三次的投擲與具正反兩面的銅板, 這是有著離散時間 (discrete time) 與離散空間 (discrete space) 的一個隨機過程的基本範例, 也稱作三期的二元樹模型 (three period binomial tree model)。令 H 與 T 為丟一次銅板可能的產出 (outcome), 它們所形成的集合記為 $\Omega_1 = \{H, T\}$, 就是丟一次銅板的樣本空間。連續丟銅板三次的樣本空間記為 $\Omega_3 = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1$ 。令 $\mathcal{F} = \{\Omega_3 \text{ 所有的子集合}\}$, 那麼 \mathcal{F} 就是這個實驗所有事件所形成的 σ -algebra, (Ω_3, \mathcal{F}) 稱作可測空間, 它會對應到三期的數學模型如下。

除非三次銅板已被丟出, 也就是完全的知道了樣本 $\omega \in \Omega_3$, 否則在給定第一次銅板被丟出之後, 我們會用集合來描述此訊息, 以區別每個樣本 ω 會或不會落在這些集合中。譬如當第一次銅板被丟出 (實現) 之後, 集合 $A_H = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$, $A_T = \{THH, THT, TTH, TTT\}$ 就被溶解 (resolved) 出來了。也就是說給定了 ω_1 的資訊, 對在樣本空間 Ω_3 中的每一個樣本 ω , 則可以判斷 $\omega \in A_H$ 或者 $\omega \in A_T$ 。 A_H 和 A_T 可以產生 (generate) 一個 σ -algebra 記為 $\mathcal{F}_1 = \{\phi, A_H, A_T, \Omega_3\}$ 。 A_H 和 A_T 也稱作在 \mathcal{F}_1 中的原子 (atoms), 它們是不可分割的集合 (indivisible sets)。 $(\mathcal{F}_1 \text{ 中的個數等於 } 2^2 = 4)$ 。

備註：我們也可以從 A_H 還有 A_T 這兩個集合來了解丟第一次銅板的可能產出，也就是H與T。該 σ -algebra \mathcal{F}_1 包含了從丟第一次銅板所學習到的資訊，這定義了前面提到過的消息面。

當前兩次銅板被擲出之後，一個比較精細的溶解就可以被得到如下：

$$A_{HH} = \{HHH, HHT\}, A_{HT} = \{HTH, HTT\}, A_{TH} = \{THH, THT\}, A_{TT} = \{TTH, TTT\}$$

這四個集合也可以產出一個 σ -algebra \mathcal{F}_2 ，透過補集（可數的）、聯集以及交集。這些 A_{ij} 的集合也稱作 \mathcal{F}_2 中的原子，它們也是不可分割的。同時透過這四個集合我們可以了解這個實驗已經投擲了兩次，他們可能的產出不是H就是T。由於 $\mathcal{F}_2 = \{\phi, \Omega_3, A_H, A_T, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, \dots\}$ ，注意到 \mathcal{F}_2 較 \mathcal{F}_1 精細（ $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ， \mathcal{F}_1 會包含在 \mathcal{F}_2 中），並且 \mathcal{F}_2 的個數等於 $2^4 = 16$ 。顯然， \mathcal{F}_2 較 \mathcal{F}_1 包含了更多關於實驗的資訊。

當三次銅板都被實現之後，每個 $\omega \in \Omega_3$ 就被溶解出來，因此 $\mathcal{F}_3 = \{\Omega_3 \text{ 所有子集} \} = \mathcal{F}$ 。注意到 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}$ ，而且 \mathcal{F}_3 的個數等於 $2^8 = 256$ 。

若沒有關於擲骰子這個實驗的任何訊息，那麼我們就可以定義在時間0上一個很簡化的 σ -algebra $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega_3\}$ 。隨著實驗的進行我們可以搜集到越來越多的資訊，將這些遞增的 σ -algebras $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^3$ 搜集起來就稱作一個域流（filtration），或稱做先前提及的資訊流。每一個 σ -algebra \mathcal{F}_i 都包含了從觀察到前*i*次擲骰子實驗所學習到的資訊， $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}$ ， \mathcal{F}_m 都會包含較 \mathcal{F}_n 更多的資訊，若 $m > n$ 。

定義 1.1： 給定一個非空集合 Ω 和一個固定的時間 $T < \infty$ ，假設對每個 $t \in [0, T]$ 都存在一個 σ -algebra \mathcal{F}_t ，而且是遞增的，也就是說對於 $0 \leq s < t \leq T$ ， $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ ，則我們稱這些 σ -algebra 所形成的集合 $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$ 為一個域流（過濾或濾子）（filtration）。

備註：域流也代表了資訊流；也就是說，在時間*t*的時候，對每個 \mathcal{F}_t 的元素，我們都能判斷實驗最後的產出 ω 是否落在該集合。

範例 1.1 無限的樣本空間 ($\Omega = C_0[0, T]$)

假設某一個資產價格的報酬率 r 是定義於樣本空間 $C_0[0, T] := \{r: [0, T] \rightarrow \mathcal{R} \text{ 是連續函數且 } r_0 = 0\}$ 中。若市場上已經觀察到了 $\{r_s\}_{0 \leq s \leq t}$ ，但是我們並不知道未來報酬率可能發生的值，則

1. 集合 $\{r \in \Omega, \min_{0 \leq s \leq t} r_s \leq 1\}$ 可被溶解出。這是因為累積到時間 t 我們已知道報酬率的歷史數據，因此能判斷在樣本 $\omega \in C_0[0, T]$ 在時間 0 到 t 這段期間是不是它的最大值會 ≤ 1 或者不是。
2. 集合 $\{r \in \Omega, r(T) > 0\}$ 不可以被溶解出，這是因為無法從現有的觀察判斷樣本（未實現的報酬率）是否會落在此集合或不是。

備註： $C_0[0, T]$ 是我們在第一章中討論布朗運動時的樣本空間，我們以後會再討論。

以上我們所討論與時間有關的 σ -algebra，基本上都是由我們在實驗上感到有興趣的事件所形成及建構而成。附錄一中曾用隨機變數來描述事件，因此可允許使用隨機變數可來產生 σ -algebra，定義如下。

定義 1.2： 若 X 為定義在可測空間 (Ω, \mathcal{F}) 的隨機變數，一個由 X 所產出的 σ -algebra 可以被定義為 $\sigma(X) = \{X^{-1}(B): B \text{ 為任意一個 Borel set}\}$ 。

接下來繼續延伸前面討論過三期的二元樹模型，下圖給出二期的結構，三期或多期的結構依此類推，一些隨機變數的設定如下。

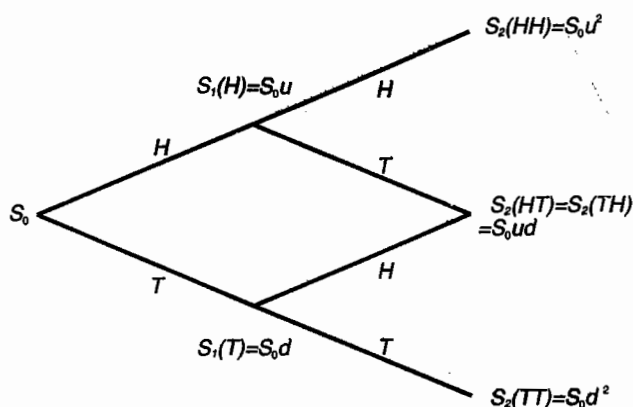


圖 1-1 二元樹模型

範例 1.2. 三期模型

假設在三期模型中，每次擲銅板正面的機率是 p ，反面是 $1-p$ 。若擲出正面，則標的資產 S 的價格會上漲至 u 倍，反之會跌至 d 倍，起始價格假設為 $S_0 > 0$ 。若 $S_0 = 4$ ， $u=1/d=2$ ，則 $\sigma(S_2)$ 是由集合 A_{HH} 、 $A_{HT} \cup A_{TH}$ 、和 A_{TT} 所生成的 σ -algebra。由於 $\sigma(S_2) \subseteq \mathcal{F}_2$ ，隨機變數 S_2 是 \mathcal{F}_2 -measurable，這也意味著 \mathcal{F}_2 提供了足夠的資訊使得在時間 2 時，吾人可以決定 S_2 的值。

作業 1.1 檢驗並解釋 S_2 不是 \mathcal{F}_1 -measurable。

定義 1.3： 若 X 為定義在 (Ω, \mathcal{F}) 的隨機變數， G 是樣本空間 Ω 中的另一個 σ -algebra，若 $\sigma(X) \subseteq G$ ，則我們說 X 為 G -可測 (G -measurable)。

備註： X 是 G -可測若且為若 G 的資訊足夠多到能夠決定隨機變數 X 的值。

事實上，若隨機變數 X 和 Y 都是 G -可測，而且 $f(x, y)$ 是一個可測函數的話，則 $f(X, Y)$ 也是 G -可測。這也就是說對任意一個 G -可測的隨機變數，在經過任何一個 Borel 可測函數的作用之後，仍然是一個 G -可測的隨機變數。

我們將本小節的內容歸結於下面定義中：

定義 1.4 :

1. 給定可測空間 (Ω, \mathcal{F}) ，將由時間為指標的 X_t 隨機變數搜集起來成為 $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ ，這個集合就稱為一個隨機過程，也就是說隨機過程只是將一序列的隨機變數所搜集起來的一個集合。
2. 給定域流，也就是一個由 σ -algebra 所形成的一個集合 $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$ ，若對每一個 t ， X_t 是 \mathcal{F}_t -可測，則我們稱此隨機過程 $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ 對該域流是適應的 (adapted) 或者說是一個適應過程 (adapted process)。

一序列隨機變數是獨立同分布 (independent and identically distributed, i.i.d.) 若每個隨機變數服從相同的機率分佈且彼此互相獨立。這是最單純的過程。此外，在上面的定義中，若每一個 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_u\}_{u=0}^t)$ ， \mathcal{F}_t 由隨機過程 $\{X_u\}_{u=0}^t$ 產生，則稱此 filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$ 為自然域流 (natural filtration)。在本書中若不特別強調機率空間中的域流時，一般指的就是自然域流。

備註：對等觀念： σ -algebra與資訊 (公開消息面)，filtration與資訊流， X_t 是 \mathcal{F}_t -measurable 與 \mathcal{F}_t 的資訊可決定 X_t 的值。

由於金融的問題往往與時間有關，因此定義一個隨機過程以及它的域流，在隨機模型上是必需也是很自然的，他們是用來描述金融資產變動時所常用的數學方法。隨機過程的適應性在金融上的應用可見但不侷限於：

(一) 投資組合在 t 的部位 $\Delta(t)$ 是假設為 \mathcal{F}_t -可測，也就是說在時間 t 的部位 $\Delta(t)$ 必需倚賴於投資人累積到 t 時間所搜集的資訊。

(二) 在時間 t 的資產價格必需是 \mathcal{F}_t -可測，也就是資產的定價乃是基於市場累積到時間 t 所包含的資訊。

(三) 資產的價格、避險的部位以及財富的過程，都必需對市場上公開的資訊流為適應的。

二、獨立性

在一個比較抽象的設置下，當隨機變數 X 的值可以充分由 σ -algebra G 來決定的時候，我們稱 X 為 G -可測。當隨機變數 X 的值完全不會被 σ -algebra G 來影響的時候，我們稱隨機變數 X 獨立於 σ -algebra G 。然而當隨機變數 X 的值確實會被 σ -algebra G 影響時，我們需要「條件期望 (conditional expectation)」這個觀念。本小節先討論獨立性的觀念，在下一節討論條件期望。

回顧若 (Ω, \mathcal{F}, P) 為一個機率空間，兩個可測集合 A 和 B 是互相獨立的若 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 。

範例 2.1

根據圖 1.1 的定義，證明下面兩個事件是獨立的：第一次擲出 H 與第二次擲出 T 。

證明：

$P(A_H \cap (A_{HT} \cup A_{TT})) = P(A_H)P(A_{HT} \cup A_{TT})$ 。也就是兩個事件的發生不會互相影響。

定義 2.1： 令 (Ω, \mathcal{F}, P) 為一機率空間，則

- (1) 令 G 和 H 是兩個子 σ -algebra，這兩個 σ -algebra G 和 H 為獨立若 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 對任意 $A \in G, B \in H$ 。
- (2) 令 X 和 Y 是兩個變數，此兩變數是獨立的若 $\sigma(X)$ 與 $\sigma(Y)$ 是獨立的。

以上的定義都可以推廣到多獨立性。

定理 2.1： 令 X 和 Y 是兩個獨立的隨機變數，且令 f 和 g 是定義在實數上的 Borel-可測函數，則 $f(X)$ 與 $g(Y)$ 也是獨立的隨機變數。

接下來我們定義獨立性在聯合分佈 (joint distribution) 上常用的結果。

定義 2.2 : 對一對隨機變數 (X, Y) 的聯合分配測度可定義為 $\mu_{X,Y}(C) = P\{(X, Y) \in C\}$

對任何一個 Borel set $C \subset R^2$, 那麼 (X, Y) 的聯合累積分配函數定義為

$F_{X,Y}(a, b) = \mu_{X,Y}((-\infty, a], (-\infty, b]) = P\{X \leq a, Y \leq b\}$, 其聯合分配函數

$f_{X,Y}(x, y)$ 滿足於 $F_{X,Y}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad \forall a \in R, b \in R$

關於 (X, Y) 的邊界分佈測度可定義為 $\mu_X(A) = P\{X \in A\} = \mu_{X,Y}(A \times R)$ 且 $\mu_Y(B) = P\{Y \in B\} = \mu_{X,Y}(R \times B)$ 。X 的邊界累積分佈函數記為

$$F_X(a) = \mu_X((-\infty, a]) = P\{X \leq a\}.$$

X 的邊界密度函數 $f_X(x)$ 定義為

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

且它滿足於 $\mu_X(A) = \int_A f_X(x) dx$ 或者 $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx$ 。

定義 2.3 : (聯合常態隨機變數, Multivariate Normal)

聯合常態隨機變數記為 $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, 其聯合密度函數定義為

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^T\right),$$

其中 $x \in R^n$, μ 代表平均值向量, 而 $\Sigma \in R^{n \times n}$ 記為一對稱且正定的共變異矩陣 (symmetric and positive definite covariance matrix)。

定理 2.2 : (等義的獨立性) 若隨機變數 X 與 Y 是獨立的, 則下面的條件等義:

$$(1) \mu_{X,Y}(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B)$$

$$(2) F_{X,Y}(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$$

$$(3) f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$(4) Ee^{uX+vY} = Ee^{uX} \cdot Ee^{vY}$$

證明省略

三、條件期望

仍然以二元樹的例子來引出條件期望的觀念，並加入每次擲硬幣是獨立的條件。考慮 X 是定義在機率空間 $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P)$ 上的隨機變數，對於任何 $1 \leq n \leq N-1$ ，先定義隨機變數如下

$$E_n[X](\omega_1 \cdots \omega_n) = \sum_{\omega_{n+1} \cdots \omega_N} p^{\#H(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)} X(\omega_1 \cdots \omega_N)$$

當 $n=0$ 或 $n=N$ 時，則分別定義為

$$E_0[X] = \sum_{\omega_1 \cdots \omega_N} p^{\#H(\omega_1 \cdots \omega_N)} q^{\#T(\omega_1 \cdots \omega_N)} X(\omega_1 \cdots \omega_N)$$

$$E_N[X](\omega_1 \cdots \omega_N) = X(\omega_1 \cdots \omega_N)$$

可以看出上面的定義意圖要「估計 (estimate)」隨機變數 X 若給定了資訊 \mathcal{F}_n 。兩個極端的情形是(1)在 \mathcal{F}_0 下 (沒有任何訊息或是僅有最基本的資訊)，這個估計是常數-期望值 $E_0[X]$ 。(2)在 \mathcal{F}_N 下 (有完整訊息)，這個估計是隨機變數 X 自己。顯然對於隨機變數 X 最好的估計是它自己，但這要求具有全部的資訊；而最差的估計則是一個常數，若沒有任何訊息被提供。

在三期的模型之下，我們可計算出

$$E_2[S_3](HH) = pS_3(HHH) + qS_3(HHT) \quad E_2[S_3](HT) = pS_3(HTH) + qS_3(HTT)$$

$$E_2[S_3](TH) = pS_3(THH) + qS_3(THT) \quad E_2[S_3](TT) = pS_3(TTH) + qS_3(TTT)$$

回顧已知 $P(A_{HH}) = p^2$, $P(A_{HT}) = P(A_{TH}) = pq$, $P(A_{TT}) = q^2$ ，並且在 \mathcal{F}_2 的資訊下， $A_{HH} = \{HHH, HHT\}$, $A_{HT} = \{HTH, HTT\}$, $A_{TH} = \{TTH, THT\}$, $A_{TT} = \{TTT, TTH\}$ 。因此得到了下面的結果，

$$E_2[S_3](HH)P(A_{HH}) = \sum_{\omega \in A_{HH}} S_3(\omega)P(\omega)$$

注意到由於隨機變數 $E_2[S_3]$ 在集合 A_{HH} 上的取值是常數 $E_2[S_3](HH)$ ，這意味著在定義域 A_{HH} 上， $E_2[S_3]$ 的積分 (或均值) 與隨機變數 S_3 相同；也就是 $\int_{A_{HH}} E_2[S_3] dP =$

$\int_{A_{HH}} S_3 dP$ 。這是一種局部的平均性質，並且其它的「平均」情形也類似存在，

$$E_2[S_3](HT)P(A_{HT}) = \sum_{\omega \in A_{HT}} S_3(\omega)P(\omega)$$

$$E_2[S_3](TH)P(A_{TH}) = \sum_{\omega \in A_{TH}} S_3(\omega)P(\omega)$$

$$E_2[S_3](TT)P(A_{TT}) = \sum_{\omega \in A_{TT}} S_3(\omega)P(\omega)$$

總之，可觀察到條件期望的兩個性質如下(1)是隨機變數(2)滿足部份平均性質 (partial averaging property)

$$\int_A E_2[S_3] dP = \int_A S_3 dP, A \in \mathcal{F}_2.$$

另外也可以將上式改寫為

$$E[(S_3 - E_2[S_3])I_A] = 0, A \in \mathcal{F}_2$$

並解讀為(向量) $S_3 - E_2[S_3]$ 垂直於(空間) \mathcal{F}_2 。用幾何的觀點來理解條件期望 $E_2[S_3]$ 是隨機變數 S_3 在 σ -algebra \mathcal{F}_2 (或 \mathcal{F}_2 -measurable 隨機變數所形成的空間) 上的投影量。在範例 3.1 中會證明這種幾何觀點，並可看出在「最小平方」的意義下，條件期望 $E_2[S_3]$ 是 S_3 的最佳估計，這自然就連結到了統計上迴歸 (regression) 的理論，而注意到這裡迴歸式不必然是線性的。條件期望的正式定義給定如下。

定義 3.1： 令 (Ω, \mathcal{F}, P) 為一個機率空間， G 為 \mathcal{F} 的一個子 σ -algebra，而且令 X 是一個隨機變數，則 X 給定 G 的條件期望，記為 $E\{X|G\}$ ，是一隨機變數滿足下面兩個條件：

- (1) 可測性 (Measurability) $E\{X|G\}$ 是 G -可測
- (2) 部份平均性質 (Partial Averaging Property) 對每一個落在 G 中的子集 A ，

$$\int_A E\{X|G\}(\omega) dP(\omega) = \int_A X(\omega) dP(\omega) \text{ 成立。}$$

若 $G = \sigma(W)$ 也就是 σ -algebra G 由隨機變數 W 所產出，則我們可以將條件期望 $E\{X|G\}$ 記為 $E\{X|W\}$ 。

備註：

- (1) 條件期望 $E\{X|G\}$ 事實上是一個隨機變數，而且是唯一決定的 (almost surely)
- (2) 隨機變數 $E\{X|G\}$ 會存在，其存在性由 Radon-Nikodym 定理決定，在此我們省略。
- (3) 隨機變數 $E\{X|G\}$ 也可以視為在給定 G 的資訊下，對隨機變數 X 的最小平方估計，在幾何上來說就是 X 在 G 上的投影量。

作業 3.1

證明在定理 3.1 中條件期望 $E\{X|G\}$ 是 G -可測的。

以下介紹條件期望的性質

定理 3.1： 令 X 是在機率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的隨機變數， G 為 \mathcal{F} 的一個子 σ -algebra，則

- (1) 若 $G = \{\phi, \Omega\}$ ， $E\{X|G\} = E\{X\}$ ；若 $G = \mathcal{F}$ ， $E\{X|G\} = X$ 。
- (2) (Positivity) 若 $X \geq 0$ ， $E\{X|G\} \geq 0$ 。
- (3) (Linearity) $E\{\alpha X + Y|G\} = \alpha E\{X|G\} + E\{Y|G\}$
- (4) (Taking out property) 若 X 是 G -可測，則 $E\{XY|G\} = X E\{Y|G\}$
- (5) (Tower property) 若 H 是 G 的一個子 σ -algebra，則 $E\{E\{X|G\}|H\} = E\{X|H\}$
- (6) (Independence) 若 X 和 G 互相獨立，則 $E\{X|G\} = E\{X\}$ 。
- (7) (Conditional Jensen's inequality) 若 ϕ 是一凸函數，則

$$E\{\phi(X)|G\} \geq \phi(E\{X|G\})$$

證明省略

注意到從以上定理中的性質(1)可看出，給定不同的 σ -algebra，對同一隨機變數 X 的條件期望也是不同的。一個實例是本節一開始定義的條件期望，可以很容易看出 $E_n[X] \neq E_m[X]$ 當 $0 \leq n \neq m \leq N$ ，因為 σ -algebra 並不相同。

範例 3.1 條件期望的投影性質或最小平方估計

令 X 是在機率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的隨機變數， G 為 \mathcal{F} 的一個子 σ -algebra，則對任一 G -measurable 隨機變數 Y ，

$$\text{Var}(X - E[X|G]) \leq \text{Var}(X - Y)。$$

證明：

令 $\mu = E[X - Y]$ 且利用上面定理以及下面作業(1)可證得

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - Y) &= E[(X - Y - \mu)^2] \\ &= E\left[\left((X - E[X|G]) + (E[X|G] - Y - \mu)\right)^2\right] \\ &\geq E[(X - E[X|G])^2] = \text{Var}(X - E[X|G]) \end{aligned}$$

作業 3.2 (1) 在範例 3.1 中給定的條件下，證明 $E[XE[X|G]] = E[(E[X|G])^2]$ 。

(2) 估計式 $E[X|G]$ 是不偏的 (unbiased)；就是 $E[E[X|G]] = E[X]$ 。

作業 3.3 給定隨機變數 X 與 Y ，且函數 $h(x, y)$ 可積使得 $E\{h(X, Y)\}$ 存在。

(1) 證明 $Z := E\{h(X, Y)|X\}$ 是一不偏估計式。也就是， $E\{Z\} = E\{h(X, Y)\}$ 。

(2) 證明 Z 的變異數必不大於 $h(X, Y)$ 的變異數。

作業 3.4 證明 $E(\text{var}(X|Y)) + \text{var}(E(X|Y)) = \text{var}(X)$ ，並給予統計上的解釋。

四、計算條件機率：平賭與馬可夫性質

前一節提到了條件期望在數學的定義以及性質，這一節試圖提供實際用以計算它的方法，以及條件期望在隨機過程中的重要性質。以下的引理利用獨立性來計算條件機率，這個結果對往後在談隨機過程有獨立增量 (independent increment) 的情形下很有幫助。

引理 4.1： 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 為一個機率空間且 G 為 \mathcal{F} 的一個子 σ -algebra，假設 X_1, \dots, X_K 這些隨機變數都是 G -可測，且 Y_1, \dots, Y_L 這些隨機變數與 G 互為獨立，令 $g(x_1, \dots, x_K) = E\{f(x_1, \dots, x_K, Y_1, \dots, Y_L)\}$ ，則 $E\{f(X_1, \dots, X_K, Y_1, \dots, Y_L)|G\} = g(X_1, \dots, X_K)$ 。

備註： 由於以後討論的隨機過程有很多是由獨立的隨機變數累加而成，上述引理會對這種隨機過程條件期望的計算十分有幫助。

範例 4.1

令 X 為一標準常態隨機變數，且獨立於 $W \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，且 $Y = \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}X + W$ ，計算

(1) $E[Y|X]$ (2) $E[f(X, Y)|X]$

定義 4.1：（平賭性質，Martingale Property）令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 為一個機率空間， T 為一個固定的大於 0 的時間，且令 $\{\mathcal{F}(t)\}_{t=0}^T$ 為 σ -algebra \mathcal{F} 的一個域流，考慮一個適應的隨機過程 $\{M_t\}_{t=0}^T$

- (1) 若對所有 $0 \leq s \leq t \leq T$ ， $E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ ，則此隨機過程稱為 martingale（公平的）。
- (2) 若對所有 $0 \leq s \leq t \leq T$ ， $E[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$ ，則此隨機過程稱為 submartingale（上升趨勢）
- (3) 若對所有 $0 \leq s \leq t \leq T$ ， $E[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$ ，則此隨機過程稱為 supmartingale（下降趨勢）

Martingale 這個字的原意與數學上的意義並不一致，它的演化過程有些趣味。Martingale 在 16 世紀時就被描述為『馬領繩』，用以避免馬頭仰起時可能對騎士造成傷害。根據 19 世紀時 William Thackeray 所著的經典 Vanity Fair（浮華世界）中將 martingale 用來描述一種賭博的策略-加倍賭注法（doubling stake strategy）。現在機率論中將 martingale（平賭或是鞅）定義成為公平的意思起始於 J. Ville（1939）以及後來 P. Levy 與 J.L. Doob 在 1930 年代之後的研究工作。

作業 4.1 通常一個選擇權的價格可以定義為條件期望 $P_t = E^*[\varphi(S_T)|\mathcal{F}_t]$ ，其中標的價格 S_t 在風險中立機率測度 P^* 下是一個 martingale。證明

- (1) 隨機過程 P_t 是一個 martingale。
- (2) 若報酬函數 (payoff function) $\varphi(x)$ 是凸函數 (convex function)，則 $P_t \geq \varphi(S_t)$ ，另此不等式的財務意義為何？
- (3) $\varphi(S_t)$ 是一個 submartingale。

作業 4.2 考慮三期股價的二元模型 S 。 $S_0 = 1$ ， $S_{i+1} = 2S_i$ 若股價上漲 $Y_i = u$ ； $S_{i+1} = \frac{1}{2}S_i$ 若股價下跌 $Y_i = d$ ，其中 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ 。假設所有的 Y_i 是 i.i.d. 服從 $P(Y = u) = p$ ， $P(Y = d) = 1 - p$ ， $0 \leq p \leq 1$ 。

1. 寫下分別由隨機變數 S_0 ， S_1 ，與 S_2 所生成的 σ -algebra。
2. 寫下並證明 $Z = E[S_2|S_1]$ 。
3. 證明 $Var(S_2 - Z) \leq Var(S_2 - S_1)$ 。
4. 證明過程 S_i 是 Markovian。
5. 給出機率 p 的條件，分別使得過程 S_i 是 supermartingale，martingale 以及 submartingale。

若某資產價格 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 是定義在機率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^\infty, P)$ 上的隨機過程。投資人的部位 $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ 稱為可預測的 (predictable) 若對於時間 $n \geq 1$ ， C_n 是 \mathcal{F}_{n-1} -measurable。可預測性指的是 C_n 必須在時間 n 之前決定。在此離散時間的設定下，投資人在時間 n 所持有資產 X_n 的單位數 C_n ，是由歷史期間 1 到 $n-1$ 所累積的資訊 \mathcal{F}_{n-1} 所決定的。現在定義 Y_n 為投資人所累積到時間 n 的損益 (profit and loss, P/L) 為

$$Y_n = \sum_{k=1}^n C_k \Delta X_k = \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1})。$$

若過程 X_n 是一個 martingale，學理上稱 Y_n 為 C 在 X 上的平賭轉換 (martingale transform of X by C)，若隨機過程 X 是一平賭。 Y_n 與以後在連續時間下隨機積分的觀

念類似。

定理 4.1：若 $C = \{C_n\}_{n=1}^\infty$ 是有界，可預測，且 $X = \{X_n\}_{n=1}^\infty$ 是一個 martingale，則

$Y = \{Y_n\}_{n=1}^\infty$ 是一個 martingale。

證明：

由以下結果可知 Y 是一個 martingale。

$$\begin{aligned} E[Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] &= E[C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= C_n E[(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

備註：(One can't beat the system) 在金融實務上，投資人利用現有的資訊來決定下一時間的交易部位（即可預測性），若投資標的是一個 martingale，則投資人所累積的損益也是公平的。

作業 4.3 若 C 是非負、有界、可預測且 X 是一個 supermartingale，則 Y 是一個 supermartingale。

定義 4.2：(馬可夫過程，Markov Process) 令 (Ω, \mathcal{F}, P) 為一個機率空間， T 為一個固定的大於 0 的時間，且令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$ 為 σ -algebra \mathcal{F} 的一個域流，考慮一適應的隨機過程 $\{X_t\}_{t=0}^T$ ，假設對所有 $0 \leq s \leq t \leq T$ 及 Borel-可測函數 f ，則會存在另一個 Borel-可測函數 g 使得 $E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = g(X_s)$ ，若上述的性質存在的話，我們稱此隨機過程 $\{X_t\}_{t=0}^T$ 是一個馬可夫過程 (Markov process)，或者此隨機過程具有馬可夫性 (Markovian)。

馬可夫性質是無記憶性的 (memoryless)，它告訴我們，在給定歷史資訊 \mathcal{F}_s 的情況下，我們對任何關於未來 X_t 的估計僅僅與最新的訊息 X_s 有關，與歷史無關。

備註：換句話說，馬可夫性質確保了關於資產 X ，它的過去資訊 \mathcal{F}_s 已經囊括在最近的價格 X_s 裏。在金融中，這個假設也稱作有效（或效率）市場假說 (efficient market hypothesis)。它隱含了技術分析 (technical analysis)，利用線圖進行股價分析以取得超額報酬，並非必要。

作業 4.4 離散時間過程 $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$ 稱作 p 次 (階) 自我回歸 (autoregressive of order p , $AR(p)$) 若存在 $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ 且 (ε_t) 是 i.i.d. 標準常態分佈使得

$$X_t = \sum_{s=1}^p a_s X_{t-s} + \varepsilon_t$$

請證明

- (a) X_t 是 Markovian 若且唯若 $p = 1$ 。
- (b) $AR(p)$ 是一 martingale 嗎? 若非, 在何種條件下會是?
- (c) 若 X_t 是 $AR(2)$, $Y_t = (X_t, X_{t+1})$ 會是 Markovian。

五、以隨機漫步為例

給定一機率空間 $(\Omega_\infty, \mathcal{F}, P)$, 令 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \Omega_\infty$ 而且 $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ 。每一個 ω_n 代表了第 n 次擲出銅板的產出, 也就是這些 ω_i 都是一些公平的伯努利 (Bernoulli) 隨機變數。定義一序列的隨機變數 $\{X_j\}_{j=1}^\infty$, 對每一個

$$X_j = \begin{cases} +1, & \text{if } \omega_j = H \\ -1, & \text{if } \omega_j = T \end{cases}.$$

一個對稱隨機漫步 (symmetric random walk, SRW) 是一個隨機過程, 記為 $(M_k)_{k=0}^\infty$ 使得 $M_0 = 0$ 且 $M_k = \sum_{j=1}^k X_j, k = 1, 2, \dots$ 。也就是說, 由一序列的伯努利隨機變數來定義一個新的隨機過程 M_k , 這些 M_k 為這些伯努利隨機變數 X_k 的部分和。

選擇一些離散的時間點 $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_m$, 隨機變數 $M_{k_1} = (M_{k_1} - M_{k_0}), (M_{k_2} - M_{k_1}), (M_{k_m} - M_{k_{m-1}})$ 都是獨立的。其中增量定義為 $M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$ 。注意到

- (1) 這些增量是互為獨立的。
- (2) 對每一個增量 $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$, 它們的均值為 0, 而變異數為 $k_{i+1} - k_i$ 。

從這兩個統計量的性質, 可以看出這些增量都是穩態的 (stationary),

因為這些增量的統計量並不跟某個特定的時間 k_l 有關係，只跟其時間差 $k_{l+1} - k_l$ 有關，當統計量具有這些性質時，我們稱這些隨機過程具有穩態性。

對每個非負的整數 $k < l$ 來說，我們很容易可以驗證對稱隨機漫步是一個平賭 martingale： $E\{M_l|\mathcal{F}_k\} = E\{(M_l - M_k) + M_k|\mathcal{F}_k\} = M_k$ 。這個性質是成立的，由於 $M_k - M_l$ 會獨立於 \mathcal{F}_k 且 $(M_k - M_l)$ 的均值為 0，其中的 \mathcal{F}_k 包含了所有前 k 次硬幣投擲的相關訊息。

備註：若隨機漫步不是對稱的，則此隨機漫步就不具有 martingale 性質。

對稱隨機漫步也具有 Markov 性質，因為對任意非負整數 $k < l$ 且任意一個可積分函數 f ，我們可以很容易地得到下列的計算結果：

$$\begin{aligned} E\{f(M_l)|\mathcal{F}_k\} &= E\{f((M_l - M_k) + M_k)|\mathcal{F}_k\} \\ &= \sum_{i=0}^{l-k} \binom{l-k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{l-k-i} f(2i - l + k + M_k) \\ &:= g(M_k) \end{aligned}$$

這個計算確認了 M_k 這個過程具有 Markov 性質，也就是給定 \mathcal{F}_k 的資料，對於 M_l 及其可能函數的預測僅僅跟 M_k 的訊息有關。值得注意的是，若隨機漫步不是對稱的，從這個計算我們可以看出它仍然會是一個 Markov 過程。

對隨機過程 M_k 來說，累積到時間 k 的二次變分 (quadratic variation) 被定義為

$$\langle M, M \rangle_k = \sum_{j=1}^k (M_j - M_{j-1})^2 = k$$

注意到二次變分與該過程經過的路徑有關 (path dependent)，這個性質有別於 variance。從定義上來說，二次變分仍然是一個隨機變數。對於對稱隨機漫步來說，如果計算時間到 k 為止的話，二次變分恰好為一個常數 k ，它具有路徑的 (pathwise) 性質。相對的， $\text{Var}(M_k) = k$ 是一個統計量，它把所有可能經過的路徑做了某種平均。總的來說，二次變分是一個隨機變數，而 variance 是一個統計量，為一常數。

對隨機漫步最大的興趣乃在於它可以「收斂」到布朗運動，不過要先做適當的縮放 (scaling)。也就是說，這裡的目標是要從隨機漫步，來慢慢建構所謂的布朗運動。首先，我們定義一個 scaled S.R.W. $W^{(n)}(t)$ 如下：

$$W^{(n)}(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt_i}, \quad nt_i \in \mathbb{Z}^+.$$

注意到新過程 $W^{(n)}(t)$ 是將原來隨機漫步適當的做了某種時間以及空間上的壓縮，使得

- (1) 在這裡我們有新時間區間，尺度大小為 $\frac{1}{n}$ 是非常小的，而原來隨機漫步中離散時間的區間為 1。
- (2) 這個新過程的振幅尺度也是小的，為 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ，而不若原來隨機漫步中的 1。

對於任何一個時間若 $t \in [0, \infty)$ ，則 $W^{(n)}(t)$ 則可以被定義成為在 t 時間的兩個相鄰的整數 $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ 中所定義出來的 $W^{(n)}$ 的值後做一線性內差 (linear interpolation)。

我們可以觀察到縮放後的 (scaled) 對稱隨機漫步繼承了稱隨機漫步的許多性質如下：

- (1) 獨立增量：對於任何一個 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ 來說， $(W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0))$ ， $(W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1))$ ， \dots ， $(W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1}))$ 都是互為獨立的，其中每一個 nt_i 都是一個整數。
- (2) 穩態 (stationarity)：對於任何一個 $0 \leq s \leq t$ ，

$$E\{W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)\} = \frac{1}{\sqrt{n}} E\{M_{tn} - M_{sn}\} = 0$$

$$\text{Var}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = t - s$$

(3) Martingale 性質：

$$E\{W^{(n)}(t)|\mathcal{F}_s\} = W^{(n)}(s)$$

(4) Markov 性質：對任何一個函數 f ，必然存在另一個函數 g 使得

$$E\{W^{(n)}(t)|\mathcal{F}_s\} = g(W^{(n)}(s))$$

(5) 二次變分 (quadratic variation)：對任何時間 $t \geq 0$ ，

$$\langle W^{(n)}, W^{(n)} \rangle_t = \sum_{j=1}^{nt} \left[W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t$$

現在來看看縮放後的對稱隨機漫步 $W^{(n)}(t)$ 的極限分配—布朗運動 W_t 。

定理 5.1：（極限定理）對任何一個固定時間 $t \geq 0$ ，

$$W^{(n)}(t) \xrightarrow{n \uparrow \infty} X \triangleq W_t \sim N(0, t) \text{ in distribution}$$

$$\text{也就是 } P(W^{(n)}(t) \leq x) \xrightarrow{n \uparrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-z^2/(2t)} dz。$$

證明的步驟大致是由於

$$\frac{W^{(n)}(t_i)}{\sqrt{t_i}} = \frac{\frac{1}{nt_i} M_{nt_i}}{1/\sqrt{nt_i}}$$

利用中央極限定理即可證明其收斂至一標準常態變量。

作業 5.1 利用動差函數的收斂性證明定理 5.1。

注意到對任何時間 $t \geq 0$ ，布朗運動都可以被定義。因此，布朗運動在「時間」上是連續的，這與隨機漫步是定義在離散時間上是不同的。此外，上述的極限定理，有時對我們計算或逼近布朗運動的值有很好的啟發。譬如若我們要計算 $P(0 \leq$

$W^{(100)}(0.25) \leq 0.2$), 那麼我們可以透過 $W^{(100)}(0.25)$ 這個隨機過程來逼近布朗運動。

根據定義 $W^{(100)}(0.25) = M_{25}$, 因此

$$\begin{aligned} & P(\omega: 0 \leq W^{(100)}(0.25)(\omega) \leq 0.2) \\ &= P(\omega: 0 \leq M_{25}(\omega) \leq 2) \\ &= P(\omega: M_{25}(\omega) = 1) \\ &= \binom{25}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ &= 0.1555, \end{aligned}$$

當中用到了 M_{25} 的取值只能是奇數。然而真正布朗運動在此區間的機率為

$$\begin{aligned} & P(0 \leq W_{0.25} \leq 0.2) \\ &= \int_0^{0.2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2z^2} dz \approx 0.1554. \end{aligned}$$

兩者所得的答案相當接近。也就是說，利用縮放的對稱隨機漫步可以有效地逼近布朗運動的邊界分佈。

作業 5.2 計算 $P(0.1 \leq W^{(100)}(0.2) \leq 0.3)$ 並與 $P(0.1 \leq W_{0.2} \leq 0.3)$ 的數值解做比較。

在金融上，我們往往會利用所謂的二元樹模型 (binomial model, 又稱為 Tree 方法) 來做為對於幾何布朗運動的逼近。由於幾何布朗運動是 log-normal 分配，因此在數學上我們也將 binomial model 的極限視為是 log-normal 隨機變數的逼近。

定理 5.2: (極限定理) 對任何一個固定時間 $t \geq 0$,

$$S_n(t) = S(0)u_n^{H_{nt}}d_n^{T_{nt}} \xrightarrow{n \uparrow \infty} S(t) = S(0)e^{-\frac{\sigma^2 t}{2} - \sigma W_t} \text{ in distribution,}$$

$$\text{其中 } u_n = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, d_n = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ 且 } P(\omega = H) = \frac{1+r-d_n}{u_n-d_n}.$$

六、大離差理論

從大數法則我們知道 i.i.d. 隨機變量的樣本平均 (sample mean)，記為 S_N ，會收斂到隨機變量的均值 m 。然而隨機變量 S_N 遠離 m 的機率會是多少呢？保險公司會對這類的問題非常感到興趣是因為上述的命題反映出對「極端事件」發生機率的估計，這乃是風險管理上相當重要的一環。

若給定一個門檻值 $r > 0$ ，機率 $\mathcal{P}([S_N - m] \geq r)$ 要如何估計呢？中央極限定理或可提供一個解答，但必須注意到其條件是門檻值 r 必須是 $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ 的尺度大小，因而常態分佈才能用來逼近上述命題。然而，假若 r 遠大於 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ，譬如 r 的尺度是 $O(1)$ ，極端機率 $\mathcal{P}([S_N - m] \geq r)$ 的估計就屬於「大離差 (large deviation)」的問題了。文獻上，大離差理論提供了這類命題的一些解答如下：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \mathcal{P}([S_N - m] \geq r) = -I(r),$$

也就是說由大離差事件所導致的小機率是以指數的形式漸近遞減

$$\mathcal{P}([S_N - m] \geq r) \approx e^{-NI(r)}. \quad (1)$$

以下我們僅介紹大離差理論在一維度 i.i.d. 實值隨機變數的結果稱為 Cramer's 定理，並在往後利用該定理判定第四章中重要抽樣法的效率性。定義樣本平均 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，其中 $\{X_i\}$ 為 i.i.d. 的一維實值隨機變量且均值為 m ，令 $M(\theta) = E[\exp(\theta X_1)]$ 為動差函數，且定義該函數的 Legendre transform 為

$$I(x) = \sup_{\theta} [\theta x - \log M(\theta)],$$

函數 $I(\cdot)$ 常被稱為 rate function，因為不難從式 (1)

中看出 $I(\cdot)$ 控制了小機率的衰減速度。以下探索 rate function 的性質。

引理 1: $I(x)$ 是凸函數

證明:

若 $\lambda \in [0, 1]$

$$I(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \sup_{\theta} [\lambda(\theta x_1 - \log M(\theta)) + (1 - \lambda)(\theta x_2 - \log M(\theta))] \\ \leq \lambda I(x_1) + (1 - \lambda)I(x_2) \quad \blacksquare$$

引理 2: (1) $I(x)$ 是非負的,

(2) $I(x)$ 的極小值取在點 $x = E[x_1] = m$ 上, 而且 $I(m) = 0$ 。

證明:

(1) 取 $\theta = 0$, $I(x) \geq 0 \cdot x - \log M(0) = 0$ 對所有的 x , 故為非負。

(2) 由 Jensen's inequality 可得 $M(\theta) \geq \exp(\theta m)$, 因此對任意的 θ , $\theta m - \log M(\theta) \leq 0$, 這意味著 $I(m)$ 必須等於 0, 且為極小值。 \blacksquare

引理 3: (1) 對 $x > m$, $I(x) = \sup_{\theta > 0} [\theta x - \log M(\theta)]$ 且 $I(x)$ 是非遞減的。

(2) 對 $x < m$, $I(x) = \sup_{\theta \leq 0} [\theta x - \log M(\theta)]$ 且 $I(x)$ 是非遞增的。

證明:

(1) 若 $x \geq m$, $\theta < 0$ 可得

$$\theta x - \log M(\theta) \leq \theta m - \log M(\theta) \leq I(m) = 0$$

因此定義成為極大值的 $I(x)$ 在 $\theta > 0$ 對 $\theta x - \log M(\theta)$ 取極大。

不難從此結果看出 $I(x)$ 的單調性。

(2) 推導與(1)類似。 \blacksquare

引理 4: (1) 動差函數 $M(\cdot)$ 是可微分的, $M'(\theta) = E[X_1 \exp(\theta X_1)]$, 並且若 θ_x 解了

$$\frac{M'(\theta_x)}{M(\theta_x)} = x, \text{ 則 } I(x) = \theta_x \cdot x - \log M(\theta_x)。$$

(2) $\log M(\theta)$ 是凸函數。

證明：

(1) 由於 $g(\theta) = \theta x - \log M(\theta)$ 是凹函數 (concave function) 且 $g'(\theta_x) = x - \frac{M'(\theta_x)}{M(\theta_x)} = 0$,

則 $g(\theta_x)$ 成為極大值。

(2) 令 $\theta < \alpha < 1$, $M(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) = E[e^{\alpha\theta_1 X_1} \cdot e^{(1-\alpha)\theta_2 X_1}]$ 。

令 $\alpha = \frac{1}{p}$, $1-\alpha = \frac{1}{q}$, 則由 Holder's inequality 得

$$\text{L.H.S.} \leq (E[e^{\theta_1 X_1}])^{\frac{1}{p}} (E[e^{\theta_2 X_1}])^{\frac{1}{q}}$$

兩邊取 \log 得

$$\log M(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) \leq \alpha \log M(\theta_1) + (1-\alpha) \log M(\theta_2)。$$

範例 1

(1) 若 X 是常態隨機變量, 均值為 a , 方差為 σ^2 , 由於 $M(\theta) = e^{a\theta + \frac{\sigma^2 \theta^2}{2}}$ 使得

$$I(x) = \sup_{\theta} [\theta x - a\theta + \frac{\sigma^2 \theta^2}{2}] = \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}。$$

(2) 若 X 是 Bernoulli 且參數為 p , 也就是 $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$, 則

$$M(\theta) = p \exp(\theta) + (1-p), I(x) = x \log \left(\frac{x}{p} \right) + (1-x) \log \left[\frac{(1-x)}{(1-p)} \right] \text{ 對於 } \theta \leq x \leq 1,$$

且 $I(x) = \infty$, $x \notin [0,1]$ 。

(3) 若 $X \sim \exp(\lambda)$, 則 $M(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$, 對 $\theta < \lambda$, 且 $I(x) = \lambda x - 1 - \log(\lambda x)$, 對於 $X > 0$;

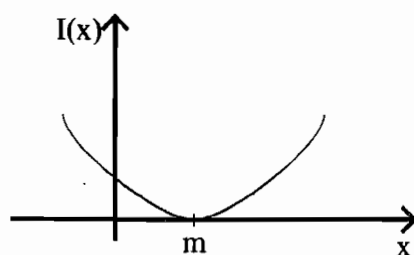
$I(x) = \infty$, $X \leq 0$ 。

定理 1: (Cramer's Theorem)

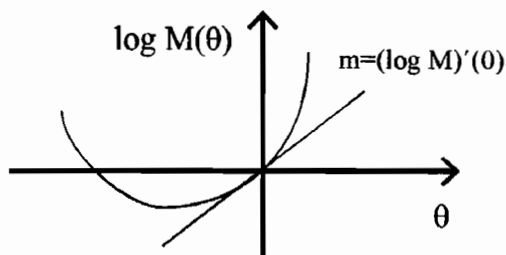
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(S_n \in F) \leq -\inf_{x \in F} I(x), \text{ 對任一閉集合 } F \in \mathcal{R}。$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(S_n \in G) \geq -\inf_{x \in G} I(x), \text{ 對任一開集合 } G \in \mathcal{R}。$$

證明可參閱 Bucklew (2003)。



(a) Rate Function



(B) Log動差函數

圖1-1 函數 (Rate Function與動差函數) 性質

範例 2 以微積分的方法得到 Cramer's Theorem 在常態變量的部份估計結果

(1) 利用

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^3} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} w^2 \right) = - \left(1 - \frac{3}{w^4} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} w^2 \right)$$

可得對 $w > 0$,

$$\int_w^\infty \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \geq \int_w^\infty \left(1 - \frac{3}{x^4} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^3} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} w^2 \right)。$$

此外

$$\int_w^\infty \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \geq \int_w^\infty \frac{x}{w} \exp \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) dx = \frac{1}{w} \exp \left(-\frac{w^2}{2} \right)。$$

(2) 令 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\{X_i\}$ 是 i.i.d. 標準常態隨機變量, 則對 $w > 0$,

$$\mathcal{P}(S_n > w) = \mathcal{P} \left(\frac{X_1}{\sqrt{n}} > w \right) = \mathcal{P}(X_1 > w\sqrt{n}) = \int_{w/\sqrt{n}}^\infty \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} x^2 \right)}{\sqrt{2\pi}} dx$$

由(1)的上下界取極限後可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{P}(S_n > w) = \frac{-w^2}{2}.$$

範例 3

給定 i.i.d. 隨機變量 $\{X_i\}$ ，證明

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i > y\right) \leq e^{-n \sup_{\eta > 0} \{\eta y - \log M(\eta)\}}.$$

若 $y > m$ ， $\mathcal{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N X_i > y\right) \leq e^{-nI(y)}$ 。

證明：

(1) 對於 $\xi > 0$ ，利用範例 1 可得

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > y\right) = \mathcal{P}\left(e^{\xi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} > e^{\xi y}\right) \leq e^{-\xi y} \left(M\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n$$

兩邊取 \log 得

$$\begin{aligned} \log \mathcal{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > y\right) &\leq -\xi y + n \log M\left(\frac{\xi}{n}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \log \mathcal{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > y\right) &\leq -\frac{\xi}{n} y + \log M\left(\frac{\xi}{n}\right) \quad \forall \xi > 0 \\ &= \inf_{\eta > 0} \{-\eta y - \log M(\eta)\} \\ &= -\sup_{\eta > 0} \{\eta y - \log M(\eta)\} \end{aligned}$$

(2) 若 $y > m$ ，由引理 3 可知

$$I(y) = \sup_{\eta > 0} \{\eta y - \log M(\eta)\}$$

故得證。

■

References

參考文獻

本章學習重點

中文部分

英文部分

一、中文部分

繆維正。韓傳祥 (2009)。以衍生性商品進行統計套利之研究 (The Research of Statistical Arbitrage with Derivatives Trading)。台北外匯市場發展基金會委託研究計畫。

韓傳祥。(2011)。「金融中波動率的數學問題」投稿中。

C.H. Han, Y.-H. Chang, and Y.-M. Yeo. (2011). 隨機模型下波動率的資訊內容：以臺灣為例 (Information Content of Volatility under Stochastic Volatility Models: Taiwan Case). 台灣期貨與衍生性商品學刊, 12, pp. 1-27.

C.-H. Han, W.-C. Miao, and T.-H. Yang. (2010c). 指數選擇權之實證避險表現：SPX 與 TXO. 台灣期貨與衍生性商品學刊, 11, 103-127.

二、英文部分

J. Anderluh and H. Van der Weide. (2004). Parisian options – the implied barrier concept. Lecture Notes in Computer Science, Volume 3039/2004, 851-858.

T.G. Andersen, T. Bollerslev, F.X. Diebold, and P. Labys. (2001). The distribution of realized exchange rate volatility. Journal of the American Statistical Association, 96, 42-55.

D. Applebaum. (2009). Levy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 2nd Edition.

P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. (1999). Coherent measures of risk. Mathematical Finance, 9, 203-28.

S. Asmussen and P. W. Glynn. (2010). Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis (Stochastic Modeling and Applied Probability). Springer.

M. Avellaneda and J.-H. Lee. (2008). Statistical Arbitrage in the U.S. Equities Market. Working Paper. New York University.

F.M. Bandi and J.R. Russell. (2008). Microstructure Noise, Realized Variance, and

- Optimal Sampling. The Review of Economic Studies Limited, 75, 339-369.
- F. Black and M. Scholes. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- F. Black and J. Cox. (1976). Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions. *Journal of Finance*, 31(2), 351-367.
- C. Bernard and P. Boyle. (2011). Monte Carlo Methods for Pricing Discrete Parisian Options. *European Journal of Finance*, 17(3), 169-196.
- T.R. Bielecki and M. Rutkowski. (2002). *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Springer.
- D. Brigo and F. Mercurio. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. 2nd Edition. Springer.
- C. Broto and E. Ruiz. (2004). Estimation methods for stochastic volatility models: A survey. *Journal of Economic Surveys* 18(5), 613-649.
- J. A. Bucklew. (1990). *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation*. Wiley-Interscience, Applied Probability and Statistics Series. New York.
- J. A. Bucklew. (2003). *Introduction to rare event simulation*. Springer.
- U. Cherubini, G. Della Lunga, S. Mulinacci, and P. Rossi. (2010). *Fourier Transform Methods in Finance*. Wiley Finance.
- J.-M. Courtault, Y. Kabanov, B. Bru, P. Crepel, I. Lebon, and A. L. Marchand. (2000). Louis Bachelier: On the Centenary of Theorie de la Speculation. *Mathematical Finance* 10 (3), 341-353.
- P. Carr and D. Madan. (1999). Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4), 61-73.
- U. Cherubini, G. Della Lunga, S. Mulinacci, and P. Rossi. (2010). *Fourier Transform Methods in Finance*. Wiley Finance.
- P. Christoffersen. (1998). Evaluating interval forecast. *International Economic Review*, 3(4), 841-862.

- P. Christoffersen, S. Heston, and K. Jacobs. (2009). The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work So Well. *Management Science*, 55(12), 1914-1932.
- M. Curran. (1994). Valuing Asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price. *Management Science*, 40(12):1705-1711.
- M. Davis and A. Etheridge. (2006). Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance. Princeton University Press.
- A. K. Dixit and R. S. Pindyck. (1994). Investment under Uncertainty. Princeton University Press.
- R. Engle. (2009). Anticipating Correlations: A New Paradigm for Risk Management. Princeton University Press.
- H. Finner, T. Dickhaus, and M. Roters. (2008). Asymptotic tail properties of Student's t-distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37(2), 175-179.
- H. Föllmer and A. Schied. (2004). Stochastic finance: an introduction in discrete time (2 ed.). Walter de Gruyter.
- J.-P. Fouque and C.-H. Han. (2007). A martingale control variate method for option pricing with stochastic volatility. *ESAIM: Probability and Statistics*, 11, 40-54.
- J.-P. Fouque and C.-H. Han. (2008). Asymmetric Variance Reduction for Pricing American Options, *Mathematical Modelling and Numerical Methods in Finance*, Volume 15: Special Volume (Handbook of Numerical Analysis). Editors A. Bensoussan, Q. Zhang, and P. Ciarlet. Elsevier.
- J.-P. Fouque, C.-H. Han, and Y. Lai. (2009). Variance Reduction for MC/QMC Methods to Evaluate Option Prices, *Recent Advances in Financial Engineering (Proceedings of the 2008 Daiwa International Workshop on Financial Engineering)*. Editors M. Kijima, M. Egami, K. Tanaka, and Y. Muromachi. World Scientific.
- J.P. Fouque, G. Papanicolaou, and R. Sircar. (2000). Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility. Cambridge University Press.

- J.P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solnar. (2003). Multiscale stochastic volatility asymptotics. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 2(1), 22-42.
- J.P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar, and K. Solnar. (2011). *Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest Rate, and Credit Derivatives*. Cambridge University Press.
- E. Fournie, J. Lebuchoux, and N. Touzi. (1997). Small noise expansion and importance sampling. *Asymptotic Analysis* 14, 361-376.
- J. Gatheral. (2006). *The volatility surface*. Wiley.
- P. Glasserman. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, New York.
- P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. (2000). Variance Reduction Techniques for Estimating Value-at-Risk. *Management Science*. 46(10), 1349-1364.
- P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. (2002). Portfolio Value-at-Risk with heavy-tailed risk factors. *Mathematical Finance*. 12(3). 239-269.
- C.-H. Han. (2010). Estimating joint default probability by efficient importance sampling with applications from bottom up. Working Paper. National Tsing-Hua University.
- C.-H. Han. (2010). Robust Hedging Performance and Volatility Risk in Option Markets. Submitted.
- C.-H. Han and Y. Lai. (2010 a). A Smooth Estimator for MC/QMC Methods in Finance. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81, 536-550.
- C.-H. Han and Y. Lai. (2010 b). Generalized control variate method for pricing Asian options. *The Journal of Computational Finance*, 14(2).
- C.-H. Han, W.-H. Liu, and T.-Y. Chen. (2011). An Improved Procedure for VaR/CVaR Estimation under Stochastic Volatility Models. Submitted.
- C.H. Han and C.T. Wu. (2012). Efficient Importance Sampling for Estimating Lower Tail Probabilities under Multivariate Gaussian and Student T Distributions. Preprint.

- D. Heath and E. Platen. (2002). A variance reduction technique based on integral representations. *Quantitative Finance*, 2(5), 362-369.
- S. Heston. (1993). A closed-form solution for option with stochastic volatility, with application to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- J. C. Hull. (2011). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Eighth Edition. Prentice Hall.
- J. C. Hull. (2010). *Risk Management and Financial Institutions*. 2nd Edition. Prentice Hall.
- G. Dionne, P. Duchesne, and M. Pacurar. (2009). Intraday Value at Risk (IVaR) using Tick-by-Tick with Application to the Toronto Stock Exchange. *Journal of Empirical Finance*. 16, 777-792.
- J. Gregory. (2010). *Counterparty Credit Risk*. John Wiley & Sons.
- P. Jackel. (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd.
- P. Jackel and A. Platen. (2010). *Encyclopedia of Quantitative Finance*. Editor Rama Cont. John Wiley and Sons.
- G.J. Jiang. (1998). Nonparametric Modeling of U.S. Interest Term Structure Dynamic and Implications on the Prices of Derivative Securities. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33(4), 465-497.
- P. Jorion. (2007). *Value-at-Risk: The New Benchmark for Managing Risk*. 3rd Edition. McGraw-Hill.
- E. Jondeau, P. Ser-Huang and M. Rockinger. (2007). *Financial Modeling under Non-Gaussian Distributions*: Springer.
- I. Karatzas and S. E. Shreve. (2000). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition. Springer.
- A. Kemna and A. Vorst. (1990). A pricing method for options based on averaged asset values. *Journal of Banking and Finance*, 14:113-130.
- P. Kloeden and E. Platen. (2011). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.

- R. Korn, E. Horn, and G. Kroisandt. (2010). Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance. CRC Press.
- M. H. Kutner, C. J. Nachtsheim, J. Neter, and W. Li. (2005). Applied Linear Statistical Models. Fifth Edition, McGraw-Hill/Irwin.
- D. Lamberton and B. Lapeyre. (1996). Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall/CRC.
- J.-P. Laurent and J. Gregory. (2005). Basket default swap, CDOs and factor copulas. *Journal of Risk*, 7(4), 103-122.
- B. LeBaron. (2001). Stochastic volatility as a simple generator of apparent financial power laws and long memory, *Quantitative Finance*, 1, 621-631.
- A. Lehar, M. Scheicher, and C. Schittenkopf. (2002). GARCH vs. stochastic volatility : Option pricing and risk management. *Journal of Banking & Finance*, 26(2-3), 323-345.
- P. L'Ecuyer and C. Lemieux. (2000) Variance reduction via lattice rules. *Management Science*, 46(9), 1214-1235.
- C. Lemieux. (2009). Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling. New York: Springer-Verlag.
- A. Lipton. (2001). Mathematical Methods for Foreign Exchange: A Financial Engineer's Approach. World Scientific Publishing Company.
- F. Longstaff and E. Schwartz. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies* 14: 113-147, 2001.
- D. X. Li. (2000). On Default Correlation: A Copula Function Approach. *Journal of Fixed Income*, 9, 43-54.
- X. Luo and E. J. Zhang. (2010). The Term Structure of VIX. Working Paper. Hong Kong University.
- P. Malliavin and M. E. Mancino. (2002). Fourier series method for measurement of multivariate volatilities. *Finance and Stochastics*. 6, 49-61.

- P. Malliavin and M. E. Mancino. (2009). A Fourier Transform Method for Nonparametric Estimation of Multivariate Volatilities, *The Annals of Statistics*, 37, 1983-2010.
- P. Malliavin and A. Thalmaier. (2005). *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*. Springer.
- M. E. Mancino and S. Sanfelici. (2008). Robustness of Fourier estimator. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, vol. 52(6), pages 2966-2989, February.
- H. Matsumoto and M. Yor. (2005). Exponential functionals of Brownian motion, II: Some related diffusion processes, *Probability Surveys*, Vol. 2: 348-384.
- R. C. Merton. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- M. J. Miranda and P. L. Fackler. (2002). *Applied Computational Economics and Finance*. The MIT Press.
- T. Mikosch. (1999). *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific Publishing Company.
- G. Molina, C.-H. Han, and J.P. Fouque. (2010). MCMC Estimation of Multiscale Stochastic Volatility Models. *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management*, Springer
- N.J. Newton. (1994). Variance reduction for simulated diffusions. *SIAM J. Applied Math.* 54(6), 1780-1805.
- H. Niederreiter. (1992). *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, SIAM, Philadelphia.
- D. Nualart. (2009). *Malliavin Calculus and Its Applications*. American Mathematical Society.
- B. Oksendal. (1998). *Stochastic Differential Equations*. 5th Edition. Springer-Verlag.
- A.B. Owen. (1997). Scrambled net variance for integrals of smooth functions. *Annals of Statistics*, 25, 1541-1562.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. (1992). *Numerical*

- Recipes in C: The Art of Scientific Computing. 2 edition. Cambridge University Press.
- H. Royden. (1998). Real Analysis. 3 edition. Prentice Hall.
- R. Reno. (2008). Nonparametric estimation of the diffusion coefficient of stochastic volatility models. *Econometric Theory*. 24(5), 1174-1206
- L. C. G. Rogers. (2002). Monte Carlo valuation of American Options. *Math Finance*, 12, 271-286.
- I. M. Sobol'. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and computer in simulation*, 55, 271-280.
- J. Stoer and R. Bulirsch. (1980). Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag.
- R. S. Tsay. (2005). Analysis of Financial Time Series. Second Edition. Wiley-Interscience.
- C.J. Wild and G.A.F. Seber. (1999). Chance Encounters: A First Course in Data Analysis and Inference. John Wiley and Sons Ltd.
- G. Willard. (1996). Calculating prices and sensitivities for path-dependent derivatives securities in multifactor models. PhD Thesis. Washington University in St. Louis.
- P. Wilmott. (2000). Paul Wilmott on Quantitative Finance. John Wiley & Sons.
- J. Yu. (2010). Simulation-based Estimation Methods for Financial Time Series Models. In *Handbook of Computational Finance*, edited by J.-C. Duan, J. E. Gentle and W. Hardle: Springer-Verlag.
- Haynes H. M. Yung and H. Zhang. (2003). An empirical investigation of the GARCH option pricing model: Hedging performance. *The Journal of Futures Markets*, 23, 1191-1207.
- L. Zhang and P. Mykland., (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noise high frequency data, *Journal of American Statistics*, 100, 1394-1411.

- J. E. Zhang and Y. Zhu. (2006). VIX Futures. The Journal of Futures Markets, 26(6), 521-531.
- C. Zhou. (2001 a). The Term Structure of Credit Spreads with Jump Risk. Journal of Banking & Finance, Vol. 25, No. 11, pp. 2015-2040.
- C. Zhou (2001b). An Analysis of Default Correlations and Multiple Defaults. The Review of Financial Studies, 14(2), 555-576.
- Y.-L. Zhu, X. Wu, and I.-L. Chern. (2004). Derivative Securities and Difference Methods. Springer Finance.

Index

索引

本章學習重點

中文索引

英文索引

中文索引

一劃

一致性風險度量 147

二劃

二元選擇權 118

二元分佈 278

二次變分 12

三劃

下界偏誤 172

上界偏誤 182

大數法則 111, 284

大離差理論 143, 314

四劃

不完全市場 158

中央極限定理 112, 284

分佈中收斂 283

分券 80

反變異 127

巴黎式選擇權 122

方差 287

日效應 220

五劃

可測函數 275

可測空間 273

可測集合 273

可預測的 307

市場風險 32

市場風險價格 35, 66

布朗運動 7

布朗運動極大值 47

布朗橋 130

平方根過程 72

平均性質 166

平賭性質 306

平賭控制變異法 157

平賭轉換 307

六劃

交叉變分 12, 23

仿射函數 62

伊藤公式 19

伊藤乘積法則 23

伊藤過程 20, 114

伊藤積分 18

共變異 8 287

危險率函數 71

回溯測試 255

多因子隨機波動模型 101

存活函數 71

有效波動率 166

自由邊界問題 49, 171

自我融資 30

自然域流 299

七劃

低分散序列 162

免模型 42, 214

均勻分佈 278

均值回歸過程 24, 215

局部 martingale 179

局部平均性質 293

局部波動率 212, 224

希臘字母 33

折現因子 62, 79

投資組合 30

投影性質 305

投機條件 52

決定係數 151

貝氏法則 292

八劃

亞式選擇權 152

到期日 26

店頭市場 28

抵押債務債券 80

波動風險溢酬 214

波動率的波動率 213, 222

波動率指數 227

波爾卷積 208

泊松分佈 278, 282

芝加哥期貨交易所 28

芝加哥選擇權交易所 5

金融工程 6

金融數學 6

阿基米德族 75

九劃

信心水準 145

信用評等公司 81

信用違約交換 80, 83

信賴區間 112

保護端 79

律中收斂 283

按市價計值 205

持續性 200

指數分佈 278

指數平賭 35

指數扭曲 141
 指數調整 142
 計(數)量金融 6
 計算金融 6
 重要抽樣法 135
 風險中立訂價 34
 風險度量 147
 風險值 145
 風險測度公理 147
 首次穿越時間 45
 首達時間 43

十劃

倫敦同業拆款利率 68
 原子 295, 296
 套利 39
 弱收斂 116, 283
 恐懼指數 214
 時間改變 46
 消費率 54
 特徵函數 10, 282
 逆高斯分佈 46
 配對交易 241
 馬可夫過程 308
 高效能重要抽樣法 136
 高斯因子關聯函數 76
 高斯過程 24

高頻資料 102, 264

十一劃

偽隨機序列 162, 184
 停止時間 44, 171
 停止時間原則 45
 停止區域 50
 停止過程 45
 偏誤降低 211
 動差函數 281
 動態交易策略 30
 動態複製 229
 域流 294
 常態分佈 277
 常態逆高斯分佈 46
 強大數法則 284
 強收斂 114
 控制變異法 149
 敏感度分析 151
 敏感度估計 185
 條件抽樣 129
 條件風險值 145, 240
 條件期望 43, 214, 303
 條件機率 275, 292
 條件覆蓋 256, 257
 累積分配函數 276
 累積量生成函數 144

連續半鞅 21

十二劃

傅立葉估計式 209

傅立葉轉換方法 97, 204

傅立葉轉換法 207

最小平方估計 304

最小平方法 170

最佳重要抽樣法 136

最佳停止問題 50, 171

最佳履約時間 50, 171

單調收斂定理 285

幾何分佈 278

幾何布朗運動 15, 313

幾何平均 153

期貨 27, 41

期貨契約 42

殖利率 60

殖利率曲線 60

測度轉換 142, 289

無套利訂價理論 31

無套利條件 66

無條件的穩定 93

無條件超出率 255

短期利率模型 61

稀有事件模擬 135

結構式模型 69

絕對連續 276, 286

超出獨立性 255

集中交易所 41

十三劃

亂化 QMC 法 164, 165

亂數產生器 107

債券選擇權 63

微笑曲線 206

新奇選擇權 27

概似微分法 186

資訊流 294

資產訂價第一基本定理 39

資產訂價第二基本定理 40

路徑微分法 186

路徑獨立 27, 152

跳躍-擴散模型 99

違約事件 70

違約時間 70

違約端 79

零息債券 60

預期短缺 148

十四劃

實現變異 15

對偶法 170, 182

對稱隨機漫步 309

對數契約 229
 對數報酬 229, 256
 槓桿效應 200, 232
 漸進分析 143
 漸進展開 104
 算術平均 152
 網格法 162
 維度詛咒 110
 維度縮減法 123
 臺灣發行人加權指數 216
 蒙地卡羅方法 104
 蒙地卡羅在蒙地卡羅 126
 遠期利率 64
 遠期波動率 124
 遠期契約 41

十五劃

價平關係 33, 229
 價差 42, 257
 價格的上下界 38
 增益過程 17
 履約價 228
 廣義雙曲分佈 46
 數位網序列 162
 數值偏微分方程 90
 數值積分 110
 數值隨機微分方程 114

數理金融 6
 樣本空間 162
 標準誤差 112
 模擬測試 212
 歐式買權 26
 歐式賣權 27
 線性互補條件 50
 複合選擇權 63
 調整後 Delta 避險 240
 適應的 299
 適應過程 299

十六劃

擔保債權憑證 80
 橢圓族關聯函數 74
 機率空間 272
 機率測度轉換 34
 歷史波動率 34, 264
 歷史模擬 108
 歷史機率測度 35
 獨立 275
 選擇抽樣定理 45, 179
 選擇權 28
 隨機波動模型 99
 隨機版的微積分基本定理 19
 隨機微積分 4
 隨機漫步 309

隨機變數 275

靜態複製 229

頻域 208

十七劃

擬蒙地卡羅法 131

瞬時波動率 201

縮減式模型 69

聯合常態隨機變數 301

避險投資組合 158, 242

避險表現 240

隱含波動率 34

隱含波動率曲面 205

隱含相關 77, 81

隱含風險中立分佈 224

點收斂 283

十八劃

叢聚效應 203, 233

擾動方法 102

濾波問題 203

簡單過程 17

雙重障礙 121

十九劃

穩態的 309

邊界機率 292

鏡射原理 45

關聯因子模型 76

關聯函數 73

二十劃

繼續區域 50

繼續價值 51, 171

二十二劃

權益型證券 5, 200

二十三劃

變分 12

變異交換率 214, 235

變異數分析 143, 158

變異數縮減法 118, 134

英文索引

A

absolutely continuous 276
 adapted 294, 299
 adapted process 299
 almost surely 275, 283
 arithmetic average 152
 asymptotic expansion 104
 atoms 295

B

Backtesting 255
 Bayes rule 292
 Bias Reduction 211
 binomial distribution 278
 Black Caplet Formula 69
 Black-Scholes 封閉解公式 37
 Black-Scholes 選擇權訂價公式 32
 200
 Black-Scholes 偏微分方程式 31, 90
 Bohr Convolution Product 208
 Breeden-Litzenberger formula 225
 Breeden-Litzenberger 公式 225

C

Cauchy-Schwartz 288
 CBOE 5
 CDX 80
 Central Limit Theorem 112, 284
 change of probability measure 136
 characteristic function 282
 Chebyshev 不等式 288
 CIR 模型 61
 cluster 200, 233
 cluster effect 203
 coefficient of determination 151
 coherent risk measure 147
 Collateralized Debt Obligation 2, 80
 conditional coverage 256
 Conditional Jensen's inequality 304
 conditional probability 275, 292
 Conditional Sampling 127
 Conditional Value at Risk, C-VaR 148
 confidence interval 112
 continuation value 171
 control variate method 134
 convergence in distribution 283

convergence in law 283

Copula Function 73

correlation coefficient 287

covariance 287

Cramer 定理 144, 314

Cramer's Theorem 144, 316, 317

Crank-Nicolson 算法 93

Credit Default Swap 2, 80

CUDA 188

cumulant generating function 144

cumulative distribution function 276

curse of dimensionality 110

D

Daily Effect 220

default leg 79

Delta-Gamma 避險 240

digital netsequence 162

dimension reduction technique 123

diversification principle 146

Dominated Convergence Theorem 285

Doob-Meyer Decomposition 53

Double Barrier Option 121

Dupire Formula 224

dynamic replication 229

E

effective volatility 166

efficient importance sampling 136

Engle 200

equity security 5, 200

equivalence 290

Euler 離散方式 114

event 105

EWMA 237

Exotic Options 118

Expected Shortfall 148

exponential distribution 278

exponential tilting 142

exponential twisting 142

F

Feynman-Kac 37

FFT 97

filtration 10, 294

finite difference method 90

forward rate 64

forward volatility 124

Fourier estimator 209

Fourier Transform Method 97

free boundary problem 49, 171

frequency domain 208

G

gain process 17
Gamma 分配 282
GARCH(1,1) 237, 255
geometric average 153
geometric distribution 278
Girsanov Theorem 34, 35
GPU 平行計算 187

H

hazard rate function 71
Heath-Jarrow-Morton 模型 64
hedging portfolio 158
Heston 模型 100
Historical Simulation 104
Historical Volatility 201
historical/physical probability measure
289
Holder's Inequality 288
Ho-Lee model 24

I

implied correlation 77, 81
Implied Volatility 205, 267
importance sampling 134
in distribution 112, 282

in probability 283
in r th mean 283
incomplete market 158, 241
independence of exceedances 255
independent 275
information flow 294
Instantaneous Volatility 206
integrated volatility 200, 228
Ito Isometry 17, 18
Ito Process 20
Ito's Formula 19
iTraxx 80, 83

J

Jensen's Inequality 38, 281
Jensen's 不等式 281

K

Kolmogorov Forward Equation 225
Kolmogorov 前向方程 225

L

lattice rule 162
Least Squares Method 170
Lebesgue 測度 274
Lebesgue 積分 16, 278
Legendre transform 314

leverage effect 200, 232
 LIBOR 64, 68
 LIBOR 模型 64
 LMMR 206, 244, 253
 local martingale 179
 Local Volatility 224
 Log contract 229
 Log-Normal Process 25
 Louis Bachelier 4
 low-discrepancy sequence, LDS 162
 LU 分解法 94

M

marginal probability 292
 mark to the market 206
 market price of risk 66
 Markov Process 308
 Markovian 308
 Markov 不等式 288
 Martingale Property 306
 Martingale Representation Theorem 38
 martingale transform 307
 mean reversion, 101 200, 244
 measurable function 275
 measurable set 273
 measurable space 1, 273
 Milstein 離散方式 114

Minkowski's Inequality 288
 model calibration 101, 201, 224
 model-free 214
 moment generating function 281
 Monotone Convergence Theorem 285
 Monte Carlo on Monte Carlo 126 172
 multifactor stochastic volatility model
 101
 Multivariate Normal 301

N

natural filtration 299
 No Arbitrage Condition 66
 normal distribution 277
 numerical integration 110
 Numerical Stochastic Differential
 Equations 114

O

optimal importance sampling 136
 optimal stopping problem 50, 171
 Ornstein-Uhlenbeck process 24

P

Parisian Option 122
 partial averaging property 293
 persistence 200

Poisson distribution 278, 282

predictable 307

protection leg 79

pseudo random number 106

pseudo random sequence 162, 168

Q

Quasi Monte Carlo Method 161, 162

R

Radon-Nikodym derivative 290

Radon-Nikodym Theorem 290

random variable 111, 275

Randomized QMC Method 164

rate function 314

realized variance 15, 236

reduced-form model 69

risk measure 147

S

sample 105

sample space 1, 272

sensitivity analysis 151

Sensitivity Estimation 185

simple process 17

simulation 105

Sklar 定理 73

standard error 112

static replication 229

stationary 309

strong convergence 114

Strong Law of Large Numbers 111, 284

structural-form model 69

Survival Function 71

symmetric random walk 309

T

TAIEX 204

tranche 80

U

unconditional rate of exceedance 255

unconditional stable 93

uniform distribution 278

V

Value at Risk, VaR 2, 145

variance 287

variance analysis 143

Variance Swap Rate 235

Vasicek process 24

Vasicek 模型 61

VG 模型 100

VIX 214

volatility of volatility 213

volatility risk 241

volatility smile 206, 241

W

weak convergence 116, 283

Σ

σ - algebra 1, 272, 273

